МЕТОД ПОДОБИЯ – ЕЩЕ ОДИН СПОСОБ ПОЛУЧЕНИЯ МЕТРИКИ ЭЙНШТЕЙНА И ФРИДМАНА В КОСМОЛОГИИ

М.М. Абдильдин, Н.А. Бейсен, А.С. Таукенова

НИИЭТФ, Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы.

В этой работе показано, что метод подобия дает простой способ получения космологических решений Эйнштейна и Фридмана.

Классическая космология однородна, евклидова и стационарна (ОЕС). Однородность, т.е постоянство плотности распределения материи во Вселенной – космологический принцип, считался достаточно надежным фактом. Пространство предпологалось трехмерным, однородным и изотропным, ибо его геометрия евклидовая E_3, с метрикой

$$ds^2(E_3) = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2. \tag{1}$$

Вследствие этого объем Вселенной, и ее масса получаются бесконечными. Впоследствии эти обстоятельства привели классическую космологию к глубоким затруднениям.

Приходится отказываться от одного из «трех китов», на которые опирается классическая космология: от однородности, от евклидовости или от стационарности.

Эйнштейн в своей небольшой работе, озаглавленной «Вопросы космологии в общей теории относительности» и опубликованной в журнале «Сообщения Прусской Академии наук» отказался от евклидовости геометрии Вселенной. Эйнштейн вспомнил о другом возможном предположении относительно структуры вселенной. А именно: развитие неевклидовой геометрии привело к осознанию того факта, что можно сомневаться в бесконечности нашего пространства, не вступая в противоречие с законами мышления и с опытом (Риман, Гельмгольц). Эти соображения были детально выяснены с исключительной отчетливостью Гельмгольцем и Пуанкаре. Они допускали трехмерное сферическое пространство, с конечным объемом и сферической геометрией C_3. Причем как геометрия E_3, так и геометрия C_3, являются однородными и изотропными. Чтобы получить их метрики достаточно метода подобия. Покажем это.

Трехмерная сфера подобна двумерной – можно сказать, что она также связана с обычной сферой, как обычная (двумерная) сфера с «одномерной сферой» - окружностью.

Тогда метрика «одномерной сферы» - окружности равна

$$ds^2(C_1) = R^2 d\varphi^2. \tag{2}$$

Длина окружности

$$S_1 = R\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi R. \tag{3}$$

Метрика же обычной сферы

$$ds^2(C_2) = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2\theta d\varphi^2. \tag{4}$$

Площадь сферы

$$S_2 = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Rd\theta \cdot R\sin\theta d\varphi = 4\pi R^2. \tag{5}$$

Связь между метриками (4) и (2) выглядит как

$$ds^2(C_2) = R^2 d\theta^2 + \sin^2\theta \cdot dS^2(C_1). \tag{6}$$

Как же теперь определить метрику трехмерной сферы $ds^2(C_3) = ?$
Для этого воспользуемся методом подобия, т.е. формулой (6). Тогда

$$ds^2(C_3) = R^2 d\chi^2 + \sin^2\chi \cdot dS^2(C_2). \tag{7}$$

Подставляя (4) в (7) имеем

$$ds^2(C_3) = R^2 d\chi^2 + R^2\sin^2\chi d\theta^2 + R^2\sin^2\chi\sin^2\theta d\varphi^2. \tag{8}$$

Объем

$$V(C_3) = \int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} Rd\chi \cdot R\sin\chi d\theta \cdot R\sin\chi \cdot \sin\theta d\varphi = 2\pi^2 R^3. \tag{9}$$

Наконец, введем новую переменную

$$r = R\sin\chi. \tag{10}$$

Тогда метрика (8) приобретает вид

$$ds^2(C_3) = \frac{dr^2}{1-\frac{r^2}{R^2}} + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2. \tag{11}$$

Если теперь вспомнить об оси времени и полагать что она не искривлена то можно записать метрику четырехмерного пространства- времени как

$$ds^2 = C^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1-\frac{r^2}{R^2}} - r^2 d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\varphi^2. \tag{12}$$

Это – метрика вселенной Эйнштейна – космологическое решение уравнений Эйнштейна, полученное им самим [1]. Как видно, из вышеизложенного, методом подобия это решение получается элементарным путем.

В заключение, если предположить, что радиус вселенной $R = R(t)$, то мы получаем одно из решений Фридмана для нестационарной Вселенной.

Литература

1. Богородский А.Ф. Уравнения поля Эйнштейна и их применение в астрономии. Киев, 1962, - 193 с.

ҰҚСАСТЫҚ ӘДІСІ – КОСМОЛОГИЯДАҒЫ ЭЙНШТЕЙН ЖӘНЕ ФРИДМАН МЕТРИКАЛАРЫН ТАБУДЫҢ ТАҒЫ БІР ҚАРАПАЙЫМ ӘДІСІ

М.М. Әбділдин, Н.Ә. Бейсен, Ә.С. Тәукенова

Бұл мақалада Эйнштейн және Фридманның космологиялық шешімдерін табуын қарапайым тәсілін ұқсастық әдісі беретіні көрсетілген.

SIMILITUDE METHOD – ANOTHER METHOD OF OBTAINING EINSTEIN AND FRIEDMAN METRICS IN COSMOLOGY

M.M. Abdildin, N.A. Beissen, A.S. Taukenova

This work shown that the similitude method provides us by simple way to obtain cosmological solutions of Einstein and Friedmann.