

**Жаңабаев З.Ж., Үсіпов Н.М.\***

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Қазақстан, Алматы қ.,  
\*e-mail: unurzhan55@gmail.com

## **ГАЛАКТИКАЛАР ЖИЫҢДАРЫНЫҢ МАСШТАБТЫ-ИНВАРИАНТТЫЛЫҒЫ**

Астрофизикалық бақылауларға сәйкес Әлемнің ұлғаюы галактиканың қашықтығының уақыт бойынша өзгеру жылдамдығына пропорционалдығымен сипатталады. Пропорционалдылық коэффициентінің мәні – Хаббл тұрақтысы шамамен 5% дәлдікпен бақылаулармен анықталады. Хаббл тұрақтысын әртүрлі әдістермен өлшеуі өзгеше мәндеріне ие екенін атап өткен жөн. Бұл жұмыста гравитациялық толқынның теңдеуі Эйнштейн теориясынан шығатын координатаға байланысты тербеліс теңдеуі түрінде алынды. Теңдеу динамикалық жүйе түрінде алынды. Осы теңдеулер жүйесінің сандық талдауының нәтижелері алынды. Хаббл параметрінің әртүрлі мәндері үшін динамикалық жүйенің толқын түрі, фазалық портреті алынып, аттракторлардың корреляциялық өлшемділігі анықталды. Әлемнің ұлғаюы скейлинг көрсеткішінің максимал мәнімен сипатталады, бұл сандық мәң біздің бұрынғы жұмыстарда теориялық түрде көрсетілген. Алынған мәндер  $D \approx 1.465, \gamma \approx 0.465$ .

**Түйін сөздер:** гравитация, өлшемділік, аттрактор, фрактал, Хаббл.

Zhanabaev Z.Zh., Ussipov N.M.

Al-Farabi Kazakh National University, Kazakhstan, Almaty,  
\*e-mail: unurzhan55@gmail.com

### **Scale – invariance of many galaxies**

According to astrophysical observations, the expansion of the Universe is described by the time variation of the galaxy's distance by the proportion of speed. The value of the coefficient of proportionality – the Hubble constant is determined by observations with an accuracy of about 5%. It should be noted that measurements by different methods give slightly different values of the Hubble constant. In this article, the gravitational wave equation was obtained in the form of the oscillation equation from the Einstein theory depending on the coordinates. The equation was written as a dynamic system. The numerical results analysis of the system of equations is obtained. For different values of the Hubble parameter, the forms of gravitational waves, phase space of the dynamical system were taken and the dimensions of the attractors were determined. The expansion of the universe is characterized by the maximum value of the scaling index; this numerical value was mentioned theoretically in our early works. The obtained values are  $D \approx 1.465$  and  $\gamma \approx 0.465$ .

**Key words:** gravitation, dimension, attractor, fractal, Hubble.

Жанабаев З.Ж., Усипов Н.М.

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Казахстан, г. Алматы,  
\*e-mail: unurzhan55@gmail.com

### **Масштабная инвариантность множества галактик**

Согласно астрофизическим наблюдениям расширение Вселенной описывается изменением расстояния галактики по времени пропорциональностью скорости. Значение коэффициента пропорциональности – постоянная Хаббла определено наблюдениями с точностью около 5%.

Следует отметить, что измерения разными методами дают несколько различающиеся значения постоянной Хаббла. В этой работе уравнение гравитационной волны было получено в виде уравнения колебания из теории Эйнштейна в зависимости от координат. Уравнение было записано в виде динамической системы. Получены результаты численного анализа системы уравнений. Для различных значений параметра Хаббла были взяты формы гравитационных волн, фазовые портреты динамической системы и определены размерности аттракторов. Расширение вселенной характеризуется максимальным значением показателя скейлинга, это численное значение было упомянуто теоретически в наших ранних работах. Полученные значения составляют  $D \approx 1.465, \gamma \approx 0.465$ .

**Ключевые слова:** гравитация, размерность, аттрактор, фрактал, Хаббл.

## Кіріспе

Релятивистік космологияда [1] кеңістіктің қисықтығының уақытқа тәуелділігі гравитациялық өріс үшін Эйнштейн теңдеуімен анықталады [2]. Түрлі геометрияға ие белгілі модельдер: нөлдік (евклид), оң (жабық) және теріс (ашық), олардың барлығы – Үлкен жарылысқа әкеледі [3]. Эйнштейн теңдеуіндегі Әлемнің үдемелі ұлғаюын сипаттау үшін бақылауларды сипаттау мүмкіндігін негіздей алатын  $\Lambda$  космологиялық тұрақтысы пайдаланады.

Біз тек қана бақылауларға сәйкес келетін еңбектерді [4, 5] атап өтеміз. [4] жұмыста Пуанкаренің додекаэдралды кеңістік түріндегі Әлемнің топологиясы ұсынылған, спектр енінің бөлігінен реликтивті сәулеленудің энергия тығыздығының анизотропиясын сипаттауға болады. Дегенмен, негіз ретінде Хаббл тұрақтысының өлшенген мәні қабылданды. [6] жұмыста космологиялық тұрақтыға пропорционалды «әлемдік антигравитация» күшін ескеретін теориямен «Hubble space telescope» телескобы бойынша алынған галактикалар үшін жылдамдық-қашықтық диаграммасы сипатталған.

Осы мәселелер бойынша зерттеулердің көп санына қарамастан [1-22] негізсіз тұрақтыларды пайдаланбай, теориялық тұрғыдан бақылаудың басты фактілері: галактикалардың кластерлену үлгілері, нөлдік гравитациялық аймақтардағы галактикалардың хаостық орналасуы, галактикалардың үдемелі шашырауы, ғаламдық Хаббл тұрақтысының болуы және т.б. түсіндірілмеді. Зерттеушілер [2-22] әлемнің топологиясын онда дамитын физикалық үдерістерге сәйкес келетін кеңістік-уақыттық теорияның қажеттілігін көрсетеді. Соңғы шыққан мақалада [21]  $\Lambda$ CDM моделінің космологиялық тұрақтысы кеңістіктің масштабты инварианттық коэффициентімен байланыстырылды. Бұл бағыт Әлемнің үдемелі кенеюін сипаттауы мүмкін.

## Гравитациялық толқын теңдеуі

Гравитациялық өріс үшін Эйнштейн теңдеуін қолданамыз:

$$R_{ij} = 8\pi G \left( T_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} T \right), \quad (1)$$

бұл жердегі  $R_{ij}$  – кеңістік қисықтығының тензоры,  $T_{ij}$  – энергия-импульс тензоры,  $g_{ij}$  – метрикалық тензор,  $G$  – гравитациялық тұрақты, жарық жылдамдығы  $c = 1$  деп қабылданған.

Материяның таралуының тене-тенсіздігі кеңістік геометриясында аз ауытқуға алып келеді деп қабылдаймыз. Сонда синхронды санақ жүйесінде аз ауытқулары бар  $|h_{\alpha\beta}(R, t)| \ll 1$  метрикалық тензор элементтерін келесідей анықтаймыз:

$$g_{00} = 1, \quad g_{0\alpha} = 0,$$

$$g_{\alpha\beta} = -a^2(t) [\delta_{\alpha\beta} - h_{\alpha\beta}(R, t)], \quad (2)$$

мұндағы  $a(t)$  – Әлем ұлғаюының масштабты факторы,  $h_{\alpha\beta}(R, t)$  – метрикалық тензордың сызықты ауытқуы,  $\alpha, \beta$  – кеңістіктік айнымалының құраушылары.

(1) теңдеуден (2) шарттар ескеріліп, гравитациялық толқындар теңдеуі [11] жұмыста алынды:

$$a^{-2} \nabla^2 h_{\alpha\beta} = \ddot{h}_{\alpha\beta} + 3 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right) \dot{h}_{\alpha\beta}, \quad (3)$$

бұл жерде  $\nabla$  – кеңістіктік туынды, нүкте уақыт бойынша туындыны білдіреді. Гравитациялық толқынның ұзындығына ( $\lambda = 2\pi a(t)/k$ ) байланысты кеңістіктік толқындық саны  $k$  болатын Фурье-құраушы үшін  $h(t)$  ауытқуларының теңдеуін аламыз.

$$\frac{d^2 h(R, t)}{dt^2} + 3 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right) \frac{dh(R, t)}{dt} + \left( \frac{k}{a} \right)^2 h(R, t) = 0. \quad (4)$$

(4) теңдеудегі соңғы мүше  $1/m^2$  өлшемге ие, ал бастапқы екі мүше  $-1/c^2 : \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow v_0 \frac{\partial}{\partial R}$  бойынша (4) теңдеуде кеңістіктік туындыға көшеміз,  $v_0 = 1$  деп қабылдаймыз:

$$\ddot{h} + 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\dot{h} + \left(\frac{k}{a}\right)^2 h = 0, \quad (5)$$

бұл жерде нүктелер  $R$  координатасы бойынша туындыны білдіреді. (4) теңдеудің қорытылуы [6] жұмыста көрсетілген. Осы теңдеудің жарамдылығын аз шамалар квадратын еске алмай, қолданылатын жуықтаулар шеңберінде қарапайым түрде түсіндіреміз. (5) теңдеу уақыттың белгіленген мәнінде  $h(R)$  өзгеруінің толқындық процесін сипаттайды. Бұл процесі уақыт бойынша өшу коэффициенті бар тербеліс ретінде қарастырған ыңғайлы. Анықтама бойынша  $\frac{k}{a} = \frac{2\pi}{\lambda}$  бұл өрнек жиіліктің рөлін атқара алады,  $3\frac{\dot{a}}{a}$  – үйкеліс коэффициент рөлін атқара алады, тек осыны негіздеу керек.

Материя массасы  $M$  және оның тығыздығы  $\rho$ , масштабты фактор  $a$  және олардың  $\delta\rho, \delta a$  ауытқулары келесідей байланысын:

$$\frac{3}{4\pi}M = \rho a^3, \quad \frac{3}{4\pi}M = (\rho - \delta\rho)(a + \delta a)^3. \quad (6)$$

Аз шамалардың квадраттарын және кубтарын ескермей, осы формулаларды мүшелеп бөлеміз:

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = 3\frac{\delta a}{a}, \quad \frac{\dot{\rho}}{\rho} = 3\frac{\dot{a}}{a}. \quad (7)$$

Тығыздықтың салыстырмалы өзгеруі  $\frac{\dot{\rho}}{\rho}$  тербелістердің өшуіне алып келеді, осылайша біз (5)

формуланы аламыз. Толқынды сандық талдауда бақылау үшін (5) теңдеудегі екінші, үшінші мүшелердегі коэффициенттерді шамалас етіп қарастыру қажет.

$H = \dot{a}/a$  Хаббл параметрін еңгізіп, (5) формуланы келесі жүйе түрінде жазамыз:

$$\dot{h} = b, \quad \dot{a} = Ha, \quad \dot{b} = -3Hb - \frac{k^2}{a^2}h. \quad (8)$$

мұнда  $k$  – параметр болып саналады. Қарастырылған толқындық процестердің заңдарын белгілеу үшін  $k$  параметрінің мәнін толқындық заңдылықтарға сәкестендіреміз:

$$\frac{k}{a} = \frac{2\pi a}{\lambda a} = \frac{a}{R_*},$$

$$\Delta H = k,$$

$$\Delta R = \frac{\lambda}{a}, \quad \lambda = \frac{2\pi a}{k}, \quad \Delta R \cdot \Delta H = 2\pi, \quad (9)$$

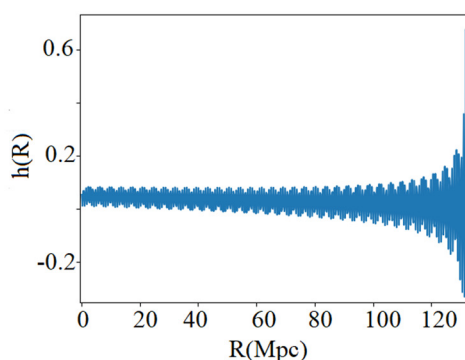
мұндағы  $R_*$  – нольдік гравитация радиусы, ол параметр ретінде беріледі.

Осыдан кейін (5) теңдеу мына жүйе түрінде жазылады:

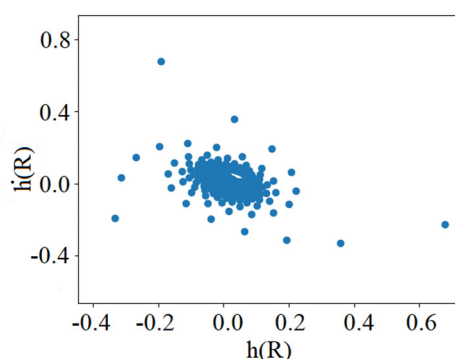
$$\dot{h}(R) = b(R), \quad \dot{a}(R) = Ha(R),$$

$$\dot{b}(R) = -3Hb(R) - \frac{a(R)^2}{R_*^2}h(R) \quad (10)$$

(10) жүйенің сандық талдауының нәтижелері [23] бастапқы мәндер  $h_0 = 0.01$ ;  $b_0 = 0.01$ ;  $a_0 = 1.01$  үшін алынды (1, 2-суреттер).

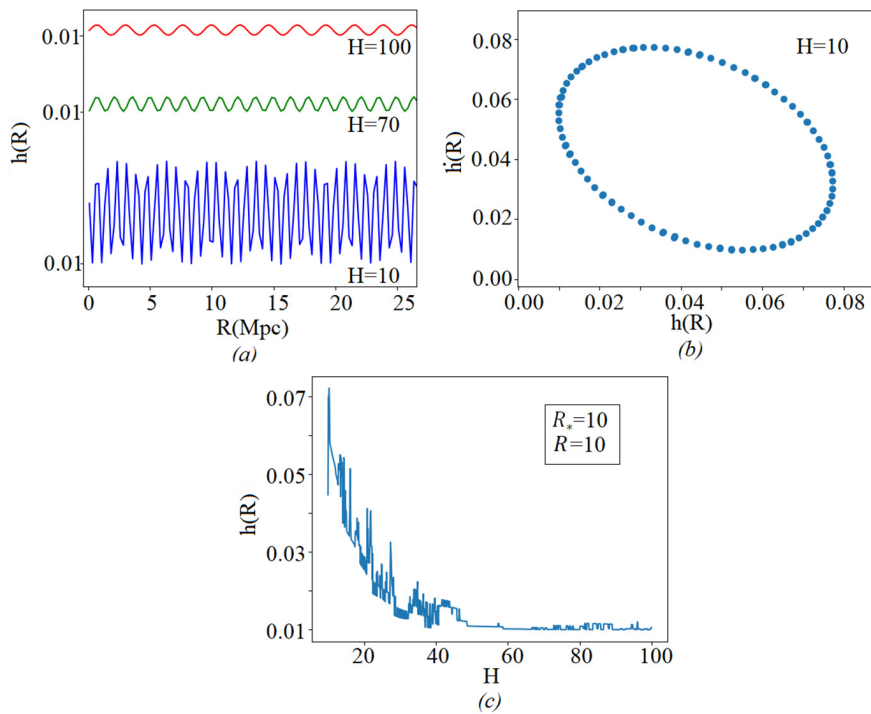


(a)



(b)

**1-сурет** – Гравитациялық толқынның формасы (a).  $R_* = 2$ ;  $H = 10$  параметрлер мәндері. Гравитациялық толқынның фазалық портреті (b).



**2-сурет** – Гравитациялық толқынның формалары (a),  $R_* = 10$ .  
 Гравитациялық толқынның фазалық портреті (b).  
 Гравитациялық толқынның Хаббл параметріне тәуелділігі (c).

Координата  $R$  үлкен мәндерге ие болғанда орнықтылық шарттары бұзылып, толқын түрі бұзылады (шешім орнықсыз болады). Орнықты шешім алу үшін  $\frac{H}{H_0} = \frac{k}{k_0}, \frac{R_*}{R_0} = \frac{R_0}{R_*}, R_*^2 = R_0^2, \lambda = 2\pi R_* = const$ , яғни  $\pi R_*^2$  аудан үшін  $\lambda$ -ның максимал мәні қабылданады.

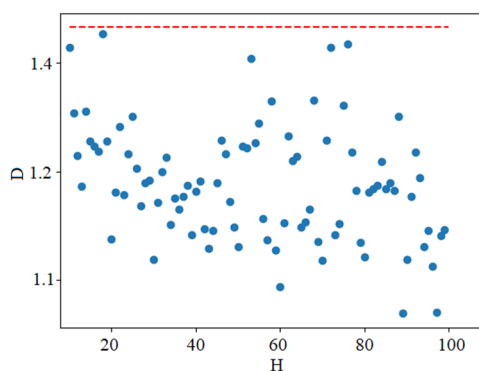
$R$  мәндері  $H$  мәндеріне шамалас болғанда толқындық режим сақталады, бірақ әлемнің кеңеюіне байланысты ( $H \sim 100$ ) тербеліс амплитудасы азаяды. Динамикалық жүйенің (10) фазалық портретінің ( $h(R), \dot{h}(R)$ ) фракталдық қасиеті бар. Аттракторлардың корреляциялық өлшемділігі [25] келесі формуламен анықталды:

$$D = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log C(\delta)}{\log \delta},$$

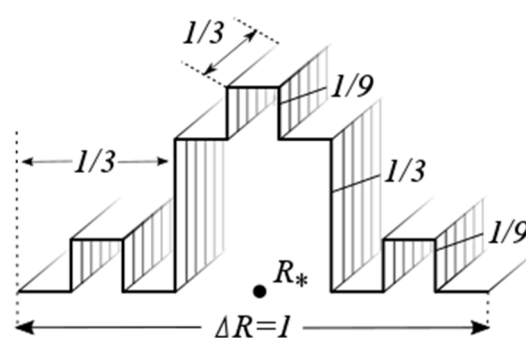
$$C(\delta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N H(\delta - |x_i - x_j|), \quad (11)$$

мұндағы,  $\delta$  – өлшеу масштабы,  $C(\delta)$  – корреляциялық интеграл,  $N$  – жиындағы нүктелер саны,  $|x_i - x_j|$  – екі нүкте арасындағы қашықтық  $H(f)$  – Хевисайд функциясы. Егер  $f > 0$  болса,  $H(f) = 1$ , егер  $f < 0$  болса,  $H(f) = 0$ . Көп жағдайлар зерттеліп,  $D_* \approx 1.4649$  ең максимал мән байқалды (3-сурет). Галактикалардың бағытталған толқынды қозғалысы ( $10 < H < 100$ ), скейлинг көрсеткішінің ең максималды мәнімен сипатталады:  $\gamma_* = D_* - d$ , мұндағы  $d$  – топологиялық өлшемділік. Фазалық портрет үшін  $d = 1$ .

2(c)-суреттен осы теорияның астрофизикалық бақылауларды дұрыс сипаттайтындығы көрініп тұр. Толқын амплитудасының тұрақталуы (3-10)% дәлдікпен  $H = 75 \frac{\text{км/с}}{\text{Мпс}}$  болғанда байқалады.



3-сурет – Гравитациялық толқындардың әуейі аттракторларының максималды өлшемділігі,  $R_* = 10$



4-сурет – Элементтері бір бағытта (вертикальді бағытта) деформацияланбайтын екінші сатылы анизотропты фрактал

Сонымен қатар  $\gamma_* = 0.4649$  нәтиженің фракталдық геометриялық моделі бар. Бұл фрактал (4-сурет) анизотропты деп аталған, оны осы жұмыстың авторларының бірі [24] шекаралық қабаттағы турбуленттілікті сипаттау үшін ұсынған.

( $R \approx R_*$ ) нөлдік гравитацияға жақын қашықтықта, радиалды бағытта  $X(R)$  ауытқу мәні фракталдың нөмерінің (фракталдық иерархия тәртібінің) өсуімен максимумына жетеді.

$R_* \pm \Delta R/2$  аралығындағы көлденең гравитациялық толқындардың изотроптық кеңістікте  $R$  бағытына перпендикуляр  $X(R) > R$  фракталдық ауытқулары бар.  $X(R)$  мәні  $n$ -фракталдың элементінің биіктігі бойынша анықталады.  $\Delta R = 1$  деп қабылданған, жалпы жағдайда  $\Delta R$  мәні (9) формуладағы Хаббл тұрақтысының дәлдік шарты бойынша есептеледі.

Сондай-ақ, анизотропты фрактал түріндегі модель информациялық энтропия талдауы тұрғысынан сәйкес келеді: ауытқу максимумы ең аз құраушылар саны арқылы байқалады.

## Қорытынды

Эйнштейннің гравитациялық өріс теориясына туындайтын гравитациялық толқындар теңдеуі сандық түрде зерттелді. Теңдеу динамикалық жүйе ретінде қарастырылды. Хаббл параметрі мен толқындық санды (нөлдік гравитация радиусының кері мәні) үйлестіріп (толқын ұзындығының берілген параметрлер үшін максимум шартын пайдаланып) толқын түрі анықталды, оның мәні біз ұсынған анизотропты, бір бағытта өзгеретін фракталдық өлшемділігіне тең болды. Жұмыстың нәтижесі Әлемнің ұлғаюын гравитациялық толқынның фракталдық, яғни, масштабты-инварианттық қасиетімен түсіндіреді. Нәтижесінде космологиялық тұрақты, күнгірт энергия түсініктері пайдаланылмады. Бұл бағытты үлкен жарылас теориясына альтернативті көзқарас деп қарастыруға болады. Осындай көзқарас жақында жарияланды [21].

## Әдебиеттер

- 1 Einstein A., Rosen N. On gravitational waves //Journal of the Franklin Institute. – 1937. – Vol. 223, Iss.1 – С.43-54.
- 2 Ellis G.F.R., Maartens R., MacCallum M.A.H. Relativistic cosmology. – Cambridge University Press, 2012.
- 3 Byrd G. et al. Paths to dark energy: theory and observation. – Walter de Gruyter, 2012. Т.2.
- 4 Luminet J. P. et al. Dodecahedral space topology as an explanation for weak wide-angle temperature correlations in the cosmic microwave background //Nature. – 2003. – Vol. 425, Iss. 6958. – С.593.
- 5 Chernin A. D. Dark energy in the nearby Universe: HST data, nonlinear theory, and computer simulations //Physics-Uspekhi. – 2013. – Vol.56, Iss.7. – P.704.
- 6 Yoo J., Watanabe Y. Theoretical models of dark energy //International Journal of Modern Physics D. – 2012. – Vol.21, Iss.12. –230002.
- 7 Cai R. G. A dark energy model characterized by the age of the universe //Physics Letters B. – 2007. – Vol.657, Iss.4-5. – С. 228-231.
- 8 Tsujikawa S. Modified gravity models of dark energy //Lectures on Cosmology. – Springer, Berlin, Heidelberg, 2010. – P.99-145.
- 9 Gong Y. Extended holographic dark energy //Physical Review D. – 2004. – Vol.70, Iss. – 064029.

- 10 Sahni V. 5 Dark Matter and Dark Energy //The Physics of the Early Universe. – Springer, Berlin, Heidelberg, 2004. – P.141-179.
- 11 Peccei R. D. Neutrino models of dark energy //Physical Review D. – 2005. – Vol.71, Iss.2. – 023527.
- 12 Gannouji R. et al. Scalar–tensor models of normal and phantom dark energy //Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. – 2006. – Vol. 2006, Iss.09. – P.016.
- 13 Wei H., Cai R. G. A new model of agegraphic dark energy //Physics Letters B. – 2008. – Vol. 660, Iss.3. – P.113-117.
- 14 Li M. A model of holographic dark energy //Physics Letters B. – 2004. – Vol. 603, Iss.1-2. – P.1-5.
- 15 Feng B., Wang X., Zhang X. Dark energy constraints from the cosmic age and supernova //Physics Letters B. – 2005. – Vol. 607, Iss.1-2. – P. 35-41.
- 16 Tsujikawa S. Observational signatures of  $f(R)$  dark energy models that satisfy cosmological and local gravity constraints //Physical Review D. – 2008. – Vol. 77, Iss.2. – P. 023507.
- 17 Bamba K. et al. Dark energy cosmology: the equivalent description via different theoretical models and cosmography tests //Astrophys. and Space Science. – 2012. – Vol. 42, Iss.1. – P.155-228.
- 18 Guo Z.K. et al. Cosmological evolution of a quintom model of dark energy //Physics Letters B. – 2005. – Vol. 608, Iss.3-4. – P. 177-182.
- 19 Chernin A.D. Dark energy and universal antigravitation //Physics-Uspekhi. – 2008. – Vol. 51, Iss.3. – P. 253.
- 20 Riess A.G. et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant //The Astronomical Journal. – 1998. – Vol. 116, Iss.3. – P. 1009.
- 21 Maeder A. An alternative to the  $\Lambda$ CDM model: The case of scale invariance //The Astrophysical Journal. – 2017. – Vol. 834, Iss.2. – P. 194.
- 22 Peebles P.J.E. The large-scale structure of the universe. – Princeton university press, 1980.
- 23 Mardal K.A. et al. Using python to solve partial differential equations //Computing in Science & Engineering. – 2007. – Vol. 9, Iss.3. – P. 48.
- 24 Жанабаев З. Ж. Фрактальная модель турбулентности в струе //Изв. СО АН СССР. Серия техн. наук. – 1988. – №. 4. – С. 57-60.
- 25 Grassberger P., Procaccia I. Characterization of strange attractors //Physical review letters. – 1983. – Vol. 50, Iss.5. – P. 346.

#### References

- 1 A. Einstein, N. Rosen, Journal of the Franklin Institute, 223 (1), 43-54 (1937).
- 2 G.F.R. Ellis, R. Maartens, M.A.H. MacCallum, Relativistic cosmology, (Cambridge University Press, 2012).
- 3 G. Byrd et al., Paths to dark energy: theory and observation. T.2 (Walter de Gruyter, 2012).
- 4 J.P. Luminet et al., Nature, 425(6958), 593 (2003).
- 5 A.D. Chernin, Physics Uspekhi, 56(7), 704 (2013).
- 6 J. Yoo, Y. Watanabe, Intern. J. of Modern Physics D, 21(12), 1230002 (2012).
- 7 R.G. Cai, Phys. Lett. B, 657(4-5), 228-231 (2007).
- 8 S. Tsujikawa, Lectures on Cosmology, (Springer, Berlin, Heidelberg, 2010), 99-145.
- 9 Y. Gong, Phys. Rev. D, 70 (6), 064029 (2007).
- 10 V. Sahni, The Physics of the Early Universe, (Springer, Berlin, Heidelberg, 2004), 141-179.
- 11 R.D. Peccei, Phys. Rev. D, 71 (2) 023527 (2005).
- 12 R. Gannouji et al., J. of Cosmology and Astroparticle Physics, 2006 (09), 016 (2006).
- 13 H. Wei, R.G. Cai, Phys. Lett. B, 660(3), 113-117 (2008).
- 14 M. Li, Phys. Lett. B, 603 (1-2), 1-5 (2004).
- 15 B. Feng, X. Wang, X. Zhang D, Phys. Lett. B, 607(1-2), 35-41 (2005).
- 16 S. Tsujikawa, Phys. Rev. D, 77(2), 023507 (2008).
- 17 K. Bamba et al., Astrophysics and Space Science, 342(1), 155-228 (2012).
- 18 Z.K. Guo et al., Phys. Lett. B, 608 (3-4), 177-182 (2005).
- 19 A.D. Chernin, Physics-Uspekhi, 51(3), 253 (2008).
- 20 A.G. Riess et al., The Astronomical Journal, 116(3), 1009 (1998).
- 21 A. Maeder The Astrophysical Journal, 834(2), 194 (2017).
- 22 P.J.E. Peebles, The large-scale structure of the universe, (Princeton university press, 1980).
- 23 K.A. Mardal et al., Computing in Science & Engineering, 9(3), 48 (2007).
- 24 Z.Zh. Zhanabaev, Izv. SO AN SSSR. Seria tehn. Nauk, 4, 57-60 (1988). (in Russ)
- 25 P. Grassberger, I. Procaccia, Phys. Rev. Lett., 50(5), 346 (1983).