

ФИЗИКА АТОМНОГО ЯДРА И ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАССОВОГО СПЕКТРА МЕЗОНОВ С УЧЕТОМ НЕЛОКАЛЬНОГО ХАРАКТЕРА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

С.А. Жаугашева

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, НИИЭТФ, г. Алматы

Определены массовые спектры орбитальных и радиальных возбужденных состояний мезонов, состоящих из легко-легких и легко-тяжелых кварков, с учетом релятивистского и нелокального характера взаимодействия. Результаты исследований показывают, что только учет непертурбативного и нелокального характеров взаимодействия позволяют достичь для наклона и параметра пересечения Редже траектории удовлетворительное согласие с экспериментальными данными.

1 Введение

Описание массового спектра адронов с орбитальными и радиальными возбуждениями является одной из фундаментальных проблем сильных взаимодействий. В настоящий момент существуют феноменологические потенциальные модели кварков [1]-[3], которые хорошо описывают массовый спектр адронов. Однако, большинство этих моделей в основном содержат многочисленные параметры, многие из которых физически никак не обоснованы, либо эти модели ограничиваются описанием только конкретных случаев. Кроме того, феноменологические модели кварков в основном описывают физику адронов, состоящих из тяжелых кварков [1]. При изучении свойств адронов, состоящих из легких кварков, требуется учет релятивистского, непертурбативного и нелокального характера взаимодействия. К настоящему времени отсутствует общепринятый рецепт учета релятивистского и нелокального характера взаимодействия в феноменологических моделях кварков. В феноменологической модели кварков, т.е. в нерелятивистском уравнении Шредингера (УШ) нарушается условие релятивистской инвариантности [4].

При определении непертурбативного характера взаимодействия в стандартной КТП обычно сталкиваются с решением интегрального уравнения, типа уравнения Бете-Солпитера с произвольным ядром. Конечно, найти решение такого уравнения очень сложно. Поэтому описание свойств связанного состояния с учетом релятивистского, непертурбативного и нелокального характера взаимодействия требует особого рассмотрения. В КХД, до недавнего времени только в рамках метода правил сумм [5] использовали калибровочно-инвариантный язык конденсатов, чтобы описать вклад непертурбативного характера взаимодействия. Однако, для описания большинства явлений, возникающих на больших расстояниях, этот метод оказывается недостаточным. В работах [8, 9, 10] предложен один из альтернативных вариантов вычисления функционального интеграла и определена масса глюбола. В данной работе с учетом релятивистского и нелокального характеров взаимодействия вычислена массовый спектр мезонов, состоящих из легко-легких и легко-тяжелых кварков, с орбитальным и радиальным возбуждениями, а также определена зависимость конституентной массы составляющих частиц от масс исходного состояния. Вычислены наклон и параметр пересечения Редже траектории для орбитального и радиального возбужденных состояний. Полученные результаты удовлетворительно согласуются с существующими экспериментальными данными.

2 Определение массового спектра мезонов, состоящих из легко-легких кварков

2.1 Определение энергетического спектра линейно растущего потенциала

Запирание цветных зарядов осуществляется с помощью линейно растущего потенциала. Определим $E(\mu)$ - энергетический спектр линейно растущего потенциала, с учетом

орбитального и радиального возбуждения:

$$\left[\frac{1}{2\mu} P^2 + \sigma \cdot r \right] \psi = E(\mu) \psi, \quad (2.1)$$

где σ - натяжение струны. Энергетический спектр и волновая функция определяются из УШ в рамках метода осцилляторного представления (ОП) [11, 12]. Прежде всего, переходим к d -мерному вспомогательному пространству R^d , а гамильтониан взаимодействия представим в нормальной форме по операторам рождения a^+ и уничтожения a (детали см. в [12]):

$$H = H_0 + \varepsilon_0(E) H_I, \quad (2.2)$$

где H_0 - гамильтониан свободного осциллятора:

$$H_0 = \omega (a_j^+ a_j), \quad (2.3)$$

а энергия основного состояния $\varepsilon_0(E)$ в R^d имеет вид:

$$\varepsilon_0(E) = \frac{d\omega}{4} + \frac{4\rho^2 \mu E}{\omega^{2\rho-1}} \cdot \frac{\Gamma(d/2 + 2\rho - 1)}{\Gamma(d/2)} - \frac{4\rho^2 \mu \sigma}{\omega^{3\rho-1}} \cdot \frac{\Gamma(d/2 + 3\rho - 1)}{\Gamma(d/2)} \quad (2.4)$$

и H_I , гамильтониан взаимодействия, представляется в нормальной форме:

$$H_I = \int_0^\infty dx \int \left(\frac{d\eta}{\sqrt{\pi}} \right)^d \exp\{-\eta^2(1+x)\} : e_2^{-i\sqrt{x}\omega(q\eta)} : \left[-\frac{4\rho^2 \mu}{\omega^{2\rho-1}} \cdot - \right] \quad (2.5)$$

Энергетический спектр в R^d определяется следующим образом:

$$\varepsilon_{n_r}(E) = \langle n_r | H | n_r \rangle = \varepsilon_0(E) + 2n_r \omega + \langle n_r | H_I | n_r \rangle \quad (2.6)$$

Матричный элемент $\langle n_r | H_I | n_r \rangle$ имеет вид:

$$\langle n_r | H_I | n_r \rangle = -\frac{4\rho^2 E \mu}{\omega^{2\rho-1}} \frac{\Gamma(d/2 + 2\rho - 1)}{\Gamma(d/2)} \tilde{B} + \frac{4\rho^2 \mu \sigma}{\omega^{3\rho-1}} \frac{\Gamma(d/2 + 3\rho - 1)}{\Gamma(d/2)} \tilde{C} \quad (2.7)$$

Детали вычисления матричного элемента (2.7) приведены в Приложении, а параметры \tilde{B} и \tilde{C} - в (П.5) и (П.6) соответственно. Согласно методу ОП энергетический спектр исходного УШ и частота осциллятора определяются из системы уравнений.

$$\begin{cases} \varepsilon_{n_r}(E) = 0 \\ \frac{\partial \varepsilon_0(E)}{\partial \omega} = 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

Прежде всего, определим энергетический спектр с орбитальным возбуждением. Тогда, учитывая (2.4), из (2.8) для частоты осциллятора ω получаем:

$$\omega^\rho = (\mu\sigma)^{1/3} \cdot \left[\frac{4\rho^2 \Gamma(4\rho + 2\rho l)}{\Gamma(2 + \rho + 2\rho l)} \right]^{1/3}, \quad (2.9)$$

и для энергетического спектра имеем:

$$E(l, 0) = \frac{3}{2} \frac{\sigma^{2/3}}{\mu^{1/3}} \min_\rho \left[\frac{\Gamma(2 + \rho + 2\rho l) \Gamma^2(4\rho + 2\rho l)}{4\rho^2 \Gamma^3(3\rho + 2\rho l)} \right]^{1/3}. \quad (2.10)$$

Учитывая (2.9) и (2.10), для массы связанного состояния получаем (детали см. в [8])

$$M(l, 0) = 2\sqrt{\sigma} \cdot \left[\frac{\Gamma^2(4\rho + 2\rho l) \cdot \Gamma(2 + \rho + 2\rho l)}{\rho^2 \cdot \Gamma^3(3\rho + 2\rho l)} \right]^{1/4}. \quad (2.11)$$

Аналитически определили энергетический спектр и массу связанного состояния с орбитальным возбуждением для растущего потенциала. Далее приступаем к определению

массового спектра с орбитальным и радиальным возбуждениями. После некоторых упрощений для частоты осциллятора, с учетом радиального возбуждения, имеем:

$$\omega_{n_r}^\rho = \omega^\rho \cdot D_1^{1/3}, \quad (2.12)$$

где ω^ρ представлена в (2.9). Для энергетического спектра получаем:

$$E(l, n_r) = \frac{\sigma^{2/3}}{\mu^{1/3}} \min_\rho \left[\frac{D_4^3 \Gamma(2 + \rho + 2\rho l) \Gamma^2(4\rho + 2\rho l)}{32 \cdot \rho^2 \Gamma^3(3\rho + 2\rho l) D_1} \right]^{1/3}. \quad (2.13)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{\rho + (3\rho - 1)\tilde{B} - (2\rho - 1)\tilde{C}}{\rho + (2\rho - 1) \cdot \frac{2n_r}{1 + \rho + 2\rho l} + \frac{1}{2}\tilde{B}}, \\ D_2 &= \left(1 + \frac{4n_r}{1 + \rho + 2\rho l} \right) \cdot \frac{1}{1 + \tilde{B}}, \\ D_3 &= \frac{1 + \tilde{C}}{1 + \tilde{B}}, \quad D_4 = D_2 D_1 + 2D_3. \end{aligned} \quad (2.14)$$

В этом случае, масса связанного состояния определяется в виде:

$$M(l, n_r) = 2\sqrt{\sigma} \left[\frac{\Gamma^2(4\rho + 2\rho l) \Gamma(2 + \rho + 2\rho l) D_4^3}{27 D_1 \rho^2 \Gamma^3(3\rho + 2\rho l)} \right]^{1/4}. \quad (2.15)$$

Таким образом, аналитически определили массу связанного состояния с орбитальным и радиальным возбуждениями мезонов, состоящих из легких кварков, для растущего потенциала, при условии

$$\frac{m_u}{\sqrt{\sigma}} \cong \frac{m_d}{\sqrt{\sigma}} \ll 1,$$

где m_u и m_d - массы легких кварков.

2.2 Определение энергетического спектра кулон плюс растущего потенциала

Теперь приступим к определению энергетического спектра кулон плюс растущий потенциал с учетом орбитального и радиального возбуждения из УШ

$$\left[\frac{1}{2\mu} P^2 + \sigma \cdot r - \frac{4\alpha_s}{3r} \right] \psi = E(\mu) \psi. \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(E) &= \frac{d\omega}{4} + \frac{4\rho^2 \mu \sigma}{\omega^{3\rho-1}} \frac{\Gamma(d/2 + 3\rho - 1)}{\Gamma(d/2)} - \frac{4\rho^2 \mu E}{\omega^{2\rho-1}} \times \\ &\frac{\Gamma(d/2 + 2\rho - 1)}{\Gamma(d/2)} - \frac{16\alpha_s \rho^2 \mu}{3\omega^{\rho-1}} \frac{\Gamma(d/2 + \rho - 1)}{\Gamma(d/2)}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

и гамильтониан взаимодействия:

$$\begin{aligned} H_I &= \int_0^\infty dx \int \left(\frac{d\eta}{\sqrt{\pi}} \right)^d \exp\{-\eta^2(1+x)\} : e^{-2i\sqrt{x}\omega} : \times \\ &\left[-\frac{4\rho^2 \mu \sigma}{\omega^{3\rho-1}} \frac{x^{-3\rho}}{\Gamma(1-3\rho)} - \frac{4\rho^2 \mu E}{\omega^{2\rho-1}} \frac{x^{-2\rho}}{\Gamma(1-2\rho)} - \frac{16\alpha_s \rho^2 \mu}{3\omega^{\rho-1}} - \frac{16\alpha_s \rho^2 \mu}{3\omega^{\rho-1}} \frac{x^{-\rho}}{\Gamma(1-\rho)} \right]. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Проводя вычисление, аналогично проделанным в предыдущих пунктах, и учитывая представление (2.8), определим энергетический спектр с учетом орбитального возбуждения:

$$\frac{E(l, 0)}{\sqrt{\sigma}} = \min_\rho \left[\frac{z^2}{8\rho^2 x} \frac{\Gamma(2 + \rho + 2\rho l)}{\Gamma(3\rho + 2\rho l)} + \frac{\Gamma(4\rho + 2\rho l)}{z\Gamma(3\rho + 2\rho l)} - \frac{4\alpha_s z}{3} \frac{\Gamma(2\rho + 2\rho l)}{\Gamma(3\rho + 2\rho l)} \right]. \quad (2.19)$$

Здесь параметры z и x определяются из уравнения:

$$z^3 - z^2 \frac{16x\alpha_s \rho^2 \Gamma(2\rho + 2\rho l)}{3 \cdot \Gamma(2 + \rho + 2\rho l)} - \frac{4x\rho^2 \Gamma(4\rho + 2\rho l)}{\Gamma(2 + \rho + 2\rho l)} = 0 \quad (2.20)$$

и

$$2 + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{E}{\sqrt{x}} \right) = 0. \quad (2.21)$$

Масса и конstituентная масса параметризованы в следующем виде:

$$\mu = \sqrt{\alpha x} \quad M = 2\mu + E. \quad (2.22)$$

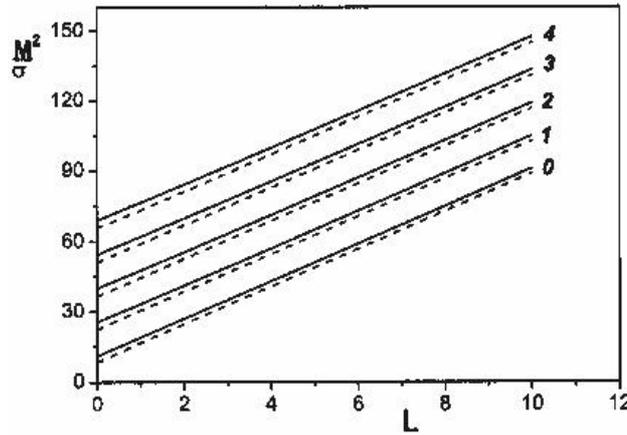
В этом случае энергетический спектр с орбитальным и радиальным возбуждениями, после некоторых упрощений, для кулон плюс растущий потенциал имеет вид:

$$\frac{E(l, n_r)}{\sqrt{\sigma}} = \min_{\rho} \left[\frac{z^2 (2 + \rho + 2\rho l)}{8x\rho^2 \Gamma(3\rho + 2\rho l)} \cdot \frac{1 + \frac{4n_r}{1 + \rho + 2\rho l}}{1 + \tilde{B}} + \frac{1}{z} \cdot \frac{\Gamma(4\rho + 2\rho l)}{\Gamma(3\rho + 2\rho l)} \cdot \frac{1 + \tilde{C}}{1 + \tilde{B}} - \frac{4\alpha_s z}{3} \cdot \frac{\Gamma(2\rho + 2\rho l)}{\Gamma(3\rho + 2\rho l)} \cdot \frac{1 + \tilde{D}}{1 + \tilde{B}} \right] \quad (2.23)$$

Параметр z определяется из уравнения:

$$z^3 - z^2 x \frac{16\alpha_s \rho^2}{3} \frac{\Gamma(2\rho + 2\rho l)}{\Gamma(2 + \rho + 2\rho l)} \times \frac{[\rho + (2\rho - 1)\tilde{D} - (\rho - 1)\tilde{B}]}{\left[\rho + (2\rho - 1) \frac{2n_r}{1 + \rho + 2\rho l} + \frac{1}{2} \tilde{B} \right]} - 4x\rho^2 \times \frac{\Gamma(4\rho + 2\rho l)}{\Gamma(2 + \rho + 2\rho l)} \frac{[\rho + (3\rho - 1)\tilde{B} - (2\rho - 1)\tilde{C}]}{\left[\rho + (2\rho - 1) \frac{n_r}{1 + \rho + 2\rho l} + \frac{1}{2} \tilde{B} \right]} = 0, \quad (2.24)$$

а параметр x из уравнения (2.21), явный вид параметров, \tilde{B} , \tilde{C} и \tilde{D} приведены в Приложении. В приближении (2.15) определили массовый спектр мезонов состоящих из легко-легких кварков. Масса и конstituентная масса связанного состояния определяются из (2.22).



Сплошные линии соответствуют растущему потенциалу, а пунктирные – кулон плюс растущему потенциалу

Рис.1. Зависимость квадрата масс мезонов, состоящих из легко-легких кварков, определенных в единицах σ , от l при значении $n_r = 0, \dots, 4$

На рис. 1 представлена зависимость квадрата массового спектра от орбитального квантового числа при различных значениях радиального квантового числа $n_r = 0, \dots, 4$. где константа сильного взаимодействия $\alpha_s = 0.39$. Из (2.15), (2.19) и (2.23) видно, что энергетический спектр и масса связанного состояния определены в $\sqrt{\sigma}$ единицах, где σ - натяжение струны,

который является единственным параметром в нашем методе [9, 10]. По многочисленным результатам описания экспериментальных и решеточных данных значения натяжения струны равно: $\sigma = 0.19 GeV^2$. При малых значениях $l \leq 5$ зависимость M^2 / σ от l является линейной и может быть аппроксимирована в виде: для растущего потенциала:

$$\frac{M^2(l,0)}{\sigma} = 8l + 3.5\pi, \quad (2.25)$$

для кулон плюс растущего потенциала:

$$\frac{M^2(l,0)}{\sigma} = 8l + 2.64\pi, \quad (2.26)$$

Параметр наклона Редже l траектории при $l \leq 5$ экспериментально определен в [13]-[19] и равен:

$$\begin{aligned} \alpha'_{L(\text{exp})} &= 0.81 \pm 0.01 GeV^2, \\ \alpha'_{L(\text{exp})} &= 0.658 GeV^{-2}, \end{aligned} \quad (2.27)$$

а в нашем случае (для обоих видов потенциала он является одинаковым) т.е. ниже, чем эксперимент. Экспериментальное значение параметра пересечения Редже l - траектории [13]-[19]:

$$\alpha_{L(\text{exp})}(0) = -0.30 \pm 0.02, \quad (2.28)$$

у нас для растущего потенциала $\alpha_L(0) = -1.374$ и для кулон плюс растущего потенциала $\alpha_L(0) = -1.037$, т.е. в этом случае по модулям наши результаты больше, чем экспериментальные. Поведение Редже n_r - траектории параметризуется в виде [14]:

$$M^2(l, n_r) = M^2(l, 0) + \Omega n_r. \quad (2.29)$$

Параметр Ω определен из эксперимента для состояний $n_r = 1, 2, 3$ [17]-[19] в интервале $\Omega_{\text{exp}} = 1.6 \div 1.38 GeV^2$. При значении натяжения струны $\sigma = 0.19 GeV^2$ для растущего потенциала определено среднее значение параметра $\Omega = 2.7056 GeV^2$, а для кулон плюс растущего потенциала $\Omega = 2.656 GeV^2$, Таким образом, полученные результаты без учета непертурбативного и нелокального характера взаимодействия для наклона и параметра пересечения Редже траектории имеют неудовлетворительное согласие с экспериментальными данными.

3 Определение массового спектра связанного состояния с учетом нелокальности взаимодействия

3.1 Модифицированный потенциал взаимодействия

В потенциальном подходе считают, что конфайнмент цветных объектов может быть объяснен только вне рамок теории возмущений, и что он связан с возникновением линейно растущего кварк-кваркового потенциала или кварк-антикварковой струны в результате непертурбативного (нелинейного) взаимодействия глюонов. Однако, при описании поведения адронов, состоящих из легких кварков, необходим учет эффектов, возникающих на больших расстояниях. Очевидно, что процессы конфайнмента и адронизации кварков происходят на одних и тех же расстояниях. В настоящий момент переход на большие расстояния осуществляется двумя способами: введением корреляционной длины T_g глюонного вакуума или введением радиуса конфайнмента r_c , связанного с расстоянием между составляющими (кварками) в адроне (детали см. в [14]). В данной работе нелокальный характер взаимодействия учитывается введением радиуса конфайнмента. Естественно, поведение кварков и глюонов определяется пропагаторами, в частности, для кварков - Дирака, а для глюона - Клейна-Гордона. КХД полностью описывает поведение

кварков и глюонов, и на малых расстояниях кварки становятся почти свободными. Это экспериментально подтверждено. Поэтому при малых расстояниях, в области деконфайнмента, поведение пропагатора кварков и глюонов соответствует плоским волнам. Конечно, эти пропагаторы, соответствующие плоским волнам, не могут правильно описать свойства частиц в области конфайнмента, т.е. на больших расстояниях. В связи с этим, пропагаторы кварков и глюонов в области конфайнмента определяются в рамках нелокальной квантовой теории поля [22]. В работе [23] в рамках нелокальной КТП было показано, что пропагаторы конститuentных частиц (кварков и глюонов) являются целыми аналитическими функциями гауссовского типа в импульсном пространстве. В частности, пропагаторы безмассовых частиц определены в Евклидовом пространстве в виде:

$$\tilde{D}(p^2) = \frac{1}{p^2} \left(1 - \exp \left\{ -\frac{p^2}{2\Lambda^2} \right\} \right) \Rightarrow \frac{1}{p^2} \quad \text{at } \Lambda \rightarrow 0 \quad (3.30)$$

или в координаторном представлении:

$$D(y) = \int \frac{d^4 \rho}{(2\pi)^4} \exp\{i(\rho y)\} \tilde{D}(p^2) = \frac{1}{4\pi^2 y^2} \exp \left\{ -\frac{\Lambda^2 y}{2} \right\}. \quad (3.31)$$

Здесь $y = (y, y_4)$, $y \in R^3$, $y_4 \in R^1$. Параметр Λ определяет шкалу конфайнмента, $r_c = \frac{1}{\Lambda}$ - радиус конфайнмента. Когда взаимодействие между составляющими частицами в связанном состоянии осуществляется обменом безмассовых частиц с пропагатором (3.30), то потенциал в нерелятивистском пределе определяется следующим образом:

$$V_{\text{mod}}(r) = g^2 \int_{-\infty}^{\infty} du D(r^2 + u^2) = \frac{\alpha_s}{r} \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{r\Lambda/\sqrt{2}} ds \cdot e^{-s^2} \right], \quad (3.32)$$

и при $\Lambda \rightarrow 0$ из (3.31) получаем стандартный кулоновский потенциал.

Согласно (3.30) пропагатор, который приводит к линейно растущему потенциалу, представим в виде:

$$\tilde{D}(p^2) = \frac{1}{p^4} \left(1 - 2 \exp \left\{ -\frac{p^2}{2\Lambda^2} \right\} + \exp \left\{ -\frac{p^2}{\Lambda^2} \right\} \right) \frac{1}{p^4} \quad \text{at } \Lambda \rightarrow 0 \quad (3.33)$$

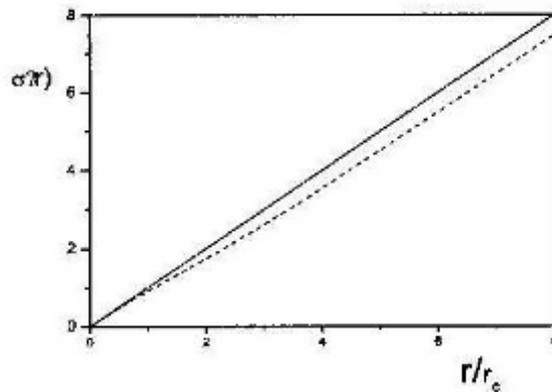


Рис. 2. Зависимость модифицированного потенциала от радиуса конфайнмента r/r_c для основного состояния.

Проводя аналогичные вычисления, представленные выше из (3.33) для модифицированного линейно растущего потенциала получаем

$$V_{\text{mod}}(r) = \sigma r \left\{ 1 - \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{\pi} r \Lambda} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} \left(\frac{1}{t} - 1 \right) \times \left[\exp \left(-\frac{r^2 \Lambda^2}{4} t \right) - \exp \left(-\frac{r^2 \Lambda^2}{2} t \right) \right] \right\} \equiv \sigma(r) \cdot r, \quad (3.34)$$

и при $\Lambda \rightarrow 0$ из (3.34) получаем стандартный линейного растущей потенциал. В работе [14] модифицированный линейный потенциал определен в следующем виде:

$$\sigma(r) = \sigma_0 \left[1 - \gamma \frac{\exp(\sqrt{\sigma_0}(r - R_1))}{B + \exp(\sqrt{\sigma_0}(r - R_1))} \right], \quad (3.35)$$

где γ , R_1 и B - являются дополнительными свободными параметрами. При следующих значениях этих параметров [14]

$$\sigma_0 = 0.185 \pm 0.005 \text{ GeV}^2, \quad \gamma = 0.40, \quad R_1 = 6 \text{ GeV}^-, \quad B = 20.0, \quad (3.36)$$

получено хорошее согласие с экспериментальным результатом для массового спектра мезонов.

Таким образом, модифицированный потенциал отличается от линейного или кулоновского потенциала. Это отклонение связано с нелокальным характером взаимодействия. На рисунке 2. представлена зависимость линейно растущего потенциала и соответствующие ее модифицированные варианты. Модифицированный потенциал изображен дискретными линиями. Из рис. 2. видно, что с возрастанием радиуса (в единицах $r_c = 1/\Lambda$ - радиус конфайнмента) отличия модифицированного и немодифицированного потенциалов увеличивается.

3.2 Определение энергетического спектра связанного состояния с модифицированным потенциалом

Определим массу и конституентную массу составляющих частиц, с учетом размерного (нелокального) эффекта. В этом разделе приведем детали вычисления энергетического спектра с учетом нелокального характера взаимодействия. Основной вклад при определении масс и конституентных масс связанного состояния в рамках нашего подхода определяется вкладом растущего потенциала, а вклад, других поправок, которые связаны с различным характером взаимодействия, является малым. Рассмотрим УШ с модифицированным потенциалом:

$$\left[\frac{1}{2\mu} P^2 + \sigma(r) \cdot r \right] \psi(r) = E(\mu) \psi(r), \quad (3.37)$$

где потенциал взаимодействия представлен в (3.34). Из (3.37) определяем энергетический спектр E с помощью метода ОП. В этом случае энергия основного состояния в R^d имеет вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(E) = & \frac{d\omega}{4} + \frac{4\rho^2 \mu \sigma}{\omega^{3\rho-1}} \cdot \frac{\Gamma(d/2 + 3\rho - 1)}{\Gamma(d/2)} - \\ & - \frac{4\rho^2 \mu E}{\omega^{2\rho-1}} \cdot \frac{\Gamma(d/2 + 2\rho - 1)}{\Gamma(d/2)} - \frac{2\sigma\rho^2 \mu}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(j+1)} \times \\ & \times \frac{1}{(2j+1)(2j+3)} \left(1 - \frac{1}{2^{(1+j)}} \right) \left(\frac{\Lambda}{\sqrt{2}} \right)^{2j+1} \frac{\Gamma(d/2 + 4\rho + 2j\rho - 1)}{\omega^{4\rho+2j\rho-1} \Gamma(d/2)} \end{aligned} \quad (3.38)$$

и для гамильтониана взаимодействия, который представлен в нормальной форме, получаем

$$\begin{aligned} H_I = & \int_0^{\infty} dx \int \left(\frac{d\eta}{\sqrt{\pi}} \right)^d \exp\{-\eta^2(1+x)\} : e_2^{-2i\sqrt{x}\omega} : \\ & \times \left[\frac{4\rho^2 \mu \sigma}{\omega^{3\rho-1}} \frac{x^{-3\rho}}{\Gamma(1-3\rho)} - \frac{4\rho^2 \mu E}{\omega^{2\rho-1}} \frac{x^{-2\rho}}{\Gamma(1-2\rho)} - \frac{2\sigma\rho^2 \mu}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(j+1)} \times \frac{1}{(2j+1)(2j+3)} \left(1 - \frac{1}{2^{(1+j)}} \right) \left(\frac{\Lambda}{\sqrt{2}} \right)^{2j+1} \frac{x^{-4\rho-2j\rho}}{\omega^{4\rho+2j\rho-1} \Gamma(1-4\rho-2j\rho)} \right] \end{aligned} \quad (3.39)$$

После некоторых упрощений, аналогично проделанных в разделе 3.1, для энергетического спектра имеем:

$$\begin{aligned} \frac{E(l, n_r)}{\sqrt{\sigma}} = \min_{\rho} & \left[\frac{z^2}{8\rho^2 y} \frac{\Gamma(2+\rho+2\rho l)}{\Gamma(3\rho+2\rho l)} \frac{1+\frac{4n_r}{(1+\rho+2\rho l)}}{1+\tilde{B}} + \frac{1}{z} \frac{\Gamma(4\rho+2\rho l)}{\Gamma(3\rho+2\rho l)} \frac{1+\tilde{C}}{1+\tilde{B}} - \right. \\ & \frac{1}{z^2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(j+1)(2j+1)(2j+3)} \left(1 - \frac{1}{2^{(1+j)}} \right) \times \\ & \left. \left(\frac{\Lambda}{\sqrt{2\sigma}} \right)^{2j+1} \frac{1}{z^{2j}} \frac{\Gamma(5\rho+2j\rho+2\rho l)}{\Gamma(3\rho+2\rho l)} \frac{1+\tilde{W}_j}{1+\tilde{B}} \right], \end{aligned} \quad (3.40)$$

где параметр z определяется из уравнения:

$$\begin{aligned} z^3 - \frac{4\rho^2 y \Gamma(4\rho+2\rho l)}{\Gamma(2+\rho+2\rho l)} \frac{A1(\rho)}{A0(\rho)} + \frac{4y\rho^2}{\sqrt{\pi} \Gamma(2+\rho+2\rho l)} \times \\ \times \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(j+1)(2j+1)(2j+3)} \left(1 - \frac{1}{2^{(1+j)}} \right) \left(\frac{\Lambda}{\sqrt{2\sigma}} \right)^{2j+1} \frac{A2(\rho, j)}{A0(\rho)} = 0, \end{aligned} \quad (3.41)$$

где использованы обозначения

$$\begin{aligned} A0(\rho) &= \rho + (2\rho - 1) \frac{2n_r}{1+\rho+2\rho l} + \frac{1}{2} \tilde{B}; \\ A1(\rho) &= \rho + (3\rho - 1) \tilde{B} - (2\rho - 1) \tilde{C}; \\ A2(\rho, j) &= 2\rho + 2j\rho + (4\rho + 2j\rho - 1) \tilde{B} - (2\rho - 1) \tilde{W}_j, \end{aligned} \quad (3.42)$$

а \tilde{W}_j равен:

$$\tilde{W}_j = \frac{\Gamma(1+n_r)}{\Gamma(n_r+d/2)} \frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma(1-4\rho-2j\rho)} \times \sum_{k=2}^{2n_r} (-1)^k A_{n_r}(k) \frac{\Gamma(1+k-4\rho-2j\rho)}{\Gamma(k+d/2)}, \quad (3.43)$$

\tilde{B} , \tilde{C} и $A_{n_r}(k)$ представлены в (П.5), и (П.7) соответственно, а также в (3.40) и (3.41) параметр $x = \mu/\sqrt{\sigma}$. Приступим к вычислению энергетического спектра модифицированного потенциала с учетом одноглюонного обмена. Рассмотрим УШ:

$$\left[\frac{1}{2\mu} P^2 + \sigma(r) \cdot r - \frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} \right] \psi(r) = E(\mu) \psi(r), \quad (3.44)$$

где $\sigma(r)$ представлен в (3.38). С помощью ОП, из (3.44), определен энергетический спектр. Здесь после некоторых упрощений получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(E) &= \frac{d\omega}{4} + \frac{4\rho^2 \mu \sigma_0}{\omega^{3\rho-1}} \frac{\Gamma(d/2+3\rho-1)}{\Gamma(d/2)} - \frac{4\rho^2 \mu E}{\omega^{2\rho-1}} \frac{\Gamma(d/2+2\rho-1)}{\Gamma(d/2)} - \frac{16\alpha_s \rho^2 \mu}{3\omega^{\rho-1}} \times \\ & \times \frac{\Gamma(d/2+\rho-1)}{\Gamma(d/2)} - \frac{8\sigma_0 \rho^2 \mu}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j} \times \frac{1}{2j+1} \left(\frac{\Lambda}{\sqrt{2}} \right)^{2j+1} \frac{\Gamma(d/2+4\rho+2j\rho-1)}{\omega^{4\rho+2j\rho-1} \Gamma(d/2)} \end{aligned} \quad (3.45)$$

и для гамильтониана взаимодействия:

$$H_I = \int_0^\infty dx \int \left(\frac{d\eta}{\sqrt{\pi}} \right)^d \exp\{-\eta^2(1+x)\} : e_2^{-2i\sqrt{x}\omega} : \times \left[\frac{4\rho^2 \mu \sigma_0}{\omega^{3\rho-1}} \frac{x^{-3\rho}}{\Gamma(1-3\rho)} - \frac{4\rho^2 \mu E}{\omega^{2\rho-1}} \frac{x^{-2\rho}}{\Gamma(1-2\rho)} - \frac{16\alpha_s \rho^2 \mu}{3\omega^{\rho-1}} \frac{x^{-\rho}}{\Gamma(1-\rho)} - \frac{8\sigma_0 \rho^2 \mu}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j} \times \frac{1}{2j+1} \left(\frac{\Lambda}{\sqrt{2}} \right)^{2j+1} \frac{x^{-4\rho+2j\rho}}{\omega^{4\rho+2j\rho-1} \Gamma(1-4\rho-2j\rho)} \right]. \quad (3.46)$$

Из системы уравнений (2.8) определяем энергию исходной системы и частоту осциллятора. При этом энергетический спектр:

$$\frac{E(l, n_r)}{\sqrt{\sigma}} = \frac{z^2}{8\rho^2 x} \frac{\Gamma(2+\rho+2\rho l)}{\Gamma(3\rho+2\rho l)} \times \frac{1+4n_r/(1+\rho+2\rho l)}{1+\tilde{B}} + \frac{1}{z} \frac{\Gamma(4\rho+2\rho l)}{\Gamma(3\rho+2\rho l)} \frac{1+\tilde{C}}{1+\tilde{B}} - \frac{4\alpha_s z}{3} \frac{\Gamma(2\rho+2\rho l)}{\Gamma(3\rho+2\rho l)} \frac{1+\tilde{D}}{1+\tilde{B}} - \frac{2}{z^2 \sqrt{\pi}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j} \times \frac{1}{2j+1} \left(\frac{\Lambda}{\sqrt{2\sigma}} \right)^{2j+1} \frac{1}{z^{2j}} \frac{\Gamma(5\rho+2j\rho+2\rho l)}{\Gamma(3\rho+2\rho l)} \frac{1+\tilde{W}_j}{1+\tilde{B}}. \quad (3.47)$$

Здесь параметр z , который связан с частотой осциллятора, $z = \omega^\rho / \sqrt{\sigma}$ определяется из уравнения:

$$1 - \frac{16x\rho^2 \alpha_s \Gamma(2\rho+2\rho l)}{3z \cdot \Gamma(2+\rho+2\rho l)} \frac{[\rho+(2\rho-1)\tilde{D}-(\rho-1)\tilde{B}]}{\left[\rho+(2\rho-1) \frac{2n_r}{1+\rho+2\rho l} + \frac{1}{2} \tilde{B} \right]} - \frac{4x\rho^2 \Gamma(4\rho+2\rho l)}{z^3 \Gamma(2+\rho+2\rho l)} \frac{[\rho+4(3\rho-1)\tilde{B}-(2\rho-1)\tilde{C}]}{\left[\rho+(2\rho-1) \frac{2n_r}{1+\rho+2\rho l} + \frac{1}{2} \tilde{B} \right]} + \frac{8x\rho^2}{z^4 \sqrt{\pi}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j(2j+1)z^{2j}} \left(\frac{\Lambda}{\sqrt{2\sigma}} \right)^{2j+1} \frac{\Gamma(5\rho+2j\rho-1)}{\Gamma(2+\rho+2\rho l)} \times \frac{[2\rho+2j\rho+(4\rho+2j\rho-1)\tilde{B}-(2\rho-1)\tilde{W}_j]}{\left[\rho+(2\rho-1) \frac{2n_r}{1+\rho+2\rho l} + \frac{1}{2} \tilde{B} \right]} = 0. \quad (3.48)$$

На основе полученных выражений определены масса и конституентная масса составляющих частиц с учетом глюонного распределения для растущего и кулон плюс растущего потенциалов.

Приложение

Вычисление матричного элемента $\langle n_r | H_I | n_r \rangle$ для различных видов потенциалов

В этом пункте представим некоторые детали вычисления матричного элемента $\langle n_r | H_I | n_r \rangle$. Прежде всего, вычислим матричный элемент для линейно растущего потенциала. Гамильтониан взаимодействия представлен в (2.5) и соответствующий матричный элемент записывается в виде:

$$\langle n_r | H_I | n_r \rangle = \int_0^\infty dx \int \left(\frac{d\eta}{\sqrt{\pi}} \right)^d e^{-\eta^2(1+x)} \times \left[-\frac{4\rho^2 E \mu}{\omega^{2\rho-1}} \frac{x^{-2\rho}}{\Gamma(1-2\rho)} + \frac{4\rho^2 \sigma \mu}{\omega^{3\rho-1}} \frac{x^{-3\rho}}{\Gamma(1-3\rho)} \right] \times \langle n_r | : e_2^{-2i\sqrt{x}\omega(qn)} : | n_r \rangle. \quad (П.1)$$

Из (П.1) видно, что для вычисления матричного элемента $\langle n_r | H_I | n_r \rangle$, нам нужно определить величину:

$$T_n(x) = \int \left(\frac{d\eta}{\sqrt{\pi}} \right)^d e^{-\eta^2(1+x)} \langle n | : e_2^{-2i\sqrt{x}\omega(qn)} : | n \rangle. \quad (\text{П.2})$$

После некоторых упрощений, из (П.2), получаем

$$T_n(k) = \sum_{k=2}^{2n} \sum_{s=0}^n (-1)^k \frac{x^k}{(1+x)^{k+d/2}} \cdot \frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(n+d/2)} \times \\ \times \frac{2^{2s-k}}{\Gamma(n-s+1)} \cdot \frac{\Gamma(k+n-s+d/2)}{\Gamma^2(k-s+1)\Gamma(2s-k+1)}. \quad (\text{П.3})$$

Подставляя (П.4) в (П.1) и проводя интегрирование по x , из (П.1), имеем:

$$\langle n_r | H_I | n_r \rangle = -\frac{4\rho^2 E \mu \Gamma(d/2+2\rho-1)}{\omega^{2\rho-1} \Gamma(d/2)} \tilde{B} + \\ + \frac{4\rho^2 \sigma \mu \Gamma(d/2+3\rho-1)}{\omega^{3\rho-1} \Gamma(d/2)} \tilde{C}. \quad (\text{П.4})$$

Здесь введено обозначение

$$\tilde{B} = \frac{\Gamma(1+n_r)}{\Gamma(n_r+d/2)} \frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma(1-2\rho)} \times \sum_{k=2}^{2n_r} (-1)^k A_{n_r}(k) \frac{\Gamma(1+k-2\rho)}{\Gamma(k+d/2)} \quad (\text{П.5})$$

и

$$\tilde{C} = \frac{\Gamma(1+n_r)}{\Gamma(n_r+d/2)} \frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma(1-3\rho)} \times \sum_{k=2}^{2n_r} (-1)^k A_{n_r}(k) \frac{\Gamma(1+k-3\rho)}{\Gamma(k+d/2)}, \quad (\text{П.6})$$

где

$$A_{n_r}(k) = \sum_{s=1}^{n_r} \frac{2^{2s-k}}{\Gamma(n_r-s+1)} \frac{\Gamma(k+n_r-s+d/2)}{\Gamma^2(k-s+1)\Gamma(2s-k+1)}, \quad (\text{П.7})$$

Аналогичным образом вычисляется матричный элемент $\langle n_r | H_I | n_r \rangle$ для других потенциалов.

Далее приступим к вычислению матричного элемента $\langle n_r | H_I | n_r \rangle$ для потенциала кулон плюс растущего потенциала. В этом случае после некоторых аналогичных упрощений имеем:

$$\langle n_r | H_I | n_r \rangle = -\frac{4\rho^2 E \mu \Gamma(d/2+2\rho-1)}{\omega^{2\rho-1} \Gamma(d/2)} \tilde{B} + \frac{4\rho^2 \sigma \mu}{\omega^{3\rho-1}} \times \\ \times \frac{\Gamma(d/2+3\rho-1)}{\Gamma(d/2)} \tilde{C} - \frac{16\rho^2 \alpha_s \mu \Gamma(d/2+\rho-1)}{3\omega^{\rho-1} \Gamma(d/2)} \tilde{D}, \quad (\text{П.8})$$

где

$$\tilde{D} = \frac{\Gamma(1+n_r)}{\Gamma(n_r+d/2)} \frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma(1-\rho)} \times \sum_{k=2}^{2n_r} (-1)^k A_{n_r}(k) \frac{\Gamma(1+k-\rho)}{\Gamma(k+d/2)}. \quad (\text{П.9})$$

Используя (П.8) определили энергетический спектр для различных гамильтонианов с орбитальным и радиальным возмущениями.

Литература

1. Quigg C. And Rosner J.L. // Phys.Rev.56, p.167(1990).
2. Быков А.А., Дремин И.М., Леонидов А.В. // УФН. 143, с.3(1984).
3. Godfrey S. and Isgur N., Phys. Rev. D.32, p.189(1985); Isgur N. and Wise M., Phys. Lett. B.232, p.113(1984); Phys. Lett. B.1990. V. 237. P.527.
4. Бьеркен Дж.Д., Дрелл С.Д.// Релятивистская квантовая теория. Москва, 2000.
5. Shifman M.A., Vainshtain A.I., Zakharov V.I. // Nucl. Phys. B.147, 1979.

6. Dineykhon M, Zhaugasheva S.A., Toinbaeva N.Sh. and Jakhanshir A., J. Phys. B: At.Mol.Opt.Phys.42 145001, 2009.
7. Dineykhon M, Zhaugasheva S.A., Toinbaeva N.Sh., Jour. Phys. B: At.Mol.Opt.Phys.43, p.015003 (7pp) (2010).
8. Dineykhon M., Zhaugasheva S.A., T.A. Kozhamkulov, Ye. Petrov. Few-Body Systems, 37, p. 49-69(2005).
9. Dineykhon M, G.V. Efimov, Ganbold G. and Nedelko S.N., Oscillator representation in quantum physics, (Lecture Notes in Physics, Springer-Verlag, Berlin, 1995), v.26.
10. Dineykhon M, G.V. Efimov, G.V.: Rep. Math. Phys. 36, 287 (1995); Yad. Fiz.59, 862 (1996); Dineykhon M.: Z. Phys D41, p.77 (1977).
11. Badalian A.M. and Bakker B.L.G., Phys. Rev. D66, 034025(2002).
12. Badalian A.M., Bakker B.L.G. and Siminov Yu.A. Phys.Rev.D66, p.034026 (2002).
13. Tang A. and Norbury J.W., Phys. Rev. D.62., p.016006 (2002.).
14. Hagiwara K. et al. Particle Data Group. Phys. Rev. D.66, p.010001(2002).
15. Abele A. et al., Phys. Lett. B.423, p.175(1998); Amsler C., Rev.Mod. Phys. 70, p.1293(1998).
16. Anisovish A.V. et al., Phys. Rev. D.62, p.051505(2000); Anisovish V.V., hep-ph/0110326
17. Bugg D.V. et al., Phys.Lett. B.353, p.378(1998); Anisovish A.V. et al., Nucl. Phys. A.662, p.319(2000).
18. Динейхан М., Жаугашева С.А., Каримжан К., Письма в ЭЧАЯ., 6(154), с.636-654(2009).
19. Siminov Yu.A., Phys.Lett.B.515, p.137(2001).
20. Ефимов Г.В., Нелокальные взаимодействия квантовых полей, изд. М.:Наука, 1977.
21. Efimov G.V. and Nedelko S.N., Phys. Rev.D.51., p.176(1995); idid., 54, p.4483(1996).

ӘСЕРЛЕСУДІҢ БЕЙЛОКАЛЬДЫҚ СИПАТТЫҢ ЕСКЕРІП МЕЗОНДАРДЫҢ МАССАЛЫҚ СПЕКТРІН АНЫҚТАУ

С.А. Жаугашева

Әсерлесудің релятивистік және бейлокальдық сипаттарын ескеріп жеңіл-жеңіл және жеңіл-ауыр кварктардан тұратын мезондардың орбиталдық және радиалды қозған күйлерінің массалық спектрлері анықталды. Біздің алған нәтижелеріміз көрсеткендей бейпертурбативті және бейлокальды әсерлесу сипаттарын ескергенде ғана Редже траекториясының қиылысу параметрі және қисығы тәжірбиелік мәндермен жақсы үйлесімдікте болады.

DEFINITION OF THE MASS SPECTRUM OF THE MESONS IN VIEW OF NONLOCALITY CHARACTER OF INTERACTION

S.A. Zhaugasheva

Taking into account nonperturbative and nonlocality character of interactions, the mass spectrum of the mesons consisting of the light-light and light-heavy quarks with orbital and radial excitations, is determined. Our results show, that good agreement with the experimental data for the slope and the intercept of the Regge trajectory can be obtained, only taking into account the nonperturbative and the nonlocality character of interactions.