

**Джунушалиев В.<sup>1,2,3,4</sup>, Фоломеев В.<sup>2,3,4</sup>**

<sup>1</sup>Кафедра теоретической и ядерной физики, Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Казахстан, г. Алматы, e-mail: v.dzhunushaliev@gmail.com

<sup>2</sup>Институт экспериментальной и теоретической физики, Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Казахстан, г. Алматы

<sup>3</sup>Национальная нанотехнологическая лаборатория открытого типа, Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Казахстан, г. Алматы

<sup>4</sup>Институт физико-технических проблем и материаловедения НАН КР, Кыргызстан, г. Бишкек, e-mail: vfolomeev@mail.ru

## **ДИРАКОВСКАЯ ЗВЕЗДА С ДИПОЛЬНЫМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ**

Исследованы компактные гравитирующие конфигурации, состоящие из сильно замагниченной спиновой жидкости. Последняя описывается эффективным уравнением состояния, получающимся в пределе больших величин константы самодействия нелинейного спинового поля. Найдены регулярные статические асимптотически плоские решения, описывающие конфигурации с конечными размерами (дираковские звёзды). Построены соотношения масса-радиус для звёзд с массами порядка массы Чандрасекара и радиусами, сопоставимыми с размерами нейтронных звёзд. Исследована структура дипольного магнитного поля, моделируемого в форме осесимметричного полоидального поля, создаваемого тороидальными электрическими токами. Плотность энергии магнитного поля полагается много меньшей, чем плотность энергии спиновой жидкости. Рассчитаны радиальная и тангенциальная компоненты напряжённости магнитного поля. Показано, что их распределения по радиусу конфигураций аналогичны распределениям полей у нейтронных звёзд.

**Ключевые слова:** спиновая жидкость, компактные гравитирующие конфигурации, дипольное магнитное поле.

Dzhunushaliev V.<sup>1,2,3,4</sup>, Folomeev V.<sup>2,3,4</sup>

<sup>1</sup>Department of Theoretical and Nuclear Physics, Al-Farabi Kazakh National University, Kazakhstan, Almaty, e-mail: v.dzhunushaliev@gmail.com

<sup>2</sup>Institute of Experimental and Theoretical Physics, Al-Farabi Kazakh National University, Kazakhstan, Almaty

<sup>3</sup>National Nanotechnology Laboratory of Open Type, Al-Farabi Kazakh National University, Kazakhstan, Almaty

<sup>4</sup>Institute of Physical and Technical Problems and Materials Science, National Academy of Sciences of the Kyrgyz Republic, Kyrgyzstan, Bishkek, e-mail: vfolomeev@mail.ru

### **Dirac star with a dipole magnetic field**

Compact gravitating configurations consisting of strongly magnetized spinor fluid are studied. The latter is described by an effective equation of state which is obtained in the limit of large values of the coupling constant of a nonlinear spinor field. Regular static asymptotically flat solutions describing configurations with finite sizes (Dirac stars) are found. Mass-radius relations for stars with masses of the order of the Chandrasekhar mass and radii comparable with sizes of neutron stars are constructed. The structure of a dipole magnetic field modeled in the form of an axisymmetric poloidal magnetic field created by toroidal electric currents is investigated. The energy density of the magnetic field is assumed to be much smaller than that of the spinor fluid. The radial and tangential components of the magnetic field strength are computed. It is shown that their distributions along the radius of the configurations are similar to those of neutron stars.

**Key words:** spinor fluid, compact gravitating configurations, dipole magnetic field.

Джунушалиев В.<sup>1,2,3,4</sup>, Фоломеев В.<sup>2,3,4</sup>

<sup>1</sup>Теориялық және ядролық физика кафедрасы, әл-Фараби ат. Қазақ ұлттық университеті, Қазақстан, Алматы қ., e-mail: v.dzhunushaliev@gmail.com

<sup>2</sup>Эксперименттік және теориялық физика институты, әл-Фараби ат. Қазақ ұлттық университеті, Қазақстан, Алматы қ.

<sup>3</sup>Ашық түрдегі Ұлттық нанотехнологиялық лаборатория, әл-Фараби ат. Қазақ ұлттық университеті, Қазақстан, Алматы қ.

<sup>4</sup>Институт физико-технических проблем и материаловедения НАН КР, Кыргызстан, г. Бишкек, e-mail: vfolomeev@mail.ru

### Диполдік магнит өрісімен Дирак жұлдызы

Қатты магниттелген спинорлық сұйықтан тұратын жинақталған гравитациялық конфигурациялар зерттелді. Магниттелген спинорлық сұйықтық үлкен шамалы тұрақтылар өзара әрекеттесу сызықты емес спинор өрісін сипаттайтын (Дирак жұлдызы) тұрақты статика асимптотикалық жазық шешімі табылған. Нейтронды жұлдыздардың өлшемдерімен салыстырып Чандрасекара жұлдыздары сияқты жұлдыздар үшін салмағы мен радиустарына шешімдер алынған. Тороидтық электр тоқтарымен тудырылатын өсті симметриялы полярды өріс нысанында моделденген дипольдік магнит өрісінің құрылымы зерттелген. Магнит өрісінің энергиясының тығыздығы спинор сұйықтық энергиясының тығыздығынан едәуір аз. Магнит өрісі кернеулігінің радиалды және тангенциалды компоненттері есептелген. Нейтронды жұлдыздар өрістерінің таралуы олардың үлестіру радиусы бойынша конфигурацияларына ұқсас екендігі көрсетілген.

**Түйін сөздер:** спинорлық сұйықтық, жинақталған гравитациялық конфигурациялар, диполдік магнит өрісі.

## 1 Введение

Поиск частицеподобных решений является традиционным направлением исследований теории классического поля. Для этого рассматриваются полевые системы, образованные нелинейными полями с различными спинами (см., например, монографии [1, 2]). Следующим естественным шагом является включение в такие системы гравитационного поля. Наличие последнего позволяет получать гравитационно замкнутые системы, физические характеристики которых варьируются в очень широких пределах. В частности, полученные за последние несколько десятков лет результаты указывают, что гравитирующие конфигурации, образованные полями со спином 0 (бозонные звёзды) могут обладать как характеристиками, типичными для атомов, так и параметрами, типичными для галактик [3].

Что касается фундаментальных полей с ненулевым спином, то здесь проведено гораздо меньшее количество исследований гравитирующих систем. В частности, отметим исследования конфигураций, образованных полями со спином 1 – Янга-Миллса (безмассовые векторные поля) [4] или Прока (массивные векторные поля) [5]. Также в литературе рассматриваются частицеподобные системы со спинорными полями со спином 1/2, образованные как линейными [6, 7],

так и нелинейными спинорными полями [8, 9]. Такие конфигурации удерживаются от коллапса под действием собственного поля тяготения благодаря принципу неопределённости Гейзенберга.

С точки зрения астрофизических приложений наибольший интерес представляют конфигурации с параметрами, типичными для звёзд. В случае бозонных звёзд получение таких параметров достигается, в частности, путём рассмотрения потенциалов скалярного поля с большими величинами константы самодействия [10]. В наших недавних работах мы показали, что для систем со спинорным полем этого также удаётся добиться [8, 9]. При этом, как и в случае с бозонными звёздами, в пределе больших величин константы самодействия возможно ввести некое эффективное гидродинамическое уравнение состояния (УС), которое может быть использовано для приближённого описания таких систем. В данной статье мы воспользуемся УС такого типа для построения равновесных решений в рамках теории тяготения Эйнштейна и исследуем вопрос о структуре дипольного магнитного поля получаемых конфигураций. Магнитные поля такого рода часто рассматриваются в литературе при моделировании нейтронных звёзд, и поэтому представляется интересным сравнить структуру таких полей у нейтронных и дираковских звёзд.

## 2 Постановка задачи и уравнения

### 2.1 Спинорная жидкость

В работах [8, 9] мы исследовали гравитирующую систему с нелинейным спинорным полем  $\psi$ , описываемым лагранжианом

$$L_{sp} = \frac{i\hbar c}{2} (\bar{\psi}\gamma^\mu\psi_{;\mu} - \bar{\psi}_{;\mu}\gamma^\mu\psi) - \mu c^2 \bar{\psi}\psi + \frac{\lambda}{2} (\bar{\psi}\psi)^2, \quad (1)$$

который содержит ковариантные производные  $\psi_{;\mu} = [\partial_\mu + 1/8 \omega_{ab\mu}(\gamma^a\gamma^b - \gamma^b\gamma^a)]\psi$ , где  $\gamma^a$  есть матрицы Дирака в стандартном представлении в плоском пространстве, а  $\omega_{ab\mu}$  есть спиновая связность (её определение см., например, в [2]);  $\lambda$  – константа связи;  $\mu$  – масса спинорного поля.

В статьях [8, 9] продемонстрировано, что в пределе больших отрицательных значений безразмерной константы связи  $|\bar{\lambda}| \gg 1$  удаётся получать конфигурации, размеры и массы которых сопоставимы с характеристиками, типичными для нейтронных звёзд. Там также показано, что такие предельные конфигурации могут описываться неким эффективным гидродинамическим уравнением состояния, связывающим давление  $p$  и плотность энергии  $\varepsilon$ :

$$p = \frac{\varepsilon_0}{9} \left( 1 + 3 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - \sqrt{1 + 6 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} \right), \quad (2)$$

где  $\varepsilon_0 = \mu c^2 / \lambda_c^3$  можно рассматривать как некоторую характерную плотность энергии конфигурации [здесь  $\lambda_c = \hbar / (\mu c)$ ]. При этом саму конфигурацию, описываемую таким эффективным УС, можно рассматривать как состоящую из жидкости, которую мы будем называть *спинорной жидкостью*.

### 2.2 Полевые уравнения

Мы будем рассматривать компактную гравитирующую систему, состоящую из замагниченной спинорной жидкости. Лагранжиан такой системы может быть представлен в виде:

$$L = -\frac{c^4}{16\pi G} R - \frac{1}{4} F_{lm} F^{lm} + L_{\text{fl}}. \quad (3)$$

Здесь  $G$  есть константа тяготения Ньютона,  $F_{lm}$  – тензор электромагнитного поля,  $L_{\text{fl}}$  – лагранжиан спинорной жидкости.

Нашей целью будет получение регулярных решений уравнений Эйнштейна и Максвелла и исследование структуры магнитного поля конфигураций такого рода. При моделировании магнитного поля мы будем исходить из следующих упрощающих предположений [11]: (1) Магнитное поле выбирается в форме осесимметричного полоидального магнитного поля, создаваемого тороидальными электрическими токами. (2) В общем случае наличие такого поля в системе должно приводить к отклонению формы конфигурации от сферической симметрии. Однако для рассматриваемых в рамках данной статьи величин напряжённости магнитного поля порядка  $10^{12} - 10^{15}$  Гс эти отклонения будут малы, поскольку энергия магнитного поля много меньше гравитационной энергии [12]. Это позволяет пренебречь в нулевом приближении деформациями конфигурации, связанными с магнитным полем и рассматривать такие деформации как эффект второго порядка малости.

В рамках указанных приближений для описания недеформированных конфигураций мы воспользуемся следующей сферически-симметричной метрикой в Шварцшильдовских координатах:

$$ds^2 = e^{\nu} (dx^0)^2 - e^{\lambda} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (4)$$

где метрические функции  $\nu, \lambda$  зависят только от радиальной координаты  $r$ , а  $x^0 = ct$  есть временная координата. Используя этот линейный элемент, можно получить систему обыкновенных дифференциальных уравнений для метрических функций и спинорной жидкости. Такие уравнения мы будем называть *фоновыми*.

Решая эти фоновые уравнения и ограничиваясь рассмотрением дипольного поля, можно вычислить распределение этого поля на таком сферически-симметричном фоне, задаваясь определённой напряжённостью поля на границе звезды. В этом случае в уравнении Максвелла в качестве источника используется ток, который, однако, не может быть выбран произвольным образом, а должен удовлетворять условию интегрируемости [11,13].

В качестве источника вещества в гравитационных уравнениях Эйнштейна возьмём следующий тензор энергии-импульса (без учёта электромагнитного поля):

$$T_{\nu}^{\mu} = (\varepsilon + p)u^{\mu}u_{\nu} - \delta_{\nu}^{\mu}p, \quad (5)$$

где  $u_{\nu}$  – 4-скорость. Тогда гравитационные уравнения Эйнштейна дают, соответственно, уравнение Толмена-Оппенгеймера-Волкова и уравнение для массы:

$$\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+6\bar{\varepsilon}}}\right)\frac{d\bar{\varepsilon}}{dx} = -(\bar{\varepsilon} + \bar{p})\frac{v+x^3\bar{p}}{x(\delta x-2v)}, \quad (6)$$

$$\frac{dv}{dx} = x^2\bar{\varepsilon}, \quad (7)$$

где  $\delta = c^4\lambda_c/(4\pi G\varepsilon_0 L^2)$ . При записи этих уравнений мы ввели новую функцию  $M(r)$ , определяемую как

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r},$$

и воспользовались безразмерными переменными

$$x = \frac{r}{L}, \quad (\bar{p}, \bar{\varepsilon}) = \frac{(p, \varepsilon)}{\varepsilon_0}, \quad v = \frac{Mc^2}{4\pi\varepsilon_0 L^3}, \quad (8)$$

где  $L$  есть характерный размер системы. В свою очередь, функция  $v(r)$  играет роль текущей массы конфигурации, заключённой в радиусе  $r$ . Кроме того, воспользовавшись (5), из закона сохранения тензора энергии-импульса  $T_{\mu;\nu}^{\nu} = 0$  можно получить

$$\frac{d\bar{p}}{dx} + \frac{1}{2}(\bar{\varepsilon} + \bar{p})\frac{dv}{dx} = 0. \quad (9)$$

Выпишем теперь уравнение для магнитного поля. Для этого, следуя [11], выберем осесимметричный анзац для полоидального магнитного поля, создаваемого 4-током  $j_{\mu} = (0,0,0, j_{\phi})$ . Для такого тока электромагнитный 4-потенциал  $A_{\mu}$  имеет только  $\phi$ -компоненту  $A_{\mu} = (0,0,0, A_{\phi})$ . Учитывая ненулевые компоненты тензора электромагнитного поля  $F_{r\phi} = \partial A_{\phi}/\partial r$  и  $F_{\theta\phi} = \partial A_{\phi}/\partial\theta$ , общие уравнения Максвелла

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}(\sqrt{-g}F^{\mu\nu}) = -\frac{1}{c}j^{\mu}$$

для фоновой метрики (4) дают следующее эллиптическое уравнение на  $A_{\phi}$ :

$$e^{-\lambda}\frac{\partial^2 A_{\phi}}{\partial r^2} + \frac{1}{2}(v' - \lambda')e^{-\lambda}\frac{\partial A_{\phi}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A_{\phi}}{\partial\theta^2} - \frac{1}{r^2}\cot\theta\frac{\partial A_{\phi}}{\partial\theta} = -\frac{1}{c}j_{\phi}. \quad (10)$$

Его решение ищется путём разделения переменных в виде  $A_{\phi} = a(r)f(\theta)$ ,  $j_{\phi} = j(r)f(\theta)$ , что даёт следующее уравнение для функции  $a$ :

$$e^{-\lambda}a'' + \frac{1}{2}(v' - \lambda')e^{-\lambda}a' - \frac{l(l+1)}{r^2}a = -\frac{1}{c}j, \quad (11)$$

где штрих обозначает производную по  $r$ . В этой статье мы будем рассматривать физически наиболее интересный случай дипольного магнитного поля, когда  $l = 1$ . Тогда функция  $f = -\sin^2\theta$  и мы соответственно имеем  $A_{\phi} = -a(r)\sin^2\theta$ ,  $j_{\phi} = -j(r)\sin^2\theta$ .

Решение уравнения (11) может быть найдено после задания тока  $j$ . Как известно [11], ток  $j$  не может быть выбран произвольно, поскольку он должен удовлетворять условию интегрируемости. Исходя из этого условия может быть выведено следующее уравнение (его получение см. в [11,14]):

$$j' - \left[\frac{2}{r} - \frac{1}{2}v'\left(1 + \frac{\varepsilon'}{p'}\right)\right]j = 0. \quad (12)$$

Учитывая (9), это уравнение может быть проинтегрировано в виде  $j = c_0 r^2(\varepsilon + p)$ , где  $c_0$  – константа интегрирования. Подставляя это выражение в (11) и вводя безразмерные переменные

$$\bar{a} = \frac{8\pi G}{c^4}\sqrt{\varepsilon_0}a, \quad \bar{j} = \frac{1}{c\sqrt{\varepsilon_0}}j,$$

окончательно получим

$$e^{-\lambda}\frac{d^2\bar{a}}{dx^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx} - \frac{d\lambda}{dx}\right)e^{-\lambda}\frac{d\bar{a}}{dx} - \frac{2}{x^2}\bar{a} = -\frac{2\bar{c}_0}{\delta}x^2(\bar{\varepsilon} + \bar{p}), \quad (13)$$

где

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2v}{\delta x}, \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{2\bar{p}'}{\bar{\varepsilon} + \bar{p}}$$

Таким образом у нас имеется система трёх уравнений (6), (7) и (13) для трёх неизвестных функций  $\bar{\varepsilon}, v$  и  $\bar{a}$ . Её численное решение представлено в следующем разделе.

### 3 Численные результаты

В этом разделе мы численно проинтегрируем полученные выше уравнения. При этом мы будем искать решения с конечными размерами жидкости, на границе которой (при  $x = x_b$ ) плотность энергии и давление равны нулю. За пределами жидкости имеется внешнее асимптотически плоское пространство-время, содержащее магнитное поле.

Для получения решения необходимо задать граничные условия в окрестности центра конфигурации  $x = 0$ , которые мы выбираем в следующем виде:

$$\bar{\varepsilon} \approx \bar{\varepsilon}_c + \frac{1}{2}\bar{\varepsilon}_2 x^2, \quad v \approx \frac{1}{3}x^3, \quad \bar{a} \approx \frac{1}{2}\bar{a}_c x^2, \quad (14)$$

где  $\bar{\varepsilon}_c \equiv \varepsilon_c/\varepsilon_0$  есть безразмерная центральная плотность энергии. Свободные коэффициенты

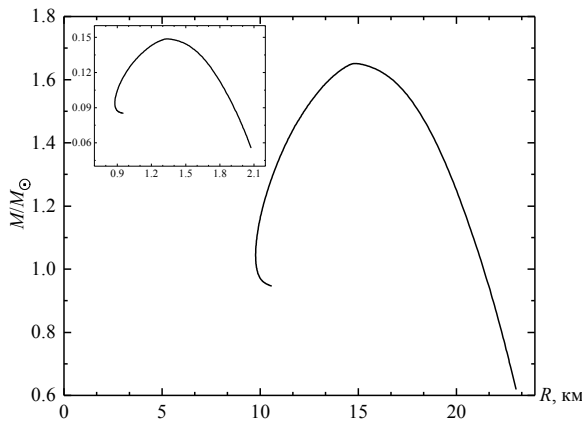
$\bar{a}_c$  и  $\bar{c}_0$ , входящие в (13) и (14), определяются исходя из требования получения асимптотически затухающего магнитного поля с заданной величиной на поверхности жидкости. Затухание магнитного поля определяется асимптотическим выражением на электромагнитный потенциал

$$\bar{a} \sim -x^2 \left[ \ln(1 - \alpha) + \alpha + \frac{1}{2}\alpha^2 \right].$$

В этом решении  $\alpha = 2v(x_b)/(\delta x)$  соответствует внешнему вакуумному решению для фоновой конфигурации с массой, сконцентрированной внутри радиуса  $x_b$ .

В свою очередь для напряжённости магнитного поля можно получить следующие тетрадные компоненты (т.е. компоненты, измеряемые локально инерциальным наблюдателем):

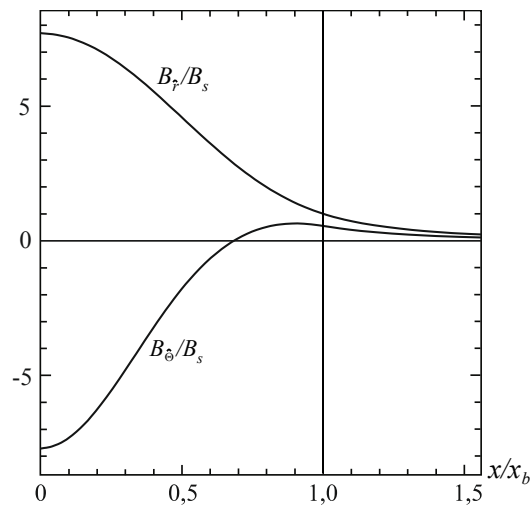
$$\begin{aligned} B_{\hat{r}} &= -F_{\hat{\theta}\hat{\phi}} = \frac{2c^4}{8\pi GL^2\sqrt{\varepsilon_0}} \frac{\cos\theta}{x^2} \bar{a}, \\ B_{\hat{\theta}} &= F_{\hat{r}\hat{\phi}} = -\frac{c^4}{8\pi GL^2\sqrt{\varepsilon_0}} \frac{\sin\theta}{x} e^{-\frac{\lambda}{2}\bar{a}'}. \end{aligned} \quad (15)$$



**Рисунок 1** – Соотношение масса-радиус для систем с массой спинора  $\mu = 0,3$  ГэВ (основной график) и  $\mu = 1$  ГэВ (график на вставке). Масса конфигураций дана в массах Солнца, радиус – в километрах

Результаты численного решения представлены на рис. 1 и 2. На рис. 1 показаны соотношения масса–радиус для рассматриваемых фоновых конфигураций при выборе двух типичных значений массы спинора  $\mu = 1$  ГэВ и  $\mu = 0,3$  ГэВ. Из этого рисунка видно, что в обоих случаях кривые имеют максимум, разделяющий устойчивые (расположены справа от максимума) и неустойчивые (расположены слева от

максимума) конфигурации. Такое поведение соотношения масса–радиус является типичным для релятивистских звёзд, включая нейтронные. При этом в случае  $\mu = 0,3$  ГэВ мы получаем массы и размеры систем, близкие к типичным характеристикам нейтронных звёзд. Это позволяет рассматривать исследуемые здесь системы как звёзды, образованные спинорной жидкостью (дираковские звёзды).



**Рисунок 2** – Тетрадные компоненты  $B_r$  и  $B_\theta$  магнитного поля (в единицах поверхностной напряженности магнитного поля  $B_s$  на полюсе), вычисленные на оси симметрии ( $\theta = 0$ ) и в экваториальной плоскости ( $\theta = \pi/2$ ) соответственно. Тонкая вертикальная линия соответствует границе жидкости  $x_b$

Продолжая аналогию с нейтронными звёздами, можно рассмотреть распределение магнитного поля вдоль радиуса конфигураций, представленное на рис. 2, где показаны значения компоненты  $B_r$  на оси симметрии ( $\theta = 0$ ) и значения компоненты  $B_\theta$  в экваториальной плоскости ( $\theta = \pi/2$ ). Данные распределения построены для систем, находящихся в окрестности максимума массы (см. рис. 1). Расчёты показывают, что для обеих выбранных масс спинора  $\mu = 1$  ГэВ и  $\mu = 0,3$  ГэВ распределение магнитного поля практически совпадают. При этом, как и в случае с нейтронными звёздами (см. статью [15]), компоненты поля имеют экстремумы в центре конфигурации. В этом отношении системы со спинорной жидкостью также похожи на нейтронные звёзды.

Отметим, что уравнения (11) и (12) инвариантны относительно преобразований  $a, j \rightarrow \kappa a, \kappa j$ , где  $\kappa$  – любая константа. Соответственно компоненты магнитного поля, задаваемые ур. (15), преобразуются как  $B_r, B_\theta \rightarrow \kappa B_r, \kappa B_\theta$ . Тогда, если одновременно заменить  $B_s \rightarrow \kappa B_s$ , представленные на рис. 2 графики не будут меняться при любой величине поля, а размерные значения (в гауссах) напряженности магнитного поля могут быть получены путём умножения этих графиков на необходимое поверхностное значение  $B_s$ . Очевидно, что такая масштабная инвариантность будет иметь место только в рамках применяемого здесь приближения, когда можно пренебречь влиянием магнитного поля на

фоновые конфигурации. В частности, полученные графики могут быть использованы при рассмотрении магнитных полей с напряженностями  $B_s \sim 10^{12} - 10^{15}$  Гс, типичными для нейтронных звёзд.

Суммируя полученные результаты, мы рассмотрели компактные сильно гравитирующие конфигурации, состоящие из замагниченной спинорной жидкости. Последняя моделировалась с использованием эффективного уравнения состояния, получаемого из рассмотрения предельного случая больших отрицательных значений константы самодействия нелинейного спинорного поля. Для такого случая удаётся получить конфигурации с массами порядка массы Чандрасекара и размерами порядка 10 километров (параметры, типичные для нейтронных звёзд). Это позволяет называть такие конфигурации дираковскими звёздами.

Используя найденные равновесные конфигурации в качестве фоновых, исследована структура осесимметричного полоидального магнитного поля, создаваемого тороидальным электрическим током. Для этого мы выбрали типичные значения массы спинорного поля  $\mu \sim 1$  ГэВ, для которых построены соответствующие зависимости масса-радиус (см. рис. 1). Эти зависимости аналогичны кривым, получаемым для других релятивистских конфигураций, включая нейтронные звёзды.

Как и в случае рассмотрения магнитного поля нейтронных звёзд [15] здесь мы выбрали

физические параметры таким образом, чтобы с точки зрения удалённого наблюдателя рассматриваемые в этой статье конфигурации обладали бы напряжениями поверхностного магнитного поля, типичными для нейтронных звёзд. В рамках такого подхода показано, что получаемые здесь объекты обладают распределениями внутреннего и внешнего магнитного поля,

качественно и количественно похожими на магнитное поле нейтронных звёзд.

### Благодарности

Авторы благодарны гранту №BR05236494 Министерства образования и науки Республики Казахстан за финансовую поддержку.

### Литература

- 1 Rajaraman R. Solitons and instantons: An introduction to solitons and instantons in quantum field theory. – North-Holland Publishing Company: Amsterdam, New York, Oxford, 1982. – 409 p.
- 2 Lawrie I. A unified grand tour of theoretical physics. – Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia, 2002. – 580 p.
- 3 Schunck F.E., Mielke E.W. General relativistic boson stars // *Class. Quant. Grav. Phys. Rev.* – 2003. – V. 20. – P. R301-R356.
- 4 Bartnik R. and Mckinnon J. Particle-Like Solutions of the Einstein Yang-Mills Equations // *Phys. Rev. Lett.* – 1988. – V. 61. – P. 141.
- 5 Brito R., Cardoso V., Herdeiro C.A.R. and Radu E. Proca stars: Gravitating Bose-Einstein condensates of massive spin 1 particles // *Phys. Lett.* – 2016. – V. B752. – P. 291-295.
- 6 Finster F., Smoller J. and Yau S. T. Particlelike solutions of the Einstein-Dirac equations // *Phys. Rev.* – 1999. – V. D59:104020. -19 p.
- 7 Herdeiro C.A.R., Pombo A.M. and Radu E. Asymptotically flat scalar, Dirac and Proca stars: Discrete vs. continuous families of solutions // *Phys. Lett.* -2017. -V. B773. -P. 654-662.
- 8 Dzhunushaliev V. and Folomeev V. Dirac stars supported by nonlinear spinor fields // E-print arXiv:1811.07500 [gr-qc].
- 9 Dzhunushaliev V. and Folomeev V. Dirac star in the presence of Maxwell and Proca fields // E-print arXiv:1901.09905 [gr-qc].
- 10 Colpi M., Shapiro S. L., Wasserman I. Boson stars: Gravitational equilibria of selfinteracting scalar fields // *Phys. Rev. Lett.* – 1986. – V. 57. – P. 2485-2488.
- 11 Konno K., Obata T., Kojima Y. Deformation of relativistic magnetized stars // *Astron. Astrophys.* -1999. -V. 352. -P. 211-216.
- 12 Sotani H., Kokkotas K. D., Stergioulas N. Torsional Oscillations of Relativistic Stars with Dipole Magnetic Fields // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* – 2007. – V. 375. – P. 261-277.
- 13 Bocquet M., Bonazzola S., Gourgoulhon E., Novak J. Rotating neutron star models with magnetic field // *Astron. Astrophys.* – 1995. – V. 301. – P. 757-775.
- 14 Aringazin A., Dzhunushaliev V., Folomeev V., Kleihaus B. and Kunz J. Magnetic fields in mixed neutron-star-plus-wormhole systems // *JCAP.* -2015. – V. 1504:005. – 22 p.
- 15 Folomeev V. and Dzhunushaliev V. Magnetic fields in anisotropic relativistic stars // *Phys. Rev. D* -2015. – V. 91:044040. – 10 p.

### References

- 1 R. Rajaraman, Solitons and instantons: An introduction to solitons and instantons in quantum field theory, (North-Holland Publishing Company: Amsterdam, New York, Oxford, 1982), 409 p.
- 2 I. Lawrie, A unified grand tour of theoretical physics, (Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia, 2002) – 580 p.
- 3 F.E. Schunck & E.W. Mielke, *Class. Quant. Grav. Phys. Rev.*, 20, R301-R356 (2003).
- 4 R. Bartnik & J. Mckinnon, *Phys. Rev. Lett.*, 61, 141 (1998).
- 5 R. Brito, V. Cardoso, C.A.R. Herdeiro and E. Radu, *Phys. Lett.*, B752, 291-295 (2016).
- 6 F. Finster, J. Smoller and S.T. Yau, *Phys. Rev.*, V.D59, 104020 (19 p.) (1999).
- 7 C.A.R. Herdeiro, A.M. Pombo and E. Radu, *Phys. Lett.*, B773, 654-662 (2017).
- 8 V. Dzhunushaliev & V. Folomeev, E-print arXiv:1811.07500 [gr-qc].
- 9 V. Dzhunushaliev & V. Folomeev, E-print arXiv:1901.09905 [gr-qc].
- 10 M. Colpi, S.L. Shapiro, I. Wasserman, *Phys. Rev. Lett.*, 57, 2485-2488 (1986).
- 11 K. Konno, T. Obata, Y. Kojima, *Astron. Astrophys.*, 352, 211-216 (1999).
- 12 H. Sotani, K.D. Kokkotas, N. Stergioulas, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 375, 261-277 (2007).
- 13 M. Bocquet, S. Bonazzola, E. Gourgoulhon, J. Novak, *Astron. Astrophys.*, 301, 757-775 (1995).
- 14 A. Aringazin, V. Dzhunushaliev, V. Folomeev, B. Kleihaus and J. Kunz, *JCAP*, 1504:005, 22 (2015).
- 15 V. Dzhunushaliev & V. Folomeev, *Phys. Rev. D*, 91, 044040 (2015).