СТРОЕНИЕ ПЛАНЕТОЙ СИСТЕМЫ – КАК ЗАДАЧА НА МАКСИМУМ И МИНИМУМ

М.М. Абдильдин, М.Е. Абишев, А.С. Таукенова
НИИЭТФ, Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы

В работе показано, что в планетной системе – открытой системе – реализуется принцип минимума столкновений; максимума интегралов движения и минимум энергии пробного тела.

В строении планетной системы сразу же бросается в глаза обилие сферической симметрии (Солнце, планеты) и аксиальной симметрии (планетные орбиты; они плоские и почти круговые). Это означает:

1. Основная масса (99%) планетной системы, в виде Солнца, образует симметричную фигуру – сферу – с группой сферической симметрии, а орбиты планет в плоскости – более «урезанную группу» - аксиальную симметрию – подгруппу группы вращения обычного трехмерного пространства O(3), которая изоморфна группе симметрии сферы.

2. Сферическое Солнце имеет минимальную поверхность при заданной массе, реализуя принцип минимума столкновений (соударений) частиц.

Что же касается планет, то они распологаются на плоскости, реализуя принцип минимума поверхности, натянутой на заданный контур.

Действительно, для этого следует рассмотреть математическую задачу о нахождении поверхности минимальной площади, натянутой на данный контур C. Ее решение приводит к исследованию на минимум функционала [1, с. 315]

$$S[z(x,y)] = \iint_D \sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy,, \tag{1}$$

где D – проекция S на плоскость XOY, $p=\frac{\partial z}{\partial x}$, $q=\frac{\partial z}{\partial y}$. Функция $z(x,y)$, реализующая экстремум, удовлетворяет уравнению Остроградского

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)=0. \tag{2}$$

Или

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]=0, \tag{3}$$

это уравнение означает, что средняя кривизна поверхности

$$H=\frac{r\left(1+q^2\right)+2pql+t\left(1+p^2\right)}{2\left(1+p^2+q^2\right)^{3/2}}=0, \tag{4}$$

где

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \;\; l = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \;\; t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,. \tag{5}$$

Таким образом, поверхность минимальной площади, натянутой на данный контур, есть плоскость.

3. Теперь обратимся к механике теории гравитации Ньютона (ТГН). Обсудим кеплеровую задачу классической небесной механики – задачу о движении пробного тела в гравитационном поле Солнца с потенциалом

$$U = \frac{\gamma m_0}{r}. \tag{6}$$

Исходим из интегралов движения (так называемых векторных элементов орбиты [2])

$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{p}], \qquad \vec{A} = \left[\frac{\vec{p}}{m}\vec{M}\right] - \frac{\gamma m m_0}{r}\vec{r}, \tag{7}$$

где $\vec{M}$ – момент импульса, $\vec{A}$ – вектор Лапласа.

Из сохранения вектора $\vec{M}$ следует, что орбита является плоской кривой. Умножая обе стороны второго из соотношений (7) скалярно на $\vec{r}$, имеем

$$\left(\vec{r}\vec{A}\right) = \left(\vec{r}\left[\frac{\vec{p}}{m}\vec{M}\right]\right) - \gamma m m_0 r.\,. \tag{8}$$

Отсюда

$$r = \frac{\sigma}{1 + e\cos\varphi}, \tag{9}$$

где

$$\sigma = \frac{M^2}{\gamma m^2 m_0}, \;\; e = \frac{A}{\gamma m m_0}, \;\; \alpha = \gamma m m_0. \tag{10}$$

В этих выражениях σ – параметр орбиты, e – эксцинтриситет обриты, φ – полярный угол. Само уравнение (9) – уравнение конического сечения с фокусом в начале координат.

Сохраняющийся вектор $\vec{A}$ направлен вдоль большой оси от фокуса к перигелию. Появление такого интеграла движения, специфический именно для гравитационного поля сферического тела с гравитационным потенциалом

$$U = \frac{\gamma m_0}{r}. \tag{11}$$

Другими словами, это ньютонов скалярный потенциал центрально-симметрического гравитационного поля. Заметим также, что именно для центрального поля с потенциалом

(11) все траектории финитных движений замкнуты. Наименьшее допустимое значение энергии совпадает с

$$E_{\min} = -\frac{m\alpha^2}{2M^2}, \tag{12}$$

при этом $e = 0$, т.е. эллипс обращается в окружность.

4. Теперь обратимся к механике ОТО. В качестве базовой задачи рассмотрим задачу Лензе-Тирринга. Это связано с тем, что в этом случае задействованы сразу же два потенциала

$$U = \frac{\gamma m_0}{r}, \quad \vec{U} = -\frac{\gamma}{2r^3}\left[\vec{S}_0\vec{r}\right], \tag{13}$$

где $\vec{U}$ – векторный потенциал векторного гравитационного поля, создаваемого собственным моментом (угловым моментом) Солнца $\vec{S}_0$.

Уравнения эволюционного движения пробного тела в поле вращающегося Солнца имеют вид [2]

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{M}}}{\mathrm{dt}} = \left[\vec{\Omega}\vec{\mathrm{M}}\right], \quad \frac{d\vec{A}}{dt} = \left[\vec{\Omega}\vec{A}\right], \tag{14}$$

где

$$\vec{\Omega} = \frac{3m\alpha^4}{M^3M_0^3c^2} + \frac{m^2\alpha^4}{m_0M^3M_0^3c^2}\left\{2\vec{S}_0 - \frac{3m(\vec{M}\vec{S}_0)}{7m_0M^2}\vec{S}_0 + \frac{6m(\vec{M}\vec{S}_0)^2}{7m_0M^4}\vec{M}\right\} -$$

$$-\frac{3m^2\alpha^4\vec{M}}{m_0M^5M_0^3c^2}\left\{2(\vec{M}\vec{S}_0) + \frac{m}{7m_0}S_0^2 - \frac{3m}{7m_0M^2}(\vec{S}_0\vec{M})^2\right\}. \tag{15}$$

Здесь

$$M_0 = \frac{M}{\sqrt{1-\frac{A^2}{\alpha^2}}}, \tag{16}$$

- инвариант системы.

Теперь вспомним, что в классической механике, в случае задачи Кеплера, устойчивы все орбиты и условия устойчивости имеют вид [2].

$$\vec{M} = const, \quad \vec{A} = const. \tag{17}$$

Спрашивается, существуют ли такие же устойчивые орбиты в задаче Лензе-Тирринга. Для этого потребуем, чтобы было

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = 0, \quad \frac{d\vec{A}}{dt} = 0, \tag{18}$$

или что-то же самое

$$\left[\vec{\Omega}\vec{M}\right] = 0, \quad \left[\vec{\Omega}\vec{A}\right] = 0. \tag{19}$$

Это и есть условия устойчивости релятивистских орбит относительно векторных элементов. Они могут быть выполнены, если

$$\vec{\Omega} \uparrow\uparrow \vec{M}, \quad A = 0, \tag{20}$$

или

$$\vec{\Omega} \uparrow\downarrow \vec{M}, \quad A = 0. \tag{21}$$

Таким образом, устойчивыми орбитами по отношению к векторным элементам $\vec{M}$ и $\vec{A}$ в задаче Лензе-Тирринга являются класс круговых орбит, лежащих в экваториальной плоскости центрального вращающегося тела. В этом случае, как и в случае задачи Кеплера, сохраняется максимум интегралов движения и плюс минимум энергии пробного тела.

Общий вывод. В планетной системе – открытой, эволюционно зрелой системе – реализуются принцип минимума столкновений; максимум числа интегралов движения и минимума энергии пробного тела.

Литература

1. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационные исчисления. – М.: Наука, 1969.
2. Абдильдин М.М. Проблема движения тел в общей теории относительности. Алматы. 2006, - 152 с.

ПЛАНЕТАЛЫҚ СИТЕМА – МАКСИМУМ МЕН МИНИМУМГЕ БЕРІЛГЕН ЕСЕП.

М.М. Әбділдин, М.Е. Әбішев, Ә.С. Тәукенова

Жұмыста планеталық жүйе – ашық жүйе – максимумге және минимумге берілген есеп ретінде қарастыруға болатыны көрсетілген.

STRUCTURE OF A PLANET SYSTEM - AS A PROBLEM IN THE MAXIMUM AND MINIMUM

M.M. Abdildin, M.E. Abishev, A.S. Taukenova

In this work sown that in the planetary system - an open system - implemented the principle of minimum collision; maximum of motion integrals and the minimum of a probe body energy.