ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕПЕРТУРБАТИВНЫХ И РЕЛЯТИВИСТСКИХ ПОПРАВОК К ГАМИЛЬТОНИАНУ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

С.А. Жаугашева
Казахский национальный университет им. аль-Фараби, НИИЭТФ, г. Алматы

Предложен один из альтернативных методов вычисления энергетического спектра связанного состояния с выполнением условия релятивистской инвариантности. Исследуя асимптотическое поведение функции поляризационной петли для заряженных скалярных частиц во внешнем калибровочном поле, определена масса связанного состояния. Вычислена непертурбативная добавка к потенциалу взаимодействия, которая связана с релятивистской природой системы.

1 Введение

В настоящий момент о структуре и о механизме формирования квантовых объектов существуют следующие представления: связанные состояния состоят из фермионов, а взаимодействия между этими фермионами осуществляются с помощью обмена бозонов. В частности, в атомной структуре, которые состоят из электронов и ядер, такими бозонами являются фотоны, а в ядерной структуре, состоящей из нуклонов-π мезоны, и в адронной структуре, состоящего из кварков – глюоны. Таким образом, в рамках квантовой теории поля (КТП) механизм формирования квантовых систем объясняется единым образом. Известно, что для единого описания механизма формирования связанных систем в КТП необходимо выполнение условия релятивистской инвариантности, т.е. при преобразовании Лоренца, основные законы, описывающие свойства квантовых систем являются ковариантными.

Однако, при описании свойств квантованных систем в рамках КТП, сталкиваемся с известными трудностями, т.е. в рамках КТП определить энергетический спектр связанного состояния почти не возможно. Впервые, используя ковариантное представление функции Грина, описать энергетический спектр связанного состояния в КТП, попытались Швингер [1] и Бете–Солпитер [2]. Хотя полученное уравнение является большим достижением, с точки зрения теоретического исследования, однако вычислить энергетический спектр связанного состояния оказалось весьма трудным, а улучшение точности численного результата стало почти не возможным. Таким образом, многократные попытки построить модель определяющий энергетический спектр связанного состояния в КТП пока не дали ощутимых результатов. С другой стороны известно, что энергетический спектр связанного состояния с хорошей точностью определяется в рамках нерелятивистской квантовой механики (НКМ). Однако, в НКМ условие релятивистской инвариантности не выполняется.

В работе [3] предложен метод для определения энергетического спектра кулоновского связанного состояния с релятивистскими поправками. В этом методе, прежде всего в рамках квантовой электродинамики (КЭД) изучена матрица рассеяния с соответствующими диаграммами Фейнмана с учетом перенормировки последующим переходом к нерелятивистскому пределу, т.е. определен потенциал взаимодействия с релятивистской поправкой. В результате сформулирован метод нерелятивистской квантовой электродинамики (НКЭД) для определения энергетического спектра с релятивистской поправкой. В НКЭД энергетический спектр связанного состояния, с этим потенциалом определяется в рамках теории возмущении Релей-Шредингера. В дальнейшем этот метод усовершенствован в работе [4].

В настоящий момент свойства и спектр кулоновского связанного состояния, учитывая релятивистскую поправку, определяется в рамках НКЭД, а также с высокой точностью описывает последние экспериментальные данные. В этом подходе, проводят разложение по величине

$$\sqrt{\overline{p}^2+m^2}=m+\frac{\overline{p}^2}{2m}-\frac{\overline{p}^4}{8m^3}+...$$

и ограничивающиеся только низшим порядком разложения, а высшие порядки рассматриваются как возмущение. Поэтому, в НКЭД условие релятивисткой инвариантности выполняются по теории возмущении.

Таким образом, одной из актуальных проблем в современной физике элементарных частиц и атомного ядра является описание свойств и механизма формирования релятивистского связанного состояния, состоящего из нескольких частиц с выполнением условия релятивистской инвариантности. Другими словами, уравнение, описывающее состояние релятивистского связанного состояния должно быть ковариантным относительно преобразования Лоренца.

В работе [5] предложен один из альтернативных вариантов описания механизма формирования связанного состояния с учетом релятивистских характеров взаимодействия, т.е. предложен метод вычисления энергетического спектра с выполнением условия релятивистской инвариантности. В нашем подходе [5], исследуется асимптотическое поведение функции поляризационной петли для заряженных скалярных частиц во внешнем калибровочном поле, а также определяется масса связанного состояния. При определении асимптотического поведения функции петли используется представление функционального интеграла для функции Грина и, проводя усреднение по внешнему калибровочному полю, полученное представление похож на фейнмановский функциональный интеграл по путям [6], который был получен вне релятивистской квантовой механике для связанного состояния, состоящего из заряженных скалярных частиц. При этом потенциал взаимодействия определяется диаграммой Фейнмана как для обмена калибровочного поля (фотон, глюон), так и для диаграммы собственной энергии. Таким образом, потенциал взаимодействия определяется вкладом всех возможных типов диаграмм Фейнмана.

2.1 Определение массового спектра релятивистского связанного состояния, состоящего из заряженных скалярных частиц

В этом разделе будем излагать детали нашего метода, который определяет массовый спектр связанного состояния с учетом непертурвативного и релятивистского характера взаимодействий. Рассмотрим взаимодействие заряженных скалярных частиц во внешнем калибровочном поле, соответствующий лагранжиан взаимодействия записывается стандартным образом

$$L=-\frac{1}{4}F_{\mu\upsilon}F_{\mu\upsilon}+\phi^{+}\left(\left(i\partial_{\mu}+gA_{\mu}\right)^2+m^2\right) \tag{1}$$

где A - внешнее калибровочное поле с константой связи и также с тензором напряженности F; а ϕ - поле заряженных скалярных частиц с массой m. Массу связанного состояния определим на основе исследования асимптотического поведения функции поляризационной петли для заряженных скалярных частиц во внешнем калибровочном поле. Учитывая (1) функция поляризационной петли для заряженных скалярных частиц записывается в следующем виде:

$$\Pi(x-y)=\left\langle G_m\left(x,y|A\right)G_m\left(y,x|A\right)\right\rangle \tag{2}$$

Здесь проводится усреднение по внешнему калибровочному полю A_μ(x). Функция Грина $G_m(x,y|A)$ во внешнем калибровочном поле для скалярной частицы определяется из уравнения:

$$\left[\left(i\frac{\partial}{\partial x_x}+\frac{g}{c\hbar}A_x\left(x\right)\right)^2+\frac{c^2m^2}{\hbar^2}\right]G_m\left(x,y|A\right)=\delta\left(x-y\right). \tag{3}$$

При усреднении по внешнему калибровочному полю $A_x(x)$ ограничиваемся только низким порядком, т.е. учитываем только двух точечный Гауссов коррелятор:

$$\left\langle \exp\left\{ i\int dx A_x(x) J_x(x)\right\}\right\rangle = \exp\left\{-\frac{1}{2}\iint dxdy J_x(x) D_{x\beta}(x-y) J_\beta(y)\right\}. \tag{4}$$

Здесь $J_x(x)$ реальный ток, а $D_{x\beta}(x-y)$ пропагатор калибровочного поля:

$$D_{\alpha\beta}(x-y) = \left\langle A_\alpha(x) A_\beta(y)\right\rangle = \delta_{\alpha\beta} D(x-y) + \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} D_d(x-y), \tag{5}$$

где

$$D(x) = \int \frac{dq}{(2\pi)^4}\frac{e^{igx}}{q^2}; D_d(x) = \int \frac{dq}{(2\pi)^4}\frac{e^{igx}}{q^2}\frac{d(q)^2}{q^2}. \tag{6}$$

Масса связанного состояния обычно определяется через функцию петли в следующем виде:

$$M = \lim_{|x-y|\to\infty} \frac{\ln \Pi(x-y)}{|x-y|}. \tag{7}$$

Таким образом, если нам известна функция–петли, то сможем определить массу связанного состояния. Из (2) видно, что для определения массы связанного состояния, прежде всего нам нужно определить функцию петли П(x) в асимптотике $|x|\to\infty$. Поэтому необходимо определить функцию Грина. Решение уравнения (3) представляется в виде функционального интеграла (детали см. в [7]):

$$G_m(x,y|A) = \int_0^\infty \frac{ds}{(4s\pi)^2}\exp\left\{-sm^2 - \frac{(x-y)^2}{4s}\right\}\cdot \int d\sigma_\beta \exp\left\{ig\int_0^1 d\varepsilon \frac{\partial z_\alpha(s)}{\partial s} A_\alpha(\varepsilon)\right\} \tag{8}$$

Здесь введены обозначения

$$Z_\alpha(\varepsilon) = (x-y)_\alpha \varepsilon + y_\alpha - 2\sqrt{s} B_\alpha(\varepsilon),$$

$$d\sigma_\beta = N\delta B_\beta \left\{-\frac{1}{2}\int_0^1 d\varepsilon B'^2(\varepsilon)\right\}, \tag{9}$$

с нормировкой

$$B_\alpha(0) = B_\alpha(1) = 0; u\int d\sigma_\beta = 1,$$

где N –константа нормировки. Подставляя (8) в (2) и проводя усреднение по внешнему калибровочному полю, получаем для функции петли

$$\Pi(x) = \int\int_0^\infty \frac{d\mu_1 d\mu_2}{(8\pi^2 x)^2} J(\mu_1\mu_2) \exp\left\{-\frac{|x|}{2}\left(\frac{m_1^2}{\mu_1}+\mu_1\right) - \frac{|x|}{2}\left(\frac{m_2^2}{\mu_2}+\mu_2\right)\right\}. \tag{10}$$

Здесь

$$J(\mu_1\mu_2) = N_1 N_2 \iint \delta r_1 \delta r_2 \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^x d\tau\left[\mu_1 r_1'^2(\tau) + \mu_2 r_2'^2(\tau)\right]\right\}\cdot \exp\left\{-W_{1,1} - W_{2,2} + W_{1,2}\right\} \tag{11}$$

и использованы следующие обозначения

$$W_{i,j} = \frac{g^2}{2}(-1)^{i+j}\int\int_0^x d\tau_1 d\tau_2 Z_\alpha'^{(i)}(\tau_1) D_{\alpha\beta}\left(Z^{(i)}(\tau_1) - Z^{(i)}(\tau_2)\right) Z_\beta'^{(j)}(\tau_2) \tag{12}$$

Определили функцию петли для скалярных частиц с массами, m_1,m_2 которые взаимодействуются между собой обменным калибровочным полем. С другой стороны, функциональный интеграл (11) похож на фейнмановский интеграл по траекториям для движения скалярных частиц с массами μ_1 и μ_2 в НКМ [6]. Взаимодействие между этими частицами описывается выражением (12), которое содержит как потенциальные, так и не потенциальные взаимодействия. Существует два типа взаимодействии: первое–взаимодействие составляющих частиц посредством калибровочного поля, вклад которого определяется непосредственно $W_{1,2}$; второе–взаимодействие составляющих частиц самих с собой, т.е. диаграмма собственной энергии, вклад которой определяется $W_{1,2}$, $W_{2,2}$. В нерелятивистском пределе величина $W_{1,2}$ соответствует потенциальным взаимодействиям, а $W_{1,2}$, $W_{2,2}$ соответствуют не потенциальным взаимодействиям, которые определяют вклад в массу собственной энергии. С другой стороны, согласно (11), гамильтониан взаимодействия скалярных частиц с массами μ_1, μ_2 записывается в виде

$$H = \frac{1}{2\mu_2} P_1^2 + \frac{1}{2\mu_2} P_2^2 + V\left(r_1, r_2\right), \tag{13}$$

где $V\left(r_1, r_2\right)$ потенциал взаимодействия, который выражается через $W_{i,j}$. Тогда из УШ

$$H\psi\left(r_1, r_2\right) = E\left(\mu_1, \mu_2\right)\psi\left(r_1, r_2\right), \tag{14}$$

можно определить $E(\mu_1,\mu_2)$ собственное значение гамильтониана (13). Согласно (14), если $E(\mu_1,\mu_2)$ собственное значение гамильтониана (13), то интеграл представленный в (11) в асимптотике $|x| \to \infty$ можно представить в виде

$$\lim_{|x\to\infty|} J\left(\mu_1, \mu_2\right) \to \exp\left\{-xE\left(\mu_1, \mu_2\right)\right\} \tag{15}$$

Собственное значение гамильтониана $E(\mu_1,\mu_2)$ зависит только от константы связи, а также от приведенной массы связанного состояния. Из (7) видно, что если мы определим функцию-петли, то сможем определить и массу связанного состояния. Однако в общем виде функциональный интеграл, представленный в (10) и (11), не вычисляется. Согласно (7), нужно определить функцию - петли в асимптотике. В этом приближении интеграл, представленный в (12) вычисляется методом перевала, тогда учитывая (15), из (7), для массы связанного состояния имеем:

$$M = \frac{1}{2} \min_{\mu_1\mu_2} \left\{ \frac{m_1^2}{\mu_1} + \mu_1 + \frac{m_2^2}{\mu_2} + \mu_2 + 2E\left(\mu_1\mu_2\right) \right\} \tag{16}$$

и для μ_j получаем следующую систему уравнений:

$$\mu_j - \frac{m_j^2}{\mu_j} + 2\mu_j \frac{dE\left(\mu_1\mu_2\right)}{d\mu_j} = 0, \quad j = 1, 2. \tag{17}$$

Параметры (μ_1,μ_2) рассматриваются как массы составляющих частиц в связанном состоянии. Эти массы отличаются от m_1,m_2 масс исходного (свободного) состояния. В дальнейших вычислениях вводим приведенную массу связанного состояния

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}. \tag{18}$$

Тогда для массы и конституентной массы связанного состояния имеем

$$M = \mu_1 + \mu_2 + \mu \frac{dE}{d\mu} + E\left(\mu\right); \tag{19}$$

$$\mu_1 = \sqrt{m_1^2 - 2\mu^2 \frac{dE}{d\mu}}; \quad \mu_2 = \sqrt{m_2^2 - 2\mu^2 \frac{dE}{d\mu}}.$$

Таким образом, сможем определить массу и конституентную массу связанных состояний с учетом релятивистской поправки. Величина $E(\mu)$ определяется как собственное значение гамильтониана взаимодействие. При этом потенциал взаимодействия определяется все возможными типами диаграммы Фейнмана, т.е. из (12).

2.2 Непертурбативная добавка к гамильтониану взаимодействия

В стандартном вычислении при учете непертурбативных характеров взаимодействий, как правило, ограничиваются низшей степенью величины $\left(v/c\right)$, но в нашем подходе, исходя, из некоторых предположений, включается ультрарелятивистский предел, т.е. определяем вид взаимодействии суммированием бесконечного ряда, полученного по степеням величины $\left(v/c\right)$.

Теперь приступим к определению структуры гамильтониана взаимодействия для этого приведем детали вычисления функционального интеграла представленный в (12). Из (10) видно, что взаимодействие между составными частицами осуществляется обменом калибровочных полей, согласно (6) пропагатор записывается стандартным образом в импульсном представлении

$$D\left(\vec{q}^{\,2}+\frac{s^2}{c^2}\right) \equiv \frac{1}{\vec{q}^{\,2}+\dfrac{s^2}{c^2}}=\int_0^\infty d\eta \exp\left\{-\eta\left(\vec{q}^{\,2}+\frac{s^2}{c^2}\right)\right\}. \tag{20}$$

Учитывая (20), из (12), для $W_{i,j}$ получаем

$$W_{i,j}=\frac{1}{2}g^{2(-1)^{i+j}}\iint_0^x d\tau_1 d\tau_2 \int_{-\infty}^{\infty}\frac{ds}{2\pi}\int\frac{\overrightarrow{dq}}{(2\pi)^3}\int_0^\infty d\eta e^{ist}\Theta_{ij}\exp\left\{-\eta\left(\vec{q}^{\,2}+\frac{s^2}{c^2}\right)\right\}\exp\left\{-i\left(\vec{q}\vec{r}\right)-i\frac{s}{c}r^{(4)}\right\}, \tag{21}$$

где введены следующие обозначения

$$\begin{aligned}
&\tau=\left(\tau_1-\tau_2\right);\\
&\vec{r}=\vec{r}_i\left(\tau_1\right)-\vec{r}_j\left(\tau_2\right);\\
&r^{(4)}=r_i^{(4)}\left(\tau_1\right)-r_j^{(4)}\left(\tau_2\right);\\
&\Theta_{ij}=1+\frac{\tilde{n}}{c}\left(\dot{\vec{r}}_i\left(\tau_1\right)+\dot{\vec{r}}_j\left(\tau_2\right)\right)+\frac{\dot{\vec{r}}_i\left(\tau_1\right)\dot{\vec{r}}_j\left(\tau_2\right)}{c^2}.
\end{aligned} \tag{22}$$

Проводя интегрирование по переменам $d\vec{q}$, из (21), получаем

$$W_{i,j}=\frac{1}{2}g^2\left(-1\right)^{i+j}\iint_0^x d\tau_1 d\tau_2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ds}{2\pi}\int_0^\infty\frac{d\eta}{\left(2\sqrt{\pi\eta}\right)^3}\exp\left\{-\frac{r^2}{4\eta}\right\}\cdot$$

$$\sum_{k=0}^\infty\ \sum_{n=0}^k\frac{\left(-1\right)^{n+k}}{n!\left(k-n\right)!}\eta^n r^{(4)(k-n)}\cdot\left(\frac{is}{c}\right)^{(n+k)}e^{is\tau}\Theta_{ij}, \tag{23}$$

Проводя интегрирование по ds и $d\eta$ и после некоторых упрощений, из (23), имеем:

$$W_{i,j}=\left(-1\right)^{i+j}\frac{g^2}{8\pi}\iint_0^x d\tau_1 d\tau_2\sum_{k=0}^\infty\frac{1}{k!}\sum_{k=0}^\infty\frac{k!}{n!\left(k-n\right)!}\frac{\Gamma\left(\dfrac{1}{2}-n\right)}{\sqrt{\pi}c^{k+n}}\frac{\left(\left|\vec{r}_i\left(\tau\right)-\vec{r}_j\left(\tau\right)\right|\right)^{2n-1}}{2^{2n}}\cdot$$

$$\left(r_i^{(4)}\left(\tau_1\right)-r_j^{(4)}\left(\tau_2\right)\right)^{k-n}\frac{\partial^{k+n}}{\partial\tau^{k+n}}\delta\left(\tau\right)\equiv W_{i,j}^{(1)}+W_{i,j}^{(2)}.\ . \tag{24}$$

Рассмотрим отдельно каждое слагаемое в (24). Первое слагаемое $W_{i,j}^{(1)}$ - соответствует вкладу однофотонного (глюонного) обмена:

$$W_{i,j}^{(1)}=\left(-1\right)^{i+j}\frac{g^2}{8\pi}\iint_0^t d\tau_1 d\tau_2\frac{\delta\left(\tau_1-\tau_2\right)}{\left|\vec{r}_j\left(\tau_1\right)-\vec{r}_j\left(\tau_2\right)\right|}. \tag{25}$$

При этом диагональное взаимодействие, т.е. ($i=j$) определяет перенормировку массы:

$$-W_{1,1}^{(1)}-W_{2,2}^{(1)}+2W_{1,2}^{2}=\int_0^x d\tau\left\{-\frac{\alpha_s}{r(\tau)}+V(0)\right\}, \tag{26}$$

где

$$r(\tau)=\left|\vec{r}_1(\tau)-\vec{r}_2(\tau)\right|;$$
$$V(0)=\alpha_s\int\frac{d\vec{q}}{(2\pi)^2}\frac{1}{\vec{q}^{\,2}}; \tag{27}$$

и $V(0)$ соответствует обычной перенормировке массового оператора в нерелятивистском пределе и определяется через конституентной массы составляющих частиц. В феноменологических потенциальных моделях вводится "искусственно" новый параметр [8,9]:

$$V(0)=-2\sqrt{\lambda}\exp\left\{-\left(\gamma-\frac{1}{2}\right)\right\},\quad \gamma=0.577215665,$$

который позволяет обеспечить идеальное согласие с экспериментальными данными. Этот параметр может быть связан с непотенциальным характером взаимодействия, т.е. с $V(0)$. Теперь приводим некоторые детали вычисления второго слагаемого в (24). Прежде всего, используя следующие соотношения

$$\frac{\partial^{k+n}}{\partial\tau^{k+n}}\delta(\tau)(-1)^{k+n}\frac{\partial^{k+n}}{\partial\beta^{k+n}}e^{-\beta\frac{\partial}{\partial\tau}}\Big]_{\beta=0}=(-1)^{k+n}\frac{\partial^{k+n}}{\partial\beta^{k+n}}\delta(\tau-\beta)\Big]_{\beta=0} \tag{28}$$

и проводя необходимые упрощения, из (24), для второго слагаемого $W_{i,j}^{(2)}$ получаем

$$W_{i,j}^{(2)}=(-1)^{i+j}\frac{g^2}{8\pi}\int_0^x d\tau\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n k!}{n!(k-n)!}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)}{\sqrt{\pi}\,2^{2n}c^{k+n}}\times$$
$$\frac{\partial^{k+n}}{\partial\beta^{k+n}}\left[\left|\vec{r}_i(\tau+\beta)-\vec{r}_j(\tau)\right|^{2n-1}\left(\left(r_i^{(4)}(\tau+\beta)-r_i^{(4)}(\tau)\right)^{k-n}\right)\right]_{\beta=0} \tag{29}$$

Проводя замену переменных, переходим к системе центра масс

$$\vec{r}_i(\tau+\beta)=\vec{R}(\tau+\beta)+\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\vec{r}(\tau+\beta);$$
$$\vec{r}_j(\tau)=\vec{R}(\tau)-\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\vec{r}(\tau); \tag{30}$$

Предположим, что в системе центра масс составные частицы покоятся, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\vec{R}(\tau)=0, \tag{31}$$

а скорость относительного движения составных частиц постоянная, т.е.

$$\vec{v}(\tau)=\frac{\partial}{\partial\tau}\vec{r}(\tau)=const\,. \tag{32}$$

Исследуем асимптотические поведения функции поляризационной петли в низшем приближении, и при $x\to\infty$ зависимость от x должна быть линейной. С другой стороны τ_1 и τ_2 являются собственными временами относительных движений составных частиц i и j, соответственно. Поэтому считаем, что в асимптотике зависимость $r_i^{(4)}$ и $r_j^{(4)}$ от τ_1 и τ_2 одинаковыми, т.е. $r_i^{(4)}=(\tau_1)\square r_1^L,\ r_j^{(4)}=(\tau_2)\square r_2^L$, где L постоянный параметр. Исходя из этих предположений и учитывая (30-35) для $W_{i,j}^{(2)}$ получаем

$$W_{i,j}^{(2)} = (-1)^{i+j} \frac{g^2}{8\pi} \int_0^x d\tau \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-k\right)}{\sqrt{\pi}\, 2^{2k} c^{2k}} \frac{\partial^{2k}}{\partial \tau^{2k}} \left| \vec{r}_i(\tau) - \vec{r}_j(\tau) \right|^{2k-1} \tag{33}$$

Параметр τ будем рассматривать как собственное время относительного движения составных частиц. Теперь приводим некоторые детали суммирования в (33). Для этого рассмотрим величину по отдельности:

$$I = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!\, c^{2k}} \frac{\partial^{2k}}{\partial \tau^{2k}} \left(r^{2k-1}(\tau) \right); \tag{34}$$

где $r = |\vec{r}|$. Используя следующие соотношения:

$$\begin{gathered} \vec{v} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \tau}; \quad \frac{\partial r}{\partial \tau} = (\vec{n}\vec{v}); \\ \vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}; \quad \dot{\vec{v}} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial \tau} = 0; \end{gathered} \tag{35}$$

для различных значений k получаем

$$\begin{gathered} k = 1; \quad \frac{\partial^2 r}{\partial \tau^2} = \frac{[\vec{r}\,\vec{v}]^2}{r^3} = \frac{\hat{l}^2}{r^3} \\ k = 1; \quad \frac{\partial^4 r^3}{\partial \tau^4} = \frac{9\hat{l}^4}{r^5}; \\ k = n; \quad \frac{\partial^{2n} r^{2n-1}}{\partial \tau^{2n}} = \frac{\hat{l}^{2n}}{r^{2n+1}} \prod_{j=1}^{n} (2j-1)^2 \end{gathered} \tag{36}$$

и

$$\hbar \hat{l} = [\vec{r}\,\vec{p}], \tag{37}$$

$\hat{l}$ –оператор орбитального момента. Используя соотношения:

$$\prod_{j=1}^{k} (2j-1)^2 = \left[\frac{(2k-1)!}{2^{k-1}(k-1)!} \right]^2 = \frac{\Gamma^2(2k)}{\Gamma^2(k)\, 2^{2(k-1)}} \tag{38}$$

и

$$\Gamma(2k) = \frac{2^{2k-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(k) \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right), \tag{39}$$

а также, учитывая (36) для исходного ряда (31), имеем:

$$I = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!\, c^{2k}} \frac{\hat{l}^{2k}}{r^{2k+1}} \frac{1}{(\hbar\mu)^{2k}} \frac{\Gamma^2(2k)}{\Gamma^2(k)\, 2^{2(k-1)}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\, r} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k)!} A^k\, \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right), \tag{40}$$

где введено обозначение

$$A = \frac{\hat{l}^2}{c^2 r^2 (\hbar\mu)^{2k}}. \tag{41}$$

Используя интегральное представление для $\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)$ -функции, из (40), окончательно получаем

$$I=\frac{1}{\sqrt{\pi}r}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k)!}\int_0^{\infty}dx\frac{x^k}{\sqrt{x}}e^{-x}=\frac{1}{\sqrt{\pi}r}\int_0^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}e^{-x}\left(e^{-x}-1\right)=\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sqrt{1+\frac{l(l+1)}{\xi^2c^2r^2\mu^2}}}-1\right] \quad (42)$$

Тогда, учитывая (27), (32) и (42), из (26), для гамильтониана взаимодействия с непертурбативной добавкой имеем:

$$H=H^0+\Delta H^0_{nonper}, \quad (43)$$

где H^0-нерелятивистский гамильтониан с непотенциальной добавкой:

$$H^0=\frac{1}{2}\overrightarrow{p^2}-\frac{\alpha_s}{r}+V(0) \quad (44)$$

и ΔH^0_{nonper} - непертурбативная добавка:

$$\Delta H_{nonper}{}^0=-\frac{\alpha_s}{r}\left[\frac{1}{\sqrt{1+\frac{l(l+1)}{\xi^2c^2r^2\mu^2}}}-1\right]. \quad (45)$$

Таким образом, получили непертурбативную добавку к гамильтониану взаимодействия, которая связана с релятивистской природой системы. Из (29) видно, что релятивистская поправка к гамильтониану взаимодействия состоит из двух частей: как пространственная, так и временная. В (45), определили поправку связанной с пространственной компонентой. Теперь приступим к определению поправки связанной с временной компонентой. Из (29) видно, что при $k=n$ мы получаем только поправки связанной с пространственной компонентой. При низшем порядке разложении, т.е. $k=2$, $n=1$ из (29), имеем:

$$\delta W^{(2)}_{1,2}=\frac{g^2}{8\pi}\frac{r}{4c^3}\int_0^{\infty}d\tau\frac{\partial^3}{\partial\beta^3}r^2(\tau+\beta)\Big]_{\beta=0}. \quad (46)$$

Получение добавки к гамильтониану взаимодействия, которые связанны с релятивистской природой взаимодействий, и в нерелятивистском пределе $c\to\infty$ отсутствует. Из (46) видно, что поправка, связанная с временной компонентой дает линейный потенциал взаимодействия. Впервые эту поправку определили в работе [10].

Сформулировали модель определяющую массу и энергетический спектр связанного состояния с выполнением условия релятивистской инвариантности. Наш подход дает возможность определить конституентную массу составляющих частиц как функцию от массы исходного или свободного состояния и также от энергетического спектра связанного состояния. В нашем подходе основная поправка связана с релятивистской природой взаимодействии, учитывающаяся с помощью конституентной массы составляющих частиц.

Потенциал взаимодействия в нашем подходе определяется все возможный типами диаграммы Фейнмана. Существует два типа диаграммы: первое – взаимодействие составляющих частиц посредством калибровочного поля, вклад которого определяется обменными диаграммами, второе–взаимодействие составляющих частиц самих с собой, т.е. диаграмма собственной энергии. В нерелятивистском пределе обычно вклад обменной диаграммы соответствует потенциальному взаимодействию, а вклад диаграммы собственной энергии соответствует не потенциальному взаимодействию.

Литература

1. J.Schwinger, Proc. Acad.Sci. USA, 37, p.452(1951).
2. E.Salpeter and H.Bethe, Phys.Rev., 84, p.1232(1951).
3. W.E.Caswell and G.P.Lepage, Phys.Let. B167, p.437(1986)

4. T.Kinoshita and M.Nio, Phys.Rev. D53, p.4909(1996).
5. M. Dineykhan, S.A. Zhaugasheva, N.Sh. Toinbaeva and A. Jakhanshir, J.Phys.B: At. Mol. Opt.Phys. 42, p.145001(2009).
6. R.P. Feynman and A.P. Hibbs, Quantum Mechanics and PathIntegrals (MeGraw-Hill, New York, 1963).
7. M. Dineykhan, G.V .Efimov and Kh.Namsrai, Fortschr. Phys. 39, p.259(1991).
8. S. Godfrey and N. Isgur, Physical Rev.D32, p.189(1985).
9. N. Isgur and M. Wise, Phys. Lett. B262, p.113(1989); ibid B6890, 237,p.527; Physics Reports,200, p.127(1991).
10. G.V. Efimov, Few-Body Systems 47, (2010) (inpress).

ӘСЕРЛЕСУ ГАМИЛЬТОНИАНЫНА БЕЙТУРБАТИВТІК ЖӘНЕ РЕЛЯТИВИСТІК ТҮЗЕЙТУІН АНЫҚТАУ

С.А. Жауғашева

Релятивистік инварианты шарттардың орындалуымен байланысқан күйдің энергетикалық спектрін есептеудің альтернативті әдістері ұсынылды. Сыртқы калибрлі өрістегі зарядталған бөлшектер үшін поляризацияланған тұзақта функцияның асимптотикалық күйі зерттеліп, массалық спектрі анықталды. Релятивистік жүйенің табиғатына сай әсерлесу потенциалының бейпертурбативті түзетуі есептелінді.

DEFINITION NONPERTURBATIVE AND RELATIVISTIC AMENDMENTS TO HAMILTONIAN INTERACTIONS

S.A. Zhaugasheva

We propose on of the alternative version of calculation the energy spectrum of the bound state systems with satisfied the relativistic invariance. Our approach is based on the investigation of the asymptotic behaviour of the polarization loop function for scalar charged particles in an external gauge field and we determine the mass spectrum of bound state. The nonperturbative corrections arising due to the relativistic nature of system to the interaction Hamiltonian are determined.