

**Еримбетова Л.Т.**

Казахский Национальный университет имени аль-Фараби, Казахстан, Алматы,  
e-mail: lyazzat.yerimbet.26@gmail.com

## **МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ПЫЛЕВЫХ ЧАСТИЦ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ**

В данной работе используется предложенная ранее псевдопотенциальная модель взаимодействия частиц пылевой плазмы, которая корректно учитывает конечность размеров пылинок в рамках классической электродинамики плазмы в приближении хаотических фаз. Построенный таким образом потенциал значительно отличается от широко применяемого потенциала Юкавы (Дебая-Хюккеля) при достаточно больших значениях параметра экранировки, что объясняется использованием разных граничных условий у поверхности пылинок. Предложенная псевдопотенциальная модель применяется для определения радиальных функций распределения и статических структурных факторов пылевых частиц методом интегральных уравнений. В частности, используется уравнение Орнштейна-Цернике в гиперцепном приближении с мостиковыми поправками для точечных частиц. Так как в данном исследовании размеры пылевых частиц предполагаются конечными, то вычисление также проводится в рамках комбинированного метода интегральных уравнений, который основан на том, что вначале вычисляются корреляционные функции для системы твердых шаров в уравнении Перкуса-Йевика, а затем делается переход к модели твердых заряженных шаров в базовом гиперцепном приближении. Результаты показывают, что при больших плотностях упаковки радиальные функции распределения и статические структурные факторы демонстрируют более значительные пики по сравнению с простым методом Орнштейна-Цернике в гиперцепном приближении, что свидетельствует об образовании ближнего и дальнего порядка в расположении пылинок при больших значениях их параметра связи.

**Ключевые слова:** Пылевая плазма, эффекты экранировки, модель взаимодействия частиц, радиальные функции распределения, статические структурные факторы, интегральное уравнение Орнштейна-Цернике, уравнение Перкуса-Йевика.

Yerimbetova L.T.

al-Farabi Kazakh National University, Kazakhstan, Almaty,  
e-mail: lyazzat.yerimbet.26@gmail.com

### **Method of integral equations for dust particles of finite size**

In this paper we make use of the earlier proposed pseudopotential model of interaction of dusty plasma particles, which correctly takes into account the finite size of the dust particles in the framework of classical plasma electrodynamics in the random-phase approximation. The potential thus constructed differs significantly from the widely used Yukawa (Debye-Hückel) potential at sufficiently large values of the screening parameter, which is explained by the engagement of different boundary conditions at the surface of dust particles. The proposed pseudopotential model is applied to determine the radial distribution functions and the static structural factors of dust particles by the method of integral equations. In particular, the Ornstein-Zernike relation in the hypernetted-chain approximation with the bridge functions for the point-like particles is numerically solved. Since the dimensions of the dust particles are assumed to be finite, the calculations are also carried out within the framework of the combined method of integral equations, which is based on the determination of the correlation functions for the system of hard spheres within the Percus-Yevick equation with further transition to a model of solid charged balls

studied within the modified hypernetted-chain approximation. The results show that at high packing fractions, the radial distribution functions and the static structural factors exhibit more significant peaks in comparison with the simple Ornstein-Zernike relation in the hypernetted-chain approximation, which indicates the formation of short-range and long-range orders in the arrangement of dust particles at rather large values of their coupling.

**Key words:** Dusty plasma, screening effects, interaction model, radial distribution function, the static structural factors, the Ornstein-Zernike integral equation, the Percus-Yevick equation.

Ерімбетова Л.Т.

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Қазақстан, Алматы қ.,  
e-mail: lyazzat.yerimbet.26@gmail.com

### Шекті өлшемді тозақ бөлшектері үшін интегралдық теңдеулер әдісі

Осы жұмыста классикалық электродинамика аясындағы ретсіз фаза жақындауында тозақдардың шекті өлшемділігін ұсынды есепке алатын, ертеректе ұсынылған тозақды плазма бөлшектерінің псевдопотенциалдық үлгіде әсерлесуі қолданылады. Осылайша құрылған потенциал, экрандалу параметрінің жеткілікті үлкен шамасында кеңінен қолданылатын Юкава (Дебай-Хюккель) потенциалынан айтарлықтай айырмашылығы бар, ол тозақшалардың беткі қабатыны төңірегінде әртүрлі шекаралық шарттардың қолданылуымен түсіндіріледі. Ұсынылып отырған псевдопотенциалдық үлгі интегралдық теңдеулер әдісімен тозақ бөлшектерінің радиальды функцияларының таралуы мен статикалық құрылымдық факторын анықтау үшін қолданылады. Жекелеп айтқанда, нүктелік өлшемді бөлшектер үшін көпірлік түзетулерімен гиперцентрі жуықтаудағы Орнштейн-Церник теңдеуі қолданылады. Осы зерттеуде тозақ бөлшектерінің өлшемі шекті деп ұйғарылғандықтан, есептеу тағы интеграл теңдеулерінің комбинациялық үлгісі аясында жүргізіледі, ол мынаған негізделген, алдымен қатты шарлар жүйесі үшін Перкус-Иевик теңдеуіндегі корреляциялық функциялар есептеледі, содан соң өзгертілген гиперцентрік жуықтаудағы зарядталған қатты шарлар үлгісіне өту жасалынады. Нәтижелер үлкен тығыздықтарда радиальды функция таралуы және статикалық құрылымдық факторлар, қарапайым гиперцентрік жуықтаудағы Орнштейн-Церник үлгісімен салыстырғанда, айтарлықтай шыңдар көрсетіп тұрғанын көрсетеді, ал ол байланыс параметрінің үлкен шамаларында тозақдардың орналасуында алыс және жақын реттіктің пайда болуын айғақтайды.

**Түйін сөздер:** Тозақды өткізгіш бөлшектері бар плазма, экранировка эффектілері, бөлшектердің әсерлесу моделі, радиальды таралу функциясы, статикалық құрылымдық фактор, Орнштейн-Цернике интегралдық теңдеуі, Перкус-Иевик теңдеуі.

### Введение

В последние десятилетия активно продолжают исследования пылевой плазмы, то есть обычной плазмы, в которой присутствуют частицы микронных размеров, называемые пылинками [1,2]. Известно, что пылинки в плазме приобретают такой, в основном отрицательный, электрический заряд [3,4], что энергия их взаимодействия становится много большей в сравнении с кинетической энергией их хаотического движения [5,6]. При этом пылинки в своем расположении по отношению друг к другу образуют структуру, напоминающую кристаллическую решетку и называемую плазменным кристаллом [7,8].

Пылевая плазма часто встречается как в природных, так и в лабораторных условиях [9,10]. Например, она изучается в астрофизических приложениях и экспериментах в космосе [11,12], рождается при контакте плазмы со стенками установок управляемого термоядерного синте-

за [13,14], используется в медицине для лечения рака [15,16] и т.д. Пылевая плазма сохраняет и свое фундаментальное значение, так как поведение частиц легко фиксируется в эксперименте с помощью видеокамеры высокого разрешения [17,18], что позволяет непосредственно тестировать теоретические методы, разработанные для открытых и неидеальных многочастичных систем [19,20].

В современной литературе по физике пылевой плазмы главным образом применяются эвристические подходы для исследования термодинамических свойств пылевой компоненты, которые в той или иной мере основаны на использовании потенциала Юкавы (Дебая-Хюккеля) [21,22] с постоянным зарядом частиц. До конца такое приближение нельзя считать удовлетворительным, так как при выводе потенциала Юкавы существенно используется тот факт, что частицы должны быть точечными, но тогда они не смогут приобретать электрический заряд. В этом смысле логически последовательное

исследованное необходимо проводить по предложенной в данном проекте методике, которая базируется на определении потенциалов взаимодействия, прямом вычислении заряда пылинок в рамках метода ограниченного орбитального движения, определении радиальных функций распределения и соответствующих им статических структурных факторов методами интегральных уравнений, Монте-Карло и молекулярной динамики, и, наконец, расчете на их основе термодинамических характеристик пылевой компоненты. Подобное рассмотрение позволяет точно рассчитывать спектр пыле-акустических волн, в котором учитывается процесс перезарядки самих пылевых частиц, характерное время которого должно оставаться много меньшим обратной частоты легмюровских колебаний пылинок.

В данной работе используется потенциал взаимодействия, полученный в [23] в рамках классической электродинамики плазмы и учитывающий конечность размеров пылевых частиц. Строго говоря, с физической точки зрения практически очевидно, что все корреляционные функции системы определяются потенциальной энергией взаимодействия ее компонентов. Одним из наиболее эффективных методов их определения является метод интегральных уравнений, позволяющий изучать радиальные функции распределения и статические структурные факторы в широкой области изменения параметров системы.

В настоящем исследовании проведено сравнение двух методов с целью установления влияния конечности размеров пылинок на их корреляционные функции. В первом подходе частицы считаются точечными, так что взаимодействие между ними реализуется потенциалом Юкавы, а вычисление радиальных функций распределения и статических структурных факторов проводится в рамках уравнения Орнштейна-Цернике в гиперцепном приближении с мостиковыми поправками [24,25]. Во втором методе частицы рассматриваются как твердые заряженные шары, при этом вначале вычисляются корреляционные функции подсистемы твердых шаров в рамках уравнения Перкуса-Йевики [26], а затем решается модифицированное уравнение Орнштейна-Цернике в гиперцепном приближении [27].

### Параметры плазмы

$$\varphi(r) = \frac{Z^2 e^2}{r + 2R} - \frac{Z^2 e^2}{r} [1 - \exp(-k_D r) - k_D R B(r)], \quad (5)$$

Рассмотрим однокомпонентную пылевую плазму с концентрацией пылинок  $n$  и температурой  $T$ . Сами пылевые частицы будем считать сферическими с радиусом  $R$  и электрическим зарядом  $Ze$ , где  $e$  – заряд электрона, а  $Z$  – зарядовое число пылинок.

Состояние пылевой компоненты плазмы характеризуется параметром связи

$$\Gamma = \frac{Z^2 e^2}{ak_B T}, \quad (1)$$

где  $a = (3/4\pi n)^{1/3}$  – среднее расстояние между пылевыми частицами,  $k_B$  – постоянная Больцмана, а также параметром экранирования

$$\kappa = ak_D, \quad (2)$$

в котором  $k_D$  – волновое число, обратное радиусу Дебая  $r_D$  экранирования поля электронами и ионами буферной плазмы.

Для учета конечности размера пылевых частиц введем параметр, который определяет долю объема системы, занятой пылинками, и называется плотностью упаковки

$$\eta = \frac{4}{3} \pi n R^3. \quad (3)$$

Введенные параметры полностью определяют состояние пылевой компоненты плазмы с частицами конечных размеров.

### Потенциал взаимодействия пылевых частиц

В современной литературе по физике пылевой плазмы широко используется потенциал Юкавы взаимодействия пылевых частиц, имеющий вид:

$$\varphi(r) = \frac{Z^2 e^2}{r} \exp(-k_D r). \quad (4)$$

Ранее в работе [23] был предложен следующий потенциал взаимодействия пылинок, учитывающий конечность их размеров

где

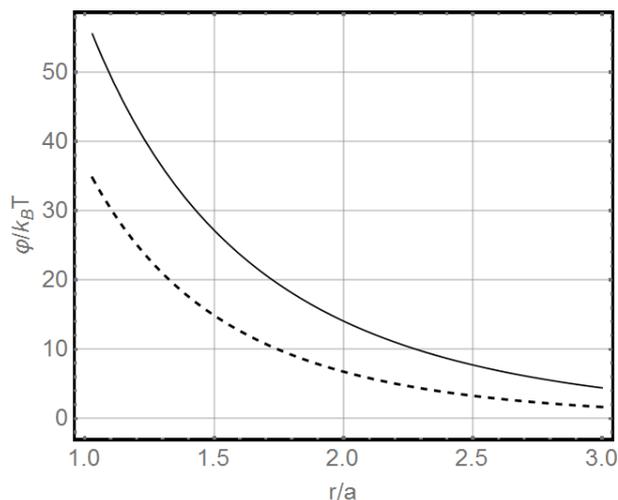
$$B(r) = \exp(k_D(2R+r)) \text{Ei}(k_D(2R+r)) - \exp(k_D(2R-r)) \text{Ei}(2k_D R) + \exp(-k_D(2R+r)) [\text{Ei}(2k_D R) - \text{Ei}(-k_D(2R+r))] \quad (6)$$

с экспоненциальной интегральной функцией

$$\text{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{\exp(-t)}{t} dt. \quad (7)$$

Следует отметить, что в приведенных выражениях (5) и (6) расстояние между пылевыми частицами отсчитывается от их поверхностей, что необходимо учитывать при всех дальнейших расчетах методом интегральных уравнений.

На рисунке 1 проведено сравнение потенциалов (4) и (5) для параметров плазмы  $\Gamma = 100$ ,  $\kappa = 1$  и  $\eta = 0.1$ . Из рисунка видно, что потенциал (5) лежит выше потенциала (4), так как экранировка начинает действовать только от поверхности частиц.



**Рисунок 1** – Приведенная потенциальная энергия взаимодействия пылевых частиц в буферной плазме при  $\Gamma = 100$ ,  $\kappa = 1$  и  $\eta = 0,1$ . Штриховая линия: формула (4); сплошная линия: формула (5)

### Корреляционные функции пылинок

Для определения радиальных функций распределения широко используется метод интегральных уравнений. Дело в том, что с точки зрения статистической физики многочастичные функции распределения известны точно и выражаются распределением Гиббса. Однако они несут в себе много лишней информации, которая не нужна на практике. С точки зрения вычисления

термодинамических характеристик среды достаточно знать всего лишь парную корреляционную функцию или соответствующую радиальную функцию распределения.

Из статистической физики равновесных систем многих частиц известно, что прямая корреляционная функция  $C(\mathbf{r})$  и парная корреляционная функция  $h(\mathbf{r})$  связаны соотношением, называемым уравнением Орнштейна-Цернике, которое для однокомпонентной системы имеет вид

$$h(\mathbf{r}) = C(\mathbf{r}) + n \int C(\mathbf{r}-\mathbf{r}') h(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (8)$$

где

$$h(\mathbf{r}) = g(\mathbf{r}) - 1, \quad (9)$$

а  $g(\mathbf{r})$  – парная корреляционная функция и  $n$  – концентрация частиц.

Уравнения (7) и (8) являются фактически определениями, а поэтому точны в математическом и физическом смыслах, но их недостаточно для определения трех неизвестных функций.

Существует еще одно соотношение, которое является точным и выражает радиальную функцию распределения через так называемую мостиковую поправку  $B(\mathbf{r})$  в виде

$$g(\mathbf{r}) = \exp\left(-\frac{\varphi(r)}{k_B T} + h(\mathbf{r}) - C(\mathbf{r}) + B(\mathbf{r})\right). \quad (10)$$

Уравнение (10) не дает нам ничего нового с точки зрения возможности нахождения радиальных функций распределения, так как оно одновременно вводит еще одно неизвестное переменное  $B(\mathbf{r})$ . Поэтому рассмотрим несколько практических способов, предложенных в литературе.

Наиболее простым является так называемое гиперцепное приближение, которое состоит в том, что мостиковая поправка просто обнуляется, то есть полагается

$$B(\mathbf{r}) = 0. \quad (11)$$

В этом случае система уравнений (8)-(10) может быть решена численно путем использования итерационного алгоритма. Сравнение с результатами численного моделирования показало, что гиперцепное приближение очень хорошо работает для не слишком сильно связанных систем.

С уменьшением расстояний между частицами отклонения гиперцепного приближения от результатов моделирования методом Монте-Карло и молекулярной динамики достигает значительных величин, что стимулировало дальнейшие исследования в этом направлении. Было отмечено, что при очень больших параметрах связи системы радиальные функции становятся похожими на те, которые наблюдаются для системы так называемых твердых шаров, которые обычно анализируются в приближении Перкуса-Йевики [26]

$$C(\mathbf{r}) = g(\mathbf{r}) \left[ 1 - \exp\left(\frac{\varphi(r)}{k_B T}\right) \right]. \quad (12)$$

Это приводит к тому, что радиальная функция распределения обращается в нуль там, где потенциал твердых сфер обращается в бесконечность, а это в свою очередь позволяет решить полученную систему уравнений и полностью определить все неизвестные функции для твердых сфер. Обнуление радиальной функции распределения на расстояниях, меньше диаметра взаимодействующих частиц, является естественным физическим требованием модели твердых сфер, которые не могут проникать друг в друга. Для этого достаточно вспомнить физический смысл радиальной функции распределения, которая представляет собой плотность вероятности обнаружения частиц на некотором расстоянии друг от друга. Следует особо подчеркнуть, что результаты компьютерного моделирования системы твердых сфер методами Монте-Карло и молекулярной динамики полностью подтвердили справедливость уравнения Перкуса-Йевики.

Этот успех для систем твердых сфер позволил продвинуться дальше, выдвинув целый ряд возможных приближенных решений для произвольного потенциала взаимодействия. Основная их идея состоит в том, чтобы использовать систему твердых сфер в качестве базовой и пред-

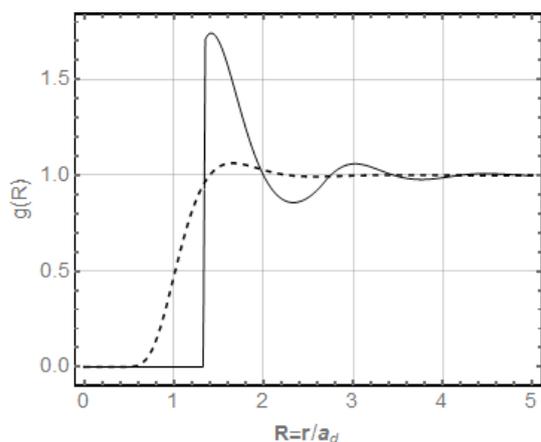
ставить реальный потенциал взаимодействия как сумму двух частей, одна из которых составляет потенциал твердых сфер, а другая жестко определена потенциалом взаимодействия самой системы. Все эти методы так или иначе используют тот факт, что мостиковые вклады слабо зависят от потенциала взаимодействия и поэтому могут быть фактически взяты из решения уравнения Перкуса-Йевики для твердых сфер. Так появилось простейшее, так называемое базовое гиперцепное приближение [27].

В дальнейшем Ладо предложил усложнить схему, так как было не вполне ясно выбор размера частиц. Он предложил минимизировать свободную энергию системы при вариации радиальной функции распределения. Такая схема получила название модифицированного гиперцепного приближения [28].

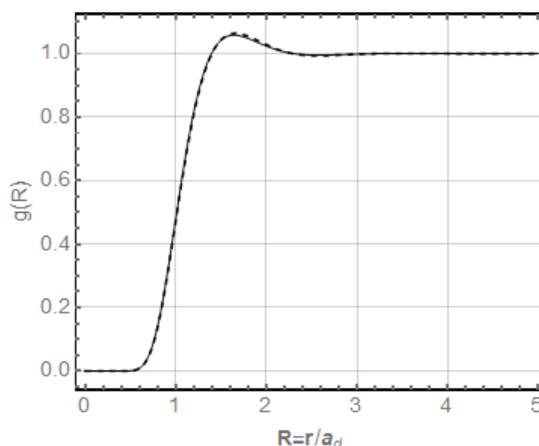
Розенфельд и Ашкрофт [29] пошли еще дальше и предложили минимизировать свободную энергию производя вариацию всех параметров системы/, что позволило не контролировать выполнение дополнительных условий, которые появлялись в базовом гиперцепном приближении. Этот метод в литературе получил название вариационно-модифицированного гиперцепного приближения.

В нашей системе пылевые частицы сами по себе являются заряженными твердыми сферами, поэтому варьирование их размера не представляется возможным. В этой связи кажется разумным использование базового гиперцепного приближения, а также подхода, основанного на решении обычного уравнения Орнштейна-Цернике в гиперцепном приближении с известными мостиковыми вкладками.

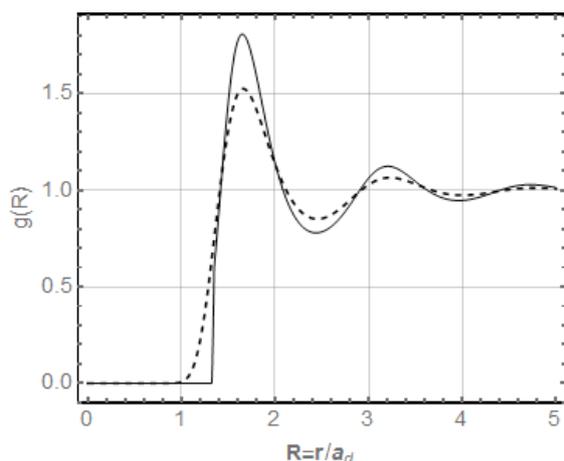
Сравнение радиальных функций распределения для предложенного ранее потенциала взаимодействия и потенциала Юкавы представлено на рисунках 2-7. При этом следует отметить, что отдельно не приходится требовать обнуление радиальной функции распределения там, где расстояние между частицами фактически уменьшается до значения, меньшего диаметра взаимодействия пылевых частиц. Этот результат гарантируется использованием самого метода, в который органично входит использование решения уравнения Перкуса-Йевики для потенциала твердых сфер.



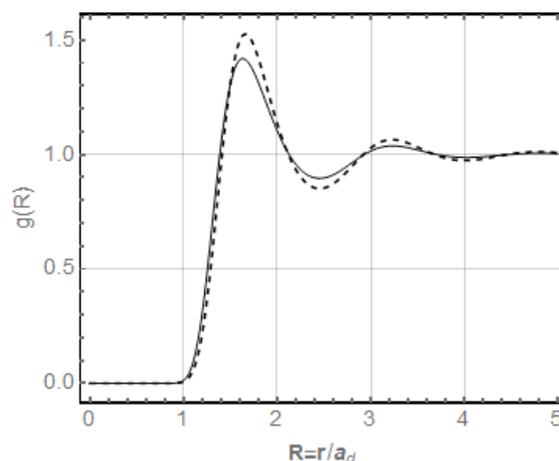
**Рисунок 2** – Радиальные функции распределения, рассчитанные разными методами при  $\Gamma = 10$ ,  $k = 1.5$  и  $\eta = 0.3$ . Штриховая линия: гиперцепное приближение с потенциалом (4); сплошная линия: базовое гиперцепное приближение с потенциалом (5)



**Рисунок 3** – Радиальные функции распределения, рассчитанные разными методами при  $\Gamma = 10$ ,  $k = 1.5$  и  $\eta = 10^{-6}$ . Штриховая линия: гиперцепное приближение с потенциалом (4); сплошная линия: базовое гиперцепное приближение с потенциалом (5)



**Рисунок 4** – Радиальные функции распределения, рассчитанные разными методами при  $\Gamma = 60$ ,  $k = 1.5$  и  $\eta = 0.3$ . Штриховая линия: гиперцепное приближение с потенциалом (4); сплошная линия: базовое гиперцепное приближение с потенциалом (5)



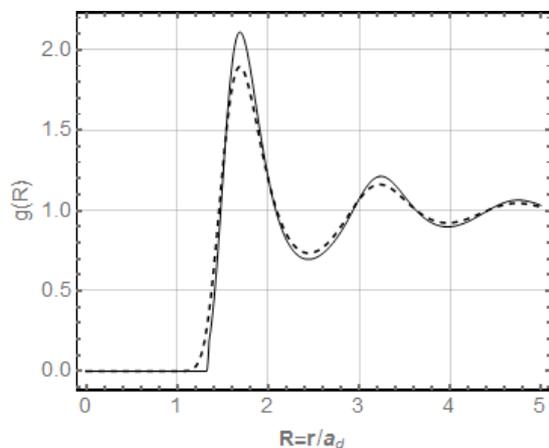
**Рисунок 5** – Радиальные функции распределения, рассчитанные разными методами при  $\Gamma = 60$ ,  $k = 1.5$  и  $\eta = 10^{-6}$ . Штриховая линия: гиперцепное приближение с потенциалом (4); сплошная линия: базовое гиперцепное приближение с потенциалом (5)

Анализ полученных графических данных позволяет сделать следующие выводы. При очень малых плотностях упаковки и малых параметрах связи оба использованных метода, то есть уравнение Орнштейна-Цернике в гиперцепном приближении с потенциалом Юкавы (4) и базовое гиперцепное приближение с потенциалом (5), дают практически совпадающие результаты. При этом величина первого пика на радиальной функции распределения в базовом гиперцепном

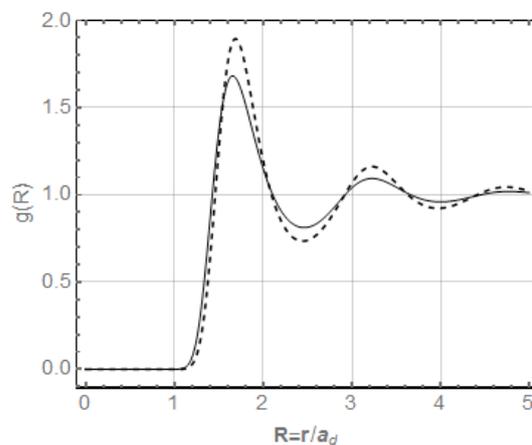
приближении резко возрастает с увеличением плотности упаковки, а сам он располагается значительно правее такого же пика в гиперцепном приближении, что свидетельствует о необходимости корректного и последовательного учета размера пылевых частиц. Следует отметить, что в пылевой плазме, встречающейся в реальных экспериментальных установках, плотность упаковки обычно не является большой и можно применять обычное гиперцепное приближение. Однако это

может оказаться несправедливым для так называемых коллоидных суспензий, к которым построенная теоретическая модель также применима.

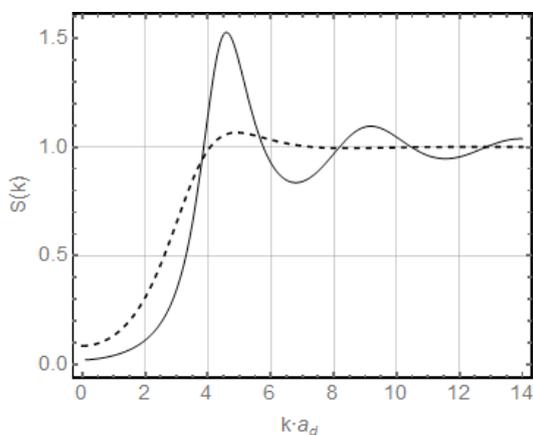
Аналогичное сравнение выполнено для статических структурных факторов и представлено на рисунках 8-13.



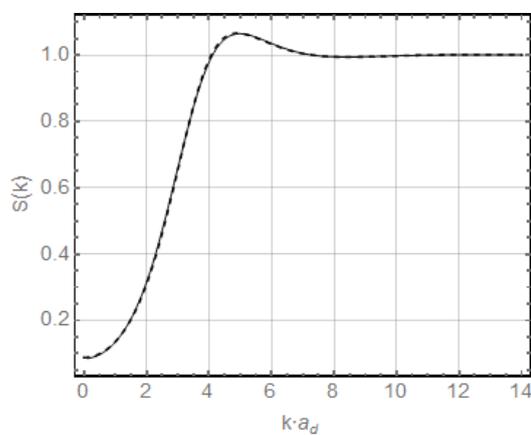
**Рисунок 6** – Радиальные функции распределения, рассчитанные разными методами при  $\Gamma = 120$ ,  $k = 1.5$  и  $\eta = 0.3$ . Штриховая линия: гиперцепное приближение с потенциалом (4); сплошная линия: базовое гиперцепное приближение с потенциалом (5)



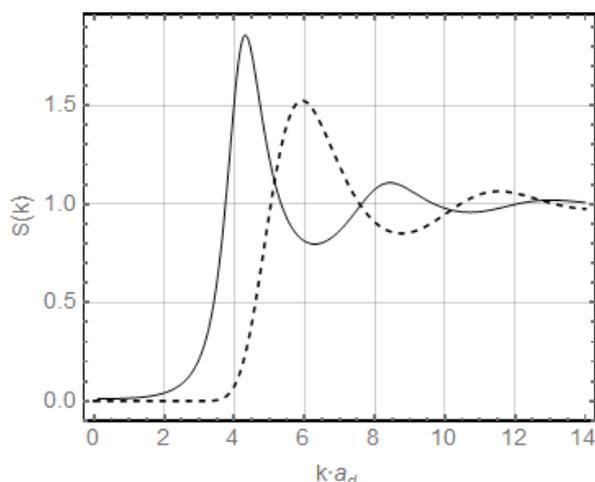
**Рисунок 7** – Радиальные функции распределения, рассчитанные разными методами при  $\Gamma = 120$ ,  $k = 1.5$  и  $\eta = 10^{-6}$ . Штриховая линия: гиперцепное приближение с потенциалом (4); сплошная линия: базовое гиперцепное приближение с потенциалом (5)



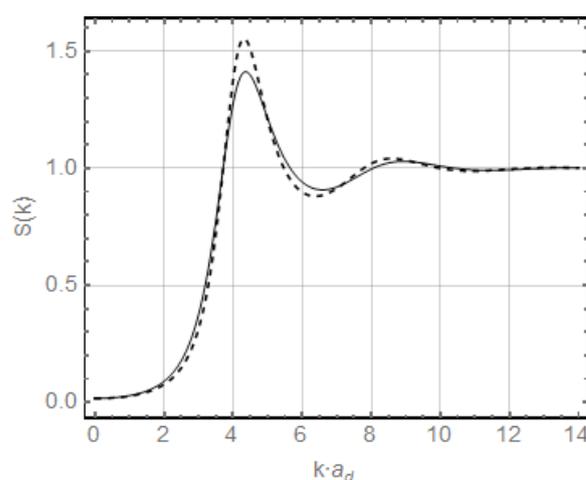
**Рисунок 8** – Статические структурные факторы, рассчитанные разными методами при  $\Gamma = 10$ ,  $k = 1.5$  и  $\eta = 0.3$ . Штриховая линия: гиперцепное приближение с потенциалом (4); сплошная линия: базовое гиперцепное приближение с потенциалом (5)



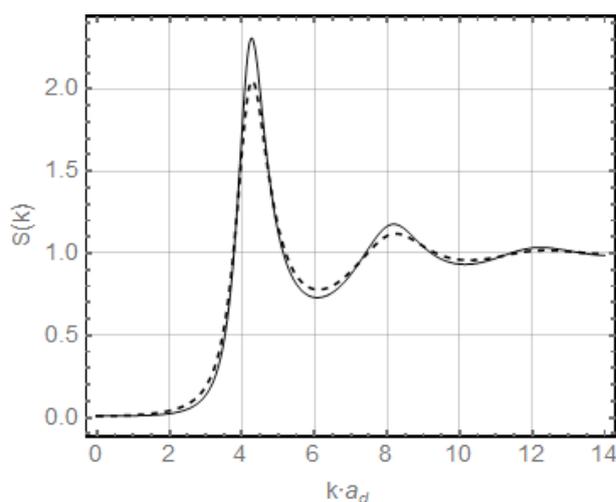
**Рисунок 9** – Статические структурные факторы, рассчитанные разными методами при  $\Gamma = 10$ ,  $k = 1.5$  и  $10^{-6}$ . Штриховая линия: гиперцепное приближение с потенциалом (4); сплошная линия: базовое гиперцепное приближение с потенциалом (5)



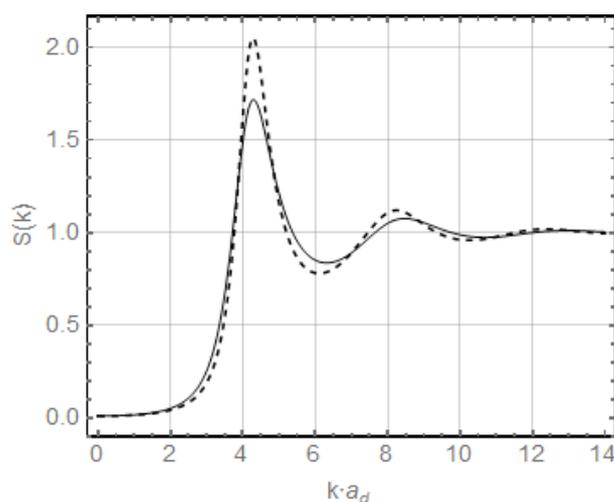
**Рисунок 10** – Статические структурные факторы, рассчитанные разными методами при  $\Gamma = 60$ ,  $k = 1.5$  и  $\eta = 0.3$ . Штриховая линия: гиперцепное приближение с потенциалом (4); сплошная линия: базовое гиперцепное приближение с потенциалом (5)



**Рисунок 11** – Статические структурные факторы, рассчитанные разными методами при  $\Gamma = 60$ ,  $k = 1.5$  и  $\eta = 10^{-6}$ . Штриховая линия: гиперцепное приближение с потенциалом (4); сплошная линия: базовое гиперцепное приближение с потенциалом (5)



**Рисунок 12** – Статические структурные факторы, рассчитанные разными методами при  $\Gamma = 120$ ,  $k = 1.5$  и  $\eta = 0.3$ . Штриховая линия: гиперцепное приближение с потенциалом (4); сплошная линия: базовое гиперцепное приближение с потенциалом (5)



**Рисунок 13** – Статические структурные факторы, рассчитанные разными методами при  $\Gamma = 120$ ,  $k = 1.5$  и  $\eta = 10^{-6}$ . Штриховая линия: гиперцепное приближение с потенциалом (4); сплошная линия: базовое гиперцепное приближение с потенциалом (5)

Из анализа полученных данных для статических структурных факторов можно сделать выводы, аналогичные сделанным для радиальных функций распределения. В частности, при малых плотностях упаковки и параметрах связи оба использованных метода дают практически совпадающие результаты. При этом величина первого пика на статическом структурном

факторе в базовом гиперцепном приближении резко возрастает с увеличением плотности упаковки, а сам он, в отличие от радиальной функции распределения, располагается значительно левее такого же пика в гиперцепном приближении.

Данная работа выполнена в рамках проекта МОН РК 3120/ГФ4 «Самосогласованная модель

статических свойств пылевой плазмы с частицами конечных размеров».

### Заключение

В данной работе были изучены радиальные функции распределения и статические структурные факторы пылевых частиц, рассчитанные разными методами. В частности, расчеты производились в рамках метода базового гиперцепного

приближения с модели твердых заряженных шаров. Было установлено, что для частиц точечных размеров при не слишком больших значениях параметров связи результаты по корреляционным функциям системы не отличаются от обычного гиперцепного приближения с мостиковыми поправками. С увеличением плотности упаковки наблюдаются существенные различия обоих методов, свидетельствующее о необходимости учета конечности размеров пылевых частиц.

### Литература

- 1 Fortov V. E., Morfill G. E. *Complex and Dusty Plasmas: From Laboratory to Space*. – Boca Raton, Florida: CRC Press, 2010. – 440 p.
- 2 Bonitz M., Horing N., Ludwig P. *Introduction to Complex Plasmas*. – Salmon Tower Building, New York City: Springer, 2010. – 450 p.
- 3 Khrapak S., Morfill G. Basic processes in complex (dusty) plasmas: Charging, interaction and ion drag force // *Contrib. Plasma Phys.* – 2009. – Vol. 49. – P. 148-168.
- 4 Shukla P. K. and Eliasson B. Colloquium: Fundamentals of dust-plasma interactions // *Rev. Mod. Phys.* – 2009. – Vol. 81. – P. 25-44.
- 5 Tsyтович V. N. New paradigm for plasma crystal formation // *J. Phys. A: Math. Gen.* – 2006. – Vol. 39 – P. 4501-4509.
- 6 Piel A. Plasma crystals: experiments and simulation // *Plasma Phys. Control. Fusion* – 2017. – Vol. 59. – 014001 (10 p.).
- 7 Dietz C., Thoma M. H. Investigation and improvement of three-dimensional plasma crystal analysis // *Phys. Rev. E* – 2016. – Vol. 94. – 033207 (8 p.).
- 8 Khlert H. and Bonitz M. How Spherical Plasma Crystals Form // *Phys. Rev. Lett.* – 2010. – Vol. 104. – P. 015001 (4 p.).
- 9 Shukla P. K. A survey of dusty plasma physics // *Phys. Plasmas* – 2001. – Vol. 8. – P. 1791-1803.
- 10 Fortov V. E., Khrapak A. G., Khrapak S. A., Molotkov V. I., Petrov O. F. Dusty plasmas // *Physics-Uspekhi*, – 2004. – Vol. 47. – P. 447-492
- 11 Seok J. Y., Koo B. C. and Hirashita H. Dust cooling in supernova remnants in the large magellanic cloud // *Astrophys. J.* – 2015. – Vol. 807. – P. 100-106.
- 12 Fedoseev A.V., Sukhinin G. I., Abdirakhmanov A. R., Dosbolayev M. K. and Ramazanov T. S. Voids in Dusty Plasma of a Stratified DC Glow Discharge in Noble Gases // *Contrib. Plasma Phys.* – 2016. – Vol. 56. – P. 234-239.
- 13 Tolias P., Ratynskaia S., de Angeli M., de Temmerman G., Ripamonti D., Riva G., Bykov I., Shalpegin A., Vignitchouk L., Brochard F., Bystrov K., Bardin S., Litnovsky A. Dust remobilization in fusion plasmas under steady state conditions // *Plasma Phys. Control. Fusion* – 2016. – Vol. 58. – P. 025009 (16 p.).
- 14 Castaldo C., Ratynskaia S., Pericoli V., de Angelis U., Rypdal K., Pieroni L., Giovannozzi E., Mad-daluno G., Marmolino C., Rufoloni A., Tuccillo A., Kretschmer M. and Morfill G. E. Diagnostics of fast dust particles in tokamak edge plasmas // *Nucl. Fusion* – 2007. – Vol. 47. – P. L5-L9.
- 15 Keidar M., Shashurin A., Volotskova O., Stepp M. A., Srinivasan P., Sandler A. and Trink B. Cold atmospheric plasma in cancer therapy // *Phys. Plasmas* – 2013. – Vol. 20. – P. 057101 (8 p.).
- 16 Walk R. M., Snyder J. A., Scrivasan P., Kirch J., Diaz S. O., Blanco F. C., Shashurin A., Keidar M. and Sandler A. D. Cold atmospheric plasma for the ablative treatment of neuroblastoma // *J. Pediatr. Surg.* – 2013. – Vol. 48. – P. 67-73.
- 17 Yousefi R., Davis A.B., Carmona-Reyes J., Matthews L.S., Hyde T.W. Measurement of net electric charge and dipole moment of dust aggregates in a complex plasma // *Phys. Rev. E.* – 2014. – Vol. 90. – P. 033101 (6 p.).
- 18 Ramazanov T.S., Bastykova N.Kh., Ussenov Y.A., Kodanova S.K., Dzhumagulova K.N., Dosbolayev M.K. The Behavior of Dust particles Near Langmuir Probe // *Contrib. Plasma Phys.* – 2012. – Vol. 52. – P. 110-113.
- 19 Bonitz M., Henning C., and Block D. Complex plasmas: a laboratory for strong correlations // *Rep. Prog. Phys.* – 2010. – Vol. 73. – P. 066501 (29 p.).
- 20 Kalman G., Hartmann P., Donko Z., Golden K. J., Kyrkos S. Collective modes in two-dimensional binary Yukawa systems // *Phys. Rev. E* – 2013. – Vol. 87. – P. 043103 (15 p.).
- 21 Khrapak S. A., Thomas H. M., Fluid approach to evaluate sound velocity in Yukawa systems and complex plasmas // *Phys. Rev. E* – 2015. – Vol. 91. – P. 033110 (8 p.).
- 22 Khrapak S. A., Thomas H. M., Filinov, V. S. and Fortov, V. E. and Bonitz, M. and Moldabekov, Zh. Fermionic path-integral Monte Carlo results for the uniform electron gas at finite temperature // *Phys. Rev. E* – 2015. – Vol. 91. – P. 033108 (12 p.).
- 23 Davletov A.E., Arkhipov Yu.V., Tkachenko I.M. Electric charge of dust particles in a plasma // *Contrib. Plasma Phys.* – 2016. – Vol. 56. – P. 308.
- 24 Iyetomi H., Ogata S., Ichimaru S. Bridge functions and improvement on the hypernetted-chain approximation for classical one-component plasmas // *Phys. Rev. A* – 1992. – Vol. 46. – P. 1051.

- 25 Daughton W., Murillo M.S., Thode L. Empirical bridge function for strongly coupled Yukawa systems// *Phys. Rev. E* – 2000. – Vol. 61. – P. 2129.
- 26 Wertheim M.S. Exact solution of the Percus-Yevick integral equation for hard spheres // *Phys. Rev. Lett.* – 1963. – Vol. 10, No 8. – P. 321.
- 27 Lado F. // *Mol. Phys.*– 1976. – Vol. 31. – P. 1117.
- 28 Lado F., Foiles S., Ashcroft N.W. Solutions of the reference-hypernetter-chain equation with minimized free energy// *Phys. Rev. A* – 1983. – Vol. 28. – P. 2374
- 29 Rosenfeld Y. Comment of the variational modified-hypernetted-chain theory for simple liquids// *J. Stat. Phys.* – 1986. – Vol. 42. – P. 437

### References

- 1 V.E. Fortov and G.E. Morfill, *Complex and Dusty Plasmas: From Laboratory to Space* (CRC Press, Florida, USA, 2010), 440 p.
- 2 M. Bonitz and N. Horing, P. Ludwig, *Introduction to Complex Plasmas* (Springer Publishing, New York, 2010), 450 p.
- 3 S. Khrapak and G. Morfill, *Contrib. Plasma Phys.* 49, 148-168, (2009).
- 4 P.K. Shukla and B. Eliasson, *Rev. Mod. Phys.* 81, 25-44, (2009).
- 5 V.N. Tsytovich, *J. Phys. A: Math. Gen.* 39, 4501-4509, (2006).
- 6 A. Piel, *Plasma Phys. Control. Fusion* 59, 014001, (2017).
- 7 C. Dietz and M.H. Thoma, *Phys. Rev. E.* 94, 033207, (2016).
- 8 H. Khlert and M. Bonitz, *Phys. Rev. Lett.* 104, 015001, (2010).
- 9 P.K. Shukla, *Phys. Plasmas* 8, 1791-1803, (2001).
- 10 V.E. Fortov, A.G. Khrapak, S.A. Khrapak, V.I. Molotkov, and O.F. Petrov, *Physics-Uspekhi* 47, 447-492 (2004).
- 11 J.Y. Seok, B.C. Koo and H. Hirashita, *Astrophys. J.* 807, 100-106, (2015).
- 12 A.V. Fedoseev, G.I. Sukhinin, A.R. Abdirakhmanov, M.K. Dosbolayev and T.S. Ramazanov, *Contrib. Plasma Phys.* 56, 234-239, (2016).
- 13 P. Tolias, S. Ratynskaia, M. de Angeli, G. de Temmerman, D. Ripamonti, G. Riva, I. Bykov, A. Shalpegin, L. Vignitchouk, F. Brochard, K. Bystrov, S. Bardin, and A. Litnovsky, *Plasma Phys. Control. Fusion* 58, 025009, (2016).
- 14 C. Castaldo, S. Ratynskaia, V. Pericoli, U. de Angelis, K. Rypdal, L. Pieroni, E. Giovannozzi, G. Mad-dalu no, C. Marmolino, A. Rufoloni, A. Tuceillo, M. Kretschmer and G.E. Morfill, *Nucl. Fusion* 47, L5-L9, (2007).
- 15 M. Keidar, A. Shashurin, O. Volotskova, M.A. Stepp, P. Srinivasan, A. Sandler and B. Trink, *Phys. Plasmas* 20, 057101, (2013).
- 16 R.M. Walk, J.A. Snyder, P. Scrivasan, J. Kirch, S.O. Diaz, F.C. Blanco, A. Shashurin, M. Keidar and A.D. Sandler, *J. Pediatr. Surg.* 48, 67-73, (2013).
- 17 R. Yousefi, A.B. Davis, J. Carmona-Reyes, L.S. Matthews, and T.W. Hyde, *Phys. Rev. E.* 90, 033101, (2014).
- 18 T.S. Ramazanov, N.Kh. Bastykova, Y.A. Ussenov, S.K. Kodanova, K.N. Dzhumagulova, and M.K. Dosbolayev, *Contrib. Plasma Phys.* 52, 110-113, (2012).
- 19 M. Bonitz, C. Henning, and D. Block, *Rep. Prog. Phys.* 73, 066501, (2010).
- 20 G. Kalman, P. Hartmann, Z. Donko, K.J. Golden, and S. Kyrkos, *Phys. Rev. E.* 87, 043103, (2013).
- 21 S.A. Khrapak and H.M. Thomas, *Phys. Rev. E.* 91, 033110, (2015).
- 22 S.A. Khrapak, H.M. Thomas, V.S. Filinov, V.E. Fortov, M. Bonitz, and Zh. Moldabekov, *Phys. Rev. E* 91, 033108, (2015).
- 23 A.E. Davletov, Yu.V. Arkhipov, and I.M. Tkachenko, *Contrib. Plasma Phys.* 56, 308 (2016).
- 24 H. Iyetomi, S. Ogata, and S. Ichimaru, *Phys. Rev. A* 46, 1051, (1992).
- 25 W. Daughton, M.S. Murillo, and L. Thode, *Phys. Rev. E.* 61, 2129, (2000).
- 26 M.S. Wertheim, *Phys. Rev. Lett.* 10, 8, 321, (1963).
- 27 F. Lado *Mol. Phys.* 31, 1117, (1976).
- 28 F. Lado, S. Foiles, and N.W. Ashcroft, *Phys. Rev. A.* 28, 2374, (1983).
- 29 Y. Rosenfeld, *J. Stat. Phys.* 42, 437, (1986).