МРНТИ 29.01.07, 29.05.41, 29.05.43

Абишев М.Е[1]., Кеведо Э[2]., Токтарбай С[1]., Мансурова А[1].,
Муратхан А[1]., Токтарбек С[1]., Иманбай С[1].

[1]Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Казахстан, г. Алматы
[2]Институт ядерных наук, Национальный автономный университет Мексики, Мексика, г. Мехико
e-mail: saken.yan@yandex.com

СТАЦИОНАРНОЕ ВАКУУМНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА

Мы исследуем стационарное обобщение статической метрики. Статическая *q*-метрика является вариантом метрики Zipoy-Voorhees и простейшим обобщением метрики Шварцшильда, содержащего квадрупольный параметр. В настоящей работе мы вводим стационарный вариант *q*-метрики, и эта стационарная метрика находится с помощью комплексного потенциала Эрнста *E*. Метрическая функция, определяемая двумя дифференциальными уравнениями первого порядка, которые могут быть интегрированы квадратурами, как только потенциала Эрнста *E* известно. Чтобы получить явную форму нового потенциала Эрнста, мы используем методы генерации решений, которые позволяют генерировать стационарные решения из статического решения. Он обладает тремя независимыми параметрами, связанными с массой, квадрупольным моментом и моментом импульса. Мы исследуем геометрические и физические свойства этого точного стационарного вакуумного решения уравнений Эйнштейна и показываем, что его может быть использовать для описания внешнего гравитационного поля вращающихся, аксиально-симметричных компактных объектов. По данным инвариантного релятивистского определения Героха, мы анализируем мультипольную структуру, используя соответствующую функцию Эрнст и вычисляем десять релятивистские мультипольные моменты для статического квадруполя метрики. При особом выборе параметров получаем известные решения. т. е., внешнее решение Шварцшильда, которые найдены с исчезающим квадруполем и вращающимся параметром. Мультипольные моменты известного решения Керра задаются исчезающим квадрупольным параметром и ненулевым вращающимся параметром.

Ключевые слова: стационарная метрика, квадрупольный момент, потенциал Эрнста.

Abishev M.E[1]., Quevedo H[2]., Toktarbay S[1]., Mansurova A[1].,
Muratkhan A[1]., Toktarbek S[1]., Imanbay S[1].

[1]Al-Farabi Kazakh National University, Kazakhsan, Almaty
[2]Institute of Nuclear Sciences, National Autonomous University of Mexico, Mexico, Mexico
e-mail: saken.yan@yandex.com

A stationary vacuum solution of Einstein's field equations

We investigate a stationary generalization of the static metric. The static *q*-metric is a variant of the Zipoy-Voorhees metric and simplest generalization of the Schwarzschild metric, containing a quadrupole parameter. In the present work, we introduce the stationary version of the *q*-metric, and this stationary metric find by using the complex Ernst potential *E*. The metric function determined by two first-order differential equations that can be integrated by quadratures once *E* is known. To obtain an explicit form of the new Ernst potential, we use the solution generation techniques that allows us to generate stationary solutions from a static solution. It possesses three independent parameters related to the mass, quadrupole moment and angular momentum. We investigate the geometric and physical properties of this exact stationary solution of Einstein's vacuum equations and show that it can be used to describe the exterior gravitational field of rotating, axially symmetric, compact objects. According to the relativistic invariant Geroch definition, we analyze multipole structure using the corresponding Ernst function and we compute the lowest ten relativistic multipole moments for the static quadrupole metric. The particular choice of parameters we obtain the known solutions. i.e., the exterior Schwarzschild Solution find with the vanishing quadrupole and rotating parameter, Corresponding static *q*-metric find with the vanishing rotating parameter and non-zero quadrupole parameter. The multipole moments of the well-known Kerr solution are given by the vanishing quadrupole parameter and non-zero rotating parameter.

Key words: stationary metric, quadrupole moment, Ernst potential.

Әбішев М.Е[1]., Кеведо Э[2]., Тоқтарбай С[1]., Мансурова А[1].,
Мұратхан А[1]., Тоқтарбек С[1]., Иманбай С[1].

[1]Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Қазақстан, Алматы қ.
[2]Ядролық ғылымдар институты, Мексика ұлттық автономды университеті, Мексика, Мехико қ.
e-mail: saken.yan@yandex.com

Эйнштейннің өріс теңдеулерінің стационар вакуумдық шешімі

Біз статикалық метриканың стационар қорытылуын зерттейміз. Статикалық *q*-метрика Zipoy-Voorhees метрикасының нұсқасы және квадрупольді параметрі бар Шварцшильд метрикасының қарапайым жалпылауы болып табылады. Осы жұмыста біз *q*-метриканың стационар нұсқасын енгіземіз және бұл стационар метрика Эрнсттің кешенді потенциалы *E* көмегімен табылады. Бірінші ретті екі дифференциалдық теңдеумен анықталатын метрикалық функция Эрнст потенциалы *E* белгілі болған жағдайда квадратуралармен интеграциялануы мүмкін. Эрнсттің жаңа потенциалының айқын түрін алу үшін біз статикалық шешімнен стационар шешімдерді генерациялауға мүмкіндік беретін шешімдерді генерациялау әдістерін пайдаланамыз. Ол масса, квадрупольді момент және бұрыштық моментімен байланысты үш тәуелсіз параметрге ие. Біз Эйнштейн теңдеулерінің дәл стационарлық вакуумдық шешімінің геометриялық және физикалық қасиеттерін зерттейміз және оны айналмалы, аксиальды-симметриялы компактілі объектілердің сыртқы гравитациялық өрісін сипаттау үшін пайдалануға болатынын көрсетеміз. Герохтың инвариантты релятивистік анықтамасы бойынша, біз сәйкес Эрнст функциясын пайдалана отырып, мультипольдық құрылымды талдаймыз және метриканың статикалық квадруполы үшін ең аз он релятивистік мультипольдық моменттерін есептейміз. Параметрлерді ерекше таңдағанда біз белгілі шешімдерді аламыз, яғни, жойылып бара жатқан квадрупольмен және айналмалы параметрмен табылған Шварцшильдтың сыртқы шешімі.Еррдің белгілі шешімдегі мультиполдық моменттер жойылып бара жатқан квадрупольді параметрімен және нөлдік емес айналмалы параметрімен қойылады.

Түйін сөздер: стационар метрика, квадрупольді момент, Эрнст потенциалы.

Введение

Теоремы единственности черной дыры [1] утверждают, что наиболее общим асимптотически плоским решением уравнений вакуумного поля Эйнштейна с регулярным горизонтом является метрика Керра, которая обладает только двумя независимыми параметрами, соответствующими массе и угловому моменту. В терминах мультипольных моментов это утверждение равносильно тому, что черные дыры могут иметь только массовые монопольные и угловые дипольные моменты. Все высшие мультипольные моменты должны исчезнуть, вероятно, в виде гравитационных волн, во время гравитационного коллапса произвольного вращающегося распределения, финальное положение которых является черной дырой.

С другой стороны, астрофизические компактные объекты включают в себя не только черные дыры, но и обычные звезды, нейтронные звезды, белые карлики, планеты и т. д. Для описания гравитационного поля таких объектов можно ожидать, что высшие мультипольные моменты могут сыграть важную роль. Рассмотрим частный случай статического распределения масс с квадрупольным моментом, описывающим отклонение от сферической симметрии. Теоремы единственности показывают, что в случае исчезновения квадрупольного момента существует только одно вакуумное решение, а именно решение Шварцшильда. Как только рассматривается ненулевой квадруполь, единственность более не справедлива, и поэтому в принципе могут существовать бесконечное число вакуумных решений с массовыми и квадрупольными параметрами. Первое вакуумное решение с квадрупольным параметром был получен Вейлем в 1917 г. [2]. На сегодняшний день известно много других решений, включая их стационарные обобщения [3-12]. Многие другие статические решения могут быть сгенерированы с использованием того факта, что уравнения поля линейны и путем применения некоторых дифференциальных операторов к гармонике [13]. Одной из распространенных проблем всех этих решений является то, что они трудно обрабатываются из-за их сложной структуры. Недавно было предложено переосмыслить метрику Zipoy-Voorhees [14, 15] как обобщение метрики Шварцшильда с квадрупольным параметром (q-метрика). Насколько нам известно, q-метрика является простейшим статическим обобщением пространства Шварцшильда с дополнительным параметром, определяющим независимый массовый квадрупольный момент.

Целью настоящей работы является получение стационарного обобщения q-метрики с учетом вращения и распределения квадрупольной массы. Мы покажем, что это обобщение удовлетворяет всем физическим условиям, которые рассматриваются как кандидаты для описания внешнего гравитационного поля деформированных компактных объектов.

q-метрика и ее свойства

В сферических координатах q-метрику можно выразить следующим образом [16]

$$ds^2 = h^{1+q}dt^2 - h^{-q}\left[\left(1+\frac{m^2\sin^2\theta}{r^2 h}\right)^{-q(2+q)}\left(\frac{dr^2}{h}+r^2 d\theta^2\right)+r^2\sin^2\theta d\varphi^2\right],$$

$$h = 1-\frac{2m}{r}. \tag{1}$$

Это асимптотически плоское вакуумное решение уравнение Эйнштейна. Физическую интерпретацию параметров m и q можно определить путем вычисления инвариантных мультиполей Героха [17]:

$$M_0 = (1+q)m\,,$$
$$M_2 = -\frac{m^3}{3}q(1+q)(2+q)\,. \tag{2}$$

Более высокие моменты пропорциональны m и q могут быть полностью переписаны через M_0 и M_2; соответственно, параметры m и q определяют массу и квадруполь. В предельном случае $q = 0$ сохраняется только монополь $M_0 = m$, как в пространстве Шварцшильда. В пределах $m = 0$ с произвольным q и $q = -1$ с произвольным m все моменты исчезают одинаково, и пространство становится плоским. Отклонение от сферической симметрии описывается квадрупольным моментом M_2, положительным для вытянутых источников и отрицательным для сплющенных источников. Так как полная масса M_0 должна быть положительной, то мы имеем $q > -1$ (мы предполагаем $m > 0$).

Исследование скаляра Кретчмана показывает, что гиперповерхность $r = 2m$ всегда сингулярна для любого ненулевого значения q. Кроме того, $r = 0$ также является сингулярностью. В зависимости от значения q могут появиться дополнительные сингулярности, которые всегда находятся внутри внешней сингулярности, расположенной при $r = 2m$.

Все эти свойства показывают, что q-метрику можно использовать для описания внешнего гравитационного поля деформированного распределения масс. Он также описывает поле голой сингулярности, расположенного при $r = 2m$. С физической точки зрения это не является проблемой, потому что можно «покрыть голую» сингулярность внутренним решением, которое должно быть сопоставлено с внешней q-метрикой при некотором радиусе $r_{matching} > 2m$.

Стационарная *q*-метрика

Стационарное пространство-время представляется стационарной метрикой типа Вейля-Льюиса-Папапетру (WLP) в вытянутых сфероидальных координатах ($t; x; y; z$):

$$ds^2 = -f(dt-\omega d\phi)^2 + \frac{\sigma^2}{f}\left[e^{2\gamma}\left(x^2-y^2\right)\left(\frac{dx^2}{x^2-1}+\frac{dy^2}{1-y^2}\right)+\left(x^2-1\right)\left(1-y^2\right)d\phi^2\right], \tag{3}$$

где $\sigma = m^2 + a^2$ и все метрические функции зависят только от x и y.

Оказывается, полезно ввести комплексный потенциал Эрнста [18-19]

$$\mathrm{E} = f + i\Omega, \tag{4}$$

где теперь функция Ω определяется уравнениями

$$\sigma\left(x^2-1\right)\Omega_x = f^2\omega_y,$$

$$\sigma\left(1-y^2\right)\Omega_y = -f^2\omega_x. \tag{5}$$

Отсюда видно, что если задан потенциал E, метрическую функцию f можно найти алгебраически, и метрическая функция ω вычисляется квадратурами из уравнений (6). Более того, метрическая функция γ определяется двумя дифференциальными уравнениями первого порядка, которые могут быть интегрированы квадратурами, как только E известно. Отсюда следует, что вся информация о метрике (3) содержится в потенциале Эрнста E (4).

Чтобы получить явный вид нового потенциала Эрнста, мы используем методы генерации решений [20], которые позволяют генерировать стационарные решения из статического решения. Если взять в качестве семенного решения q-метрику в вытянутых сфероидальных координатах, необходимо решить несколько дифференциальных уравнений, чтобы получить явный вид потенциала Эрнста. Окончательное выражение для потенциала Эрнста можно записать в виде

$$\varepsilon = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^q \left[\frac{x-1+\left(x^2-1\right)^{-q} d_+}{x+1+\left(x^2-1\right)^{-q} d_-}\right], \tag{6}$$

где

$$d_\pm = -\alpha^2\left(x\pm1\right)h_+h_-\left(x^2-1\right)^{-q} + \\ +i\alpha\left[y\left(h_+ + h_-\right) \pm \left(h_+ - h_-\right)\right] \tag{7}$$

$$h_\pm = \left(x \pm y\right)^{2q}$$

Вытянутые сфероидальные координаты связаны со сферическими координатами через:

$$x = \frac{r}{\sigma} - 1,$$

$$y = \cos\theta.$$

Здесь мы имеем новый произвольный параметр α.

Потенциалы Папапетру

$$f = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}},$$

$$\omega = -2\left(\alpha + \sigma\frac{C}{\mathrm{A}}\right),$$

$$e^{2\gamma} = \frac{1}{4}\left(1+\frac{M}{\sigma}\right)^2 \frac{\mathrm{A}}{\left(x^2-1\right)^{1+q}} \left[\frac{x^2-1}{x^2-y^2}\right]^{(1+q)^2},$$

где

$$\mathrm{A} = a_+a_- + b_+b_-,$$

$$\mathrm{B} = a_+^2 + b_+^2,$$

$$C = \left(x+1\right)^q \left[x\left(1-y^2\right)\left(\lambda+\eta\right)a_+ + y\left(x^2-1\right)\left(1-\lambda\eta\right)b_+\right],$$

где

$$a_\pm = \left(x\pm1\right)^q \left[x\left(1-\lambda\eta\right) \pm \left(1+\lambda\eta\right)\right],$$

$$b_\pm = \left(x\pm1\right)^q \left[y\left(\lambda+\eta\right) \mp \left(\lambda-\eta\right)\right].$$

и

$$\lambda = \alpha\left(x^2-1\right)^{-q}\left(x+y\right)^{2q},$$

$$\eta = \alpha\left(x^2-1\right)^{-q}\left(x-y\right)^{2q}.$$

Как и ожидалось, в предельном случае α=0 мы получаем q-метрику. Анализируя поведение потенциала Эрнста, можно доказать, что это новое решение является асимптотически плоским. Вычисление соответствующих метрических функций подтверждает этот результат. Более того, поведение оси $y = \pm 1$ показывает, что оно не имеет сингулярности вне области, которая всегда находится внутри радиуса $x_s = \frac{m}{\sigma}$, что в случае обращения в нуль α соответствует внешней сингулярности, расположенной в точке $r_s = 2m$.

Заключение

Мы представили стационарное обобщение статической q-метрики, которая является простейшим обобщением метрики Шварцшильда, содержащей квадрупольный параметр. Новое решение было дано в терминах потенциала Эрнста, из которого все метрические функции могут быть получены алгебраически или квадратурами.

Стационарная q-метрика оказывается асимптотически плоской и свободной от сингулярностей вне области, определяемой пространственной координатой $x_s = \frac{m}{\sigma}$, которая в статическом предельном случае расположена на сингулярной гиперповерхности $r_s = 2m$. Новое решение содержит в качестве частного случая решение Керра, указывающее, что новый свободный параметр может быть связан с вращением распределения масс. Мы заключаем, что стационарная q-метрика может быть использована для описания внешнего гравитационного поля вращающегося деформированного распределения масс.

Чтобы найти физический смысл параметров, входящих в новую метрику, можно вычислить мультипольные моменты, определенные Герохом [17], используя предложенную в [21] процедуру, которая позволяет выполнять вычисления непосредственно из потенциала Эрнста. Это является задачей будущих исследований.

Литература

1 Heusler M. Black Holes Uniqueness Theorems // Cambridge University Press, Cambridge, UK. – 1996. – 264 p

2 Weyl H. Zur Gravitationstheorie, Annalen der Physik // WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim. – 1917. – Vol.54. – P.117-145. (in German)

3 Erez G and Rosen N. The Gravitational field of a particular possessing a multipole moment // Bull. Research Council Israel. – 1959. – Vol.8F. – P.47.

4 Dietz W and Hoenselaers C. A class of bipolar vacuum gravitational fields // Proc. of the Royal Society, UK. – 1982. Vol.382. – P. 221.

5 Islam J. N. Rotating Fields in General Relativity. – Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1985. – 132 p

6 Manko V.S and I.D. Novikov I.D. Generalizations of the Kerr and Kerr-Newman metrics possessing an arbitrary set of mass-multipole moments // Clas.Quant.Grav., UK. – 1992. – Vol.9. – P.2477-2787.

7 Castejon-Amenedo J and Manko V.S. On a stationary rotating mass with an arbitrary multipole structure. // Clas.Quant.Grav., UK. – 1990. – Vol.7. – P.779-785.

8 Manko V.S. On the description of the external field of a static deformed mass // Clas.Quant.Grav., UK.– 1990. – Vol.**7**. – P.209-211.

9 Manko V.S., Mielke E.W., Sanabria-Gomez J.D. Exact solution for the exterior field of a rotating neutron star // Phys.Rev.D. – 2000. – Vol.61. – Iss.8. – R081501.

10 Pachon L.A, Rueda J.A., Sanabria-Gomez J.D. Realistic exact solution for the exterior field of a rotating neutron star. // Phys.Rev.D. – 2006. – Vol.73. – Iss. 10. – 104038.

11 Quevedo H. and Mashhoon B. Generalizations of the Kerr spacetime. // Phys.Rev.D. – 1991. – Vol.43. – Iss. 12. – 104038.

12 Stephani H., Kramer D., MacCallum M. A. H., Hoenselaers C. and Herlt E. Exact Solutions of Einstein's Field Equations. – Cambridge University Press, Cambridge, UK. – 2003. – 732 p.

13 Quevedo H. On the exterior gravitational field of a mass with a multipole moment. // General Relativity and Gravitation. – 2011. – Vol.43. – P.1013-1023.

14 Zipoy D. M. Topology of Some Spheroidal metrics. // Journal of Mathematical Physics. – 1966. – Vol.7. – P.1137-1143.

15 Voorhees B. Static Axially Symmetric Gravitational Fields // Phys.Rev.D. – 1970. – Vol.2. – P.2119-2122.

16 Quevedo H. Mass Quadrupole as a source of naked singularities // International Journal of Modern Physics. – 2011. – Vol.20. – P.1179-1187.

17 Geroch R. Multipole Moments // Journal of Mathematical Physics. – 1970. – Vol.11. – P.1955-1961.

18 Ernst F. J. New Formulation of the Axially Symmetric Gravitational Field problem // Phys.Rev.D. – 1968. – Vol.167. – P.1175-1177.

19 Toktarbay S., Quevedo H. A stationary q-metric // Gravitation and Cosmology. – 2014. – Vol.20. – P.252-254.

20 Dietz W and Hoenselaers C (eds.). Solutions of Einstein's Equations: Techniques and Results // Springer-Verlag, Berlin. – 1984.

21 Quevedo H. Multipole Moments in General Relativity // Fortschr.Phys. – 1990. – Vol.38. – P.733.

References

1 M. Heusler. Black Holes Uniqueness Theorems (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1996), 264 p.

2 H. Weyl,Ann. Physik 54, 117-145 (1917). (in German)

3 G. Erez and N. Rosen, Bull. Res. Council Israel 8F, 47 (1959).

4 W. Dietz and C. Hoenselaers, Proc.R.Soc.(London) 382, 221 (1982).

5 J.N. Islam, Rotating Fields in General Relativity (Cambridge University Press, 1985), 132p.

6 V.S. Manko and I.D. Novikov, Class.QuantumGrav. 9, 2477-2487 (1992).

7 J. Castejon-Amenedo and V.S. Manko, Class. Quantum Grav. 7, 779-785 (1990).
8 V.S. Manko, Class. Quantum Grav.7, 209-211 (1990).
9 V.S. Manko, E.W. Mielke, and J.D. SanabriaGomez, Phys.Rev. D61, R081501 (2000).
10 L.A. Pachon, J.A. Rueda, and J.D. SanabriaGomez, Phys.Rev. D73, 104038 (2006).
11 H. Quevedo and B. Mashhoon, Phys.Rev. D 43, 3902 (1991).
12 H. Stephani, D. Kramer, M.A.H. MacCallum, C. Hoenselaers, and E. Herlt, Exact Solutions of Einstein's Field Equations (Cambridge University Press,Cambridge,UK, 2003), 732 p.
13 H. Quevedo, Gen.Rel.Grav.19, 1013-1023 (1987).
14 D. M.Zipoy, J.Math.Phys.7, 1137-1143 (1966).
15 B. Voorhees, Phys.Rev.D2, 2119-2122 (1970).
16 H. Quevedo, Int.J.Mod.Phys. 20, 1179-1187 (2011).
17 R. Geroch, J.Math.Phys.11, 1955-1961 (1970).
18 F. J. Ernst, Phys.Rev. 167, 1175-1177 (1968);
19 S. Toktarbay, H. Quevedo. Grav.Cosmol. 20, 252-254 (2014).
20 W. Dietz and C. Hoenselaers (eds.), Solutions of Einstein's Equations: Techniques and Results (Springer-Verlag, Berlin, 1984).
21 H. Quevedo, Fortschr.Phys. 38, 733 (1990).