

**Бейсенов Б.У., Бошкаев К.А. *, Бришева Ж.Н., Жами Б.А.,
Калымова Ж.А., Куанышбайұлы Е., Уразалина А.А.**

ННЛОТ, Казахский национальный университет
имени аль-Фараби, Казахстан, г. Алматы, *e-mail: kuantay@mail.ru

**МЕТОДЫ РАСЧЕТА МАГНИТНОГО ПОЛЯ
ВРАЩАЮЩЕГОСЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАРЯДА
СО СФЕРИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЕЙ**

В работе рассматриваются методы нахождения магнитного поля вращающейся и равномерно заряженной сферы. Особое внимание уделяется относительно новому так называемому методу Марша, который может быть использован для широкого класса задач. Данный метод позволяет легко найти решения для задачи со сложными условиями. Здесь метод применяется к простому сферическо-симметричному случаю, решения которого известны. Все вычисления показаны подробно, с полным разбором аналитических выкладок. Приводится сравнение известных методов нахождения магнитного поля вращающихся заряженных сфер. Показывается, как с помощью метода Марша можно построить силовые линии магнитного поля в программном пакете «Wolfram Mathematica». Работа преследует педагогические цели и посвящена студентам, магистрантам, докторантам и молодым специалистам высшего учебного заведения по специальностям физика, ядерная физика и астрономия.

Ключевые слова: магнитное поле, уравнения Максвелла, уравнение Лапласа, метод Марша.

Beisenov B., Boshkayev K.A. *, Brisheva Z.N., Zhami B.A.,
Kalymova Z.A., Kuanyshbayuly E., Urazalina A.A.

NNLOT, Al-Farabi Kazakh National University,
Kazakhstan, Almaty, *e-mail: kuantay@mail.ru

**Methods for calculating the magnetic field
of rotating charge distribution with spherical symmetry**

The paper considers the methods for finding the magnetic field of a rotating and uniformly charged sphere. Special attention is drawn to the relatively new so-called March method, which can be used for a wide class of problems. This method makes it easy to find solutions for problems with complex conditions. Here the method is applied for a simple spherically symmetric case, the solutions of which are known. All calculations are shown in detail, with a full analysis of analytical calculations. A comparison is made with the known methods for finding the magnetic field for rotating charged spheres. It is shown how using the Marsh method one can construct force lines of the magnetic field in “Wolfram Mathematica” package. The work pursues pedagogical goals and is dedicated to students, undergraduates, Ph.D. students and young specialists of higher educational institutions in the specialties of physics, nuclear physics and astronomy.

Key words: magnetic field, Maxwell equations, Laplace equation, Marsh’s method.

Бейсенов Б.У., Бошкаев К.А. *, Бришева Ж.Н., Жәми Б.А.,
Қалымова Ж.А., Қуанышбайұлы Е., Уразалина А.А.

АТҰНЗ, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті,
Қазақстан, Алматы қ., *e-mail: kuantay@mail.ru

**Сфералық симметриялы үлестірілген айналмалы зарядтың
магниттік өрісін есептеу әдістері**

Жұмыста айналмалы және біркелкі зарядталған сфераның магнит өрісін табу әдістері қарастырылады. Салыстырмалы түрде жаңа Марш әдісіне ерекше назар аударылады. Ол кең ауқымды мәселелерге қолданылуы мүмкін. Бұл әдіс күрделі жағдайларға байланысты есептерді шешуді жеңілдетеді. Жұмыста әдіс шешімдері белгілі қарапайым сфералық симметриялық жағдайға қолданылады. Барлық есептеулер аналитикалық өрнектерді толық талдау арқылы нақты көрсетіледі. Магнит өрісін табудың белгілі әдістерімен салыстыру жүргізіледі. Марш әдісінің көмегімен «Wolfram Mathematica» бағдарламалық пакетінде магнит өрісінің күш сызықтарын

қалай тұрғызуға болатыны көрсетілді. Жұмыс педагогикалық мақсаттарды көздейді және жоғары оқу орындарының студенттеріне, магистранттарына, докторанттарына және жас мамандарына, олардың ішінде физика, ядролық физика және астрономия мамандықтарына арналған.

Түйін сөздер: магниттік өріс, Максвелл теңдеулері, Лаплас теңдеуі, Марш әдісі.

Введение

Магнитное поле представляет собой один из видов материи. Оно обладает энергией, которая проявляет себя в виде электромагнитных сил, действующих на отдельные движущиеся электрические заряды (электроны и ионы или другие намагниченные тела) и на их потоки, т.е. электрический ток. Магнитное поле создается движущимися заряженными частицами и телами, проводниками с током и постоянными магнитами [1-7]. В астрофизике магнитное поле является одним из основных свойств небесных тел, начиная от планет, звезд главной последовательности до компактных объектов, таких как белые карлики и нейтронные звезды [8, 9].

В работе проводится анализ в рамках классической электродинамики для исследования магнитного поля, индуцированного равномерным распределением заряда на сферической поверхности, когда сфера вращается как твердое тело вокруг оси симметрии с постоянной угловой скоростью. Представлены три основных метода расчета, которые часто используются в литературе для решения прикладных задач электродинамики и астрофизики [10-12].

Постановка рассматриваемой задачи выглядит следующим образом: «Сфера радиуса R вращается с угловой скоростью ω вокруг оси z . Поверхностная плотность заряда σ постоянна. Найти напряженность магнитного поля внутри и снаружи сферы» (рис. 1 (а)) [10]. Рассмотрим решение этой задачи на основе трёх часто используемых методов.

Метод с использованием решения уравнения Лапласа

Для вращающейся сферы поверхностный ток задается следующим образом:

$$\vec{j}_{\text{пов.}} = \sigma \vec{v}, \quad (1)$$

где \vec{v} – линейная скорость точки на сфере

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{R}], \quad (2)$$

где $\vec{R} = R\vec{e}_r$, \vec{e}_r – единичный вектор вдоль радиус вектора \vec{r} [10]. Из рисунка 1 (b) видно, что абсолютная величина линейной скорости равна:

$$v = \omega R \sin \theta \quad (3)$$

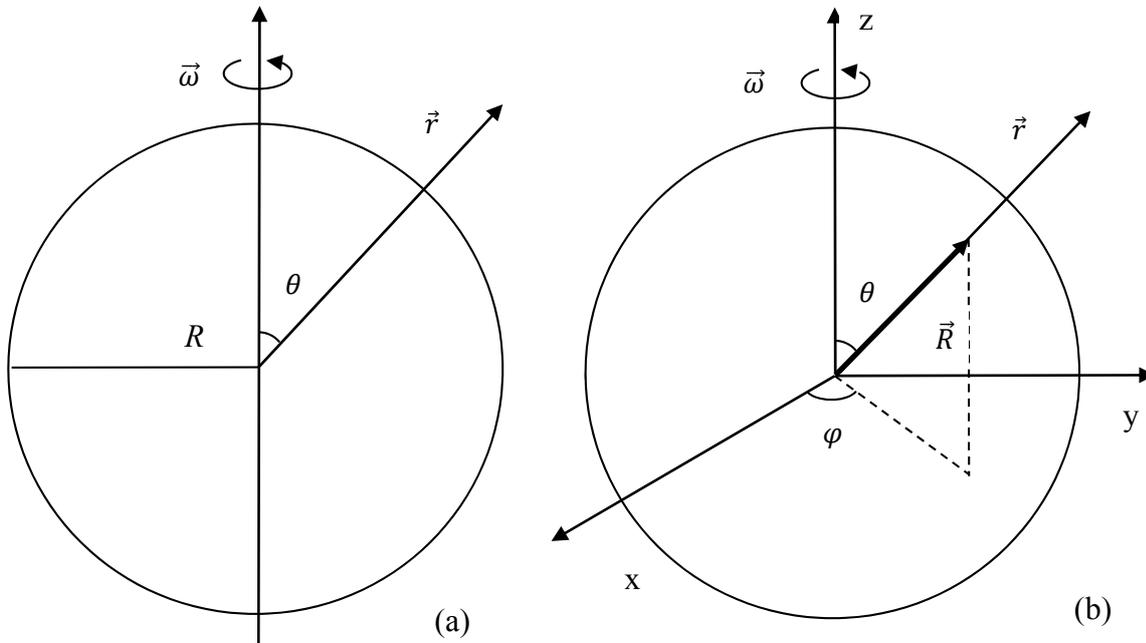


Рисунок 1 – (а) Схематическое изображение вращающейся сферы радиуса R , угловой скоростью $\vec{\omega}$, направленной по оси z и поверхностной плотностью σ .
(b) соответствующие сферические координаты

И конечная формула для модуля поверхностного тока имеет вид:

$$j_{\text{пов.}} = \sigma\omega R \sin \theta \quad (4)$$

Поскольку внутри и вне сферы токи отсутствуют, то можно ввести потенциал магнитного поля как:

$$\vec{H} = \begin{cases} -\vec{\nabla}\psi_1 & \text{при } r < R \text{ внутри сферы,} \\ -\vec{\nabla}\psi_2 & \text{при } r > R \text{ вне сферы.} \end{cases} \quad (5)$$

Подставляя последнее в уравнение Максвелла для дивергенций магнитного поля, т.е. $\text{div}\vec{H} = 0$ [12], получим уравнение Лапласа:

$$\begin{cases} \Delta\psi_1 = 0 & \text{при } r < R, \\ \Delta\psi_2 = 0 & \text{при } r > R. \end{cases} \quad (6)$$

где $P_1(\cos \theta) = \cos \theta$, $P_2(\cos \theta) = \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)$.

Из теории классической электродинамики известно, что граничные условия на поверхности сферы (при $r = R$) имеют следующий вид [10, 16, 17]:

$$\begin{cases} C_1 \cos \theta + C_2 R (3(\cos \theta)^2 - 1) + \dots = -2D_1 R^{-3} \cos \theta - \frac{3}{2} D_2 R^{-4} (3(\cos \theta)^2 - 1) + \dots, \\ \frac{1}{R} (C_1 R (-\sin \theta) + C_2 R^2 (-3 \cos \theta \sin \theta) + \dots) - \\ - \frac{1}{R} (D_1 R^{-2} (-\sin \theta) + D_2 R^{-3} (-3 \cos \theta \sin \theta) + \dots) = j_{\text{пов.}} = \sigma\omega R \sin \theta. \end{cases} \quad (11)$$

Чтобы найти коэффициенты C_n и D_n , достаточно использовать метод неопределенных коэффициентов [18]. Очевидно, что только коэффициенты при $n = 1$ имеют нетривиальные значения

$$\begin{cases} \psi_1 = -\frac{2}{3} \sigma R \omega r \cos \theta = -\frac{2}{3} \sigma R (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) & \text{при } r < R, \\ \psi_2 = \frac{1}{3r^2} \sigma \omega R^4 \cos \theta = \frac{1}{3r^3} \sigma R^4 (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) & \text{при } r > R. \end{cases} \quad (13)$$

Так как в данной задаче имеется сферическая симметрия, используем решение уравнения Лапласа в сферической системе координат. Записываем разложения потенциалов в сферические функции [14]:

$$\begin{cases} \psi_1 = \sum_n C_n r^n P_n(\cos \theta) & \text{при } r < R, \\ \psi_2 = \sum_n D_n r^{-(n+1)} P_n(\cos \theta) & \text{при } r > R, \end{cases} \quad (7)$$

где

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n, \quad (8)$$

есть полином Лежандра, $t = \cos \theta$, C_n, D_n – коэффициенты разложения, которые вычисляются из граничных условий и $n = 1, 2, 3, \dots$ [15].

Запишем первые два (хотя можно рассмотреть более двух) слагаемых разложения:

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} - \frac{\partial \psi_2}{\partial r} = 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} = j_{\text{пов.}} \end{cases} \quad (10)$$

Подставляя (9) в граничные условия (10) при $r = R$ получим:

$$C_1 = -\frac{2}{3} \sigma \omega R, \quad D_1 = \frac{1}{3} \sigma \omega R^4. \quad (12)$$

Для $n > 1$ все коэффициенты $C_n, D_n = 0$. Тогда:

Напомним, что градиент скалярного произведения двух векторов имеет следующий вид [10, 19]:

$$\vec{\nabla}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}) = \text{grad}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}) = (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla})\vec{r} + (\vec{r} \cdot \vec{\nabla})\vec{\omega} + [\vec{\omega} \times \text{rot}\vec{r}] + [\vec{r} \times \text{rot}\vec{\omega}] = \vec{\omega} \quad (14)$$

где принято во внимание, что $\vec{\omega}$ - постоянный вектор. Также следует заметить, что градиент произведения двух скалярных функции g и f определяется как

$$\vec{\nabla}(gf) = \text{grad}(gf) = g\vec{\nabla}f + f\vec{\nabla}g \quad (15)$$

Если $f = f(r)$, тогда градиент

$$\vec{\nabla}f(r) = \text{grad}f(r) = \frac{df}{dr} \frac{\vec{r}}{r} = \frac{df}{dr} \vec{e}_r \quad (16)$$

Для удобства расчетов можно положить $g = (\vec{\omega} \cdot \vec{r})$ и $f = \frac{1}{r^3}$.

В итоге, используя (5), (7), (12), $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$ (полагая, что магнитная проницаемость среды $\mu = 1$), формулы градиента и записывая

уравнения в векторном виде, получаем величину магнитного поля внутри и снаружи сферы:

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{2}{3}\mu_0\sigma R\vec{\omega} & \text{при } r < R, \\ -\frac{1}{3}\frac{\mu_0\sigma R^4}{r^3}\vec{\omega} + \frac{\mu_0\sigma R^4}{r^5}(\vec{\omega} \cdot \vec{r})\vec{r} & \text{при } r > R, \end{cases} \quad (17)$$

где $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$, $\vec{r} = r\vec{e}_r$, μ_0 - магнитная постоянная. Внутри сферы поле направлено вдоль $\vec{\omega}$. Вне сферы магнитное поле равно полю системы с магнитным моментом $\vec{m} = \frac{4\pi}{3}R^4\sigma\vec{\omega}$ [16]:

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi r^3}\vec{m} + \frac{3\mu_0}{4\pi r^5}(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r} \quad (18)$$

при $r > R$.

Метод интегрирования малых элементов

Для удобства интегрирования выберем систему координат так, чтобы \vec{r} был направлен по оси z , а $\vec{\omega}$ находился в плоскости xz с углом θ к оси z (рис. 2) [11].

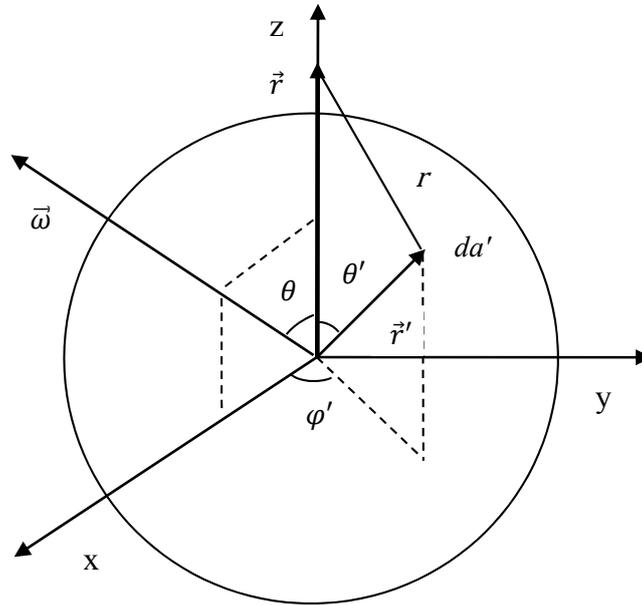


Рисунок 2 – Схематическое изображение вращающейся сферы радиуса R , угловой скоростью $\vec{\omega}$ в плоскости xz с углом θ к оси z и поверхностной плотностью σ

Векторный потенциал выражается следующей формулой:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}_{\text{пов.}}(\vec{r}')}{|\vec{r}' - \vec{r}|} da' \quad (19)$$

где $\vec{r}' = \vec{R}$, тогда знаменатель интеграла

$$\begin{aligned} r &= |\vec{r}' - \vec{r}| = |\vec{R} - \vec{r}| = \\ &= \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta'} \end{aligned} \quad (20)$$

и da' – элемент площади

$$da' = R^2 \sin \theta' d\theta' d\phi' \quad (21)$$

Скорость в точке \vec{r}' вращающегося твердого тела:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= [\vec{\omega}, \vec{r}'] = \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega \sin \theta & 0 & \omega \cos \theta \\ R \sin \theta' \cos \varphi' & R \sin \theta' \sin \varphi' & R \cos \theta' \end{vmatrix} = \\ &= R\omega \{ -(\cos \theta \sin \theta' \sin \varphi') \vec{i} \\ &\quad + (\cos \theta \sin \theta' \cos \varphi' \\ &\quad - \sin \theta \cos \theta') \vec{j} + \\ &\quad + (\sin \theta \sin \theta' \sin \varphi') \vec{k} \} \end{aligned} \quad (22)$$

Заметим, что члены с $\sin \varphi'$ и $\cos \varphi'$ обращаются в нуль при интегрировании:

$$\int_0^{2\pi} \cos \varphi' d\varphi' = \int_0^{2\pi} \sin \varphi' d\varphi' = 0 \quad (23)$$

Тогда вектор потенциал

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &= \\ &= -\frac{\mu_0 R^3 \sigma \omega \sin \theta}{2} \int_0^\pi \frac{\cos \theta' \sin \theta'}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta'}} d\theta' \vec{j} \end{aligned} \quad (24)$$

Приняв $u \equiv \cos \theta'$, получаем:

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^{+1} \frac{u}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rru}} du = \\ &= -\frac{R^2 + r^2 + rRu}{3R^2 r^2} \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rru} \Big|_{-1}^{+1} = \\ &= -\frac{1}{3R^2 r^2} [(R^2 + r^2 + Rr)|R - r| - \\ &\quad - (R^2 + r^2 - Rr)(R + r)] \end{aligned} \quad (25)$$

Если точка находится внутри сферы, то $r < R$ и предыдущие выражение примет вид $(2r/3R^2)$; если точка находится снаружи сферы, то $r > R$ и выражение выглядит $(2R/3r^2)$. Учитывая что $[\vec{\omega}, \vec{r}] = -\omega r \sin \theta \vec{j}$, в итоге, получаем:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{1}{3} \mu_0 R \sigma [\vec{\omega}, \vec{r}] & \text{при } r < R, \\ \frac{1}{3} \frac{\mu_0 R^4 \sigma}{r^3} [\vec{\omega}, \vec{r}] & \text{при } r > R. \end{cases} \quad (26)$$

Запишем ротор векторного произведения двух векторов [10, 19]

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times [\vec{\omega}, \vec{r}] &= \text{rot}[\vec{\omega}, \vec{r}] = \\ &= (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{r} + \\ &\quad + \vec{\omega} \text{div} \vec{r} - \vec{r} \text{div} \vec{\omega} = 2\vec{\omega} \end{aligned} \quad (27)$$

также запишем формулу для $\text{rot}(f\vec{b})$, где \vec{b} – произвольный вектор

$$\vec{\nabla} \times (f\vec{b}) = \text{rot}(f\vec{b}) = f \text{rot} \vec{b} + [\vec{\nabla} f, \vec{b}] \quad (28)$$

Здесь, также для удобства расчетов, можно положить $\vec{b} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$ и $f = \frac{1}{r^3}$. С помощью выражения для векторного потенциала, получим индукцию магнитного поля:

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} = \text{rot} \vec{A} = \\ &= \begin{cases} \frac{2}{3} \mu_0 \sigma R \vec{\omega} & \text{при } r < R, \\ -\frac{1}{3} \frac{\mu_0 \sigma R^4}{r^3} \vec{\omega} + \frac{\mu_0 \sigma R^4}{r^5} (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) \vec{r} & \text{при } r > R. \end{cases} \end{aligned} \quad (29)$$

Метод Марша

Во многих задачах в каждой точке пространства плотность распределения заряда и плотность тока остаются неизменными. В таких ситуациях метод Марша позволяет найти относительно легкую взаимосвязь между магнитным полем и электростатическим полем [12].

Сначала опишем метод для произвольного распределения заряда, затем используем его для нашего случая. Тогда в общем случае выражение (1) можно записать как:

$$\vec{j}_{\text{объем.}}(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) \vec{v} \quad (30)$$

где $\vec{j}_{\text{объем.}}(\vec{r})$ – объемная плотность тока, следовательно, $\rho(\vec{r})$ – объемная плотность заряда. Тогда векторный потенциал (19) запишется как:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{v} \int \frac{\rho(\vec{r}') d^3 \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = (\vec{v}/c^2) \phi(\vec{r}) \quad (31)$$

где

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}') d^3 \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (32)$$

это электростатический потенциал в зависимости от распределения заряда (полагая, что

диэлектрическая проницаемость среды $\epsilon = 1$), ϵ_0 – электрическая постоянная, $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ – скорость света в вакууме.

Тогда магнитное поле записывается как:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) = (\vec{v}/c) \times \vec{E}(\vec{r}), \quad (33)$$

где $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r})$ электростатическое поле (напряженность электрического поля).

Здесь уравнение (30) примет вид:

$$\vec{j}_{\text{объем.}}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})\vec{v} = \rho(\vec{r})[\vec{\omega}, \vec{r}]. \quad (34)$$

Тогда векторный потенциал (31) будет равен

$$\vec{A}(\vec{r}) = (\vec{\omega}/c^2) \times \vec{F}(\vec{r}), \quad (35)$$

где функция $\vec{F}(\vec{r})$ называется суперпотенциалом электрического поля

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{r'\rho(\vec{r}')d^3\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (36)$$

Добавляя и отнимая вектор \vec{r} от вектора \vec{r}' , получаем выражение в виде:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{r}\phi(\vec{r}) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\vec{r}') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}'. \quad (37)$$

Легко убедиться, что выполняются следующие соотношения:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \text{div}\vec{F} = \phi(\vec{r}) - (\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r})), \quad (38)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \text{rot}\vec{F} = (\vec{r} \times \vec{E}(\vec{r})). \quad (39)$$

Использование этого метода в задачах с аналогичной симметрией весьма эффективно. В силу сферического распределения системы заряда:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{d}{dr}(r\phi), \quad (40)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0. \quad (41)$$

Тогда суперпотенциал можно записать как $\vec{F} = F(r)\vec{e}_r$. Решая уравнения (40-41) получаем:

$$F(r) = \frac{1}{r^2} \int_0^r r'^2 \frac{d}{dr'} [r'\phi(r')] dr'. \quad (42)$$

Если распределение заряда имеет конечный радиус R , снаружи которого плотность заряда равна нулю, то магнитное поле будет как дипольное поле. Сравнивая вектор потенциал, выраженный через магнитный момент

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [\vec{m}, \vec{r}] \quad \text{при } r > R \quad (43)$$

с формулами (31), (35), (36) и (42) можно выразить магнитный момент через потенциал

$$\vec{m} = 4\pi\epsilon_0\vec{\omega} \int_0^R r^2 \frac{d}{dr} [r\phi(r)] dr \quad \text{при } r > R. \quad (44)$$

Эта формула позволяет вычислить магнитное поле, порожденное вращением любого сферически симметричного распределения заряда с помощью его электростатического потенциала [16].

Рассмотрим потенциал электрического поля внутри и снаружи заряженной сферы [1-7]:

$$\phi = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} & \text{при } r < R, \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} & \text{при } r > R, \end{cases} \quad (45)$$

где Q – полный (в нашем случае поверхностный) заряд сферы.

Используем значения (45) в (42):

$$F(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \int_0^r r'^2 \frac{Q}{R} dr' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{3R} r & \text{при } r < R, \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \int_0^R r'^2 \frac{Q}{R} dr' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{3r^2} R^2 & \text{при } r > R. \end{cases} \quad (46)$$

Следует заметить, что суперпотенциал вне источника также вычисляется с помощью внутреннего потенциала [12]. Единственная разница состоит в пределе интегрирования. Далее, приведём (46) к векторной форме, учитывая, что полный поверхностный заряд сферы $Q = 4\pi R^2\sigma$:

$$\vec{F}(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{3R} r \vec{e}_r = \frac{\sigma R}{3\epsilon_0} \vec{r} & \text{при } r < R, \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{3r^2} R^2 \vec{e}_r = \frac{\sigma R^4}{3\epsilon_0 r^3} \vec{r} & \text{при } r > R, \end{cases} \quad (47)$$

Подставляем (47) в уравнения (35) для нахождения векторного потенциала:

$$\vec{A}(r) = \begin{cases} \frac{\sigma R}{3c^2\epsilon_0} [\vec{\omega}, \vec{r}] = \frac{1}{3}\mu_0 R\sigma [\vec{\omega}, \vec{r}] & \text{при } r < R, \\ \frac{1}{3c^2\epsilon_0} \frac{\sigma R^4}{r^3} [\vec{\omega}, \vec{r}] = \frac{1}{3} \frac{\mu_0 R^4 \sigma}{r^3} [\vec{\omega}, \vec{r}] = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [\vec{m}, \vec{r}] & \text{при } r > R, \end{cases} \quad (48)$$

Результат вычисления будет таким же, как во втором методе, если возьмем ротор от (48). Окончательный ответ данного выражения:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{cases} \frac{2}{3}\mu_0\sigma R\vec{\omega} & \text{при } r < R, \\ -\frac{1}{3}\frac{\mu_0\sigma R^4}{r^3}\vec{\omega} + \frac{\mu_0\sigma R^4}{r^5}(\vec{\omega} \cdot \vec{r})\vec{r} & \text{при } r > R. \end{cases} \quad (49)$$

В итоге видно, что все три метода дают один и тот же результат.

Примечательно, что магнитное поле внутри сферы однородное. Чтобы наглядно это продемонстрировать достаточно знать выражение для F . Если принять ось z как ось вращения, то величина xF/r , где r вычисляется в плоскости xz , является функцией потока магнитного поля в плоскости xz . Контуры постоянной величины xF/r будут магнитными силовыми линиями. Так будет удобно графически представить магнитное поле, если значение функции F известно (рис. 3).

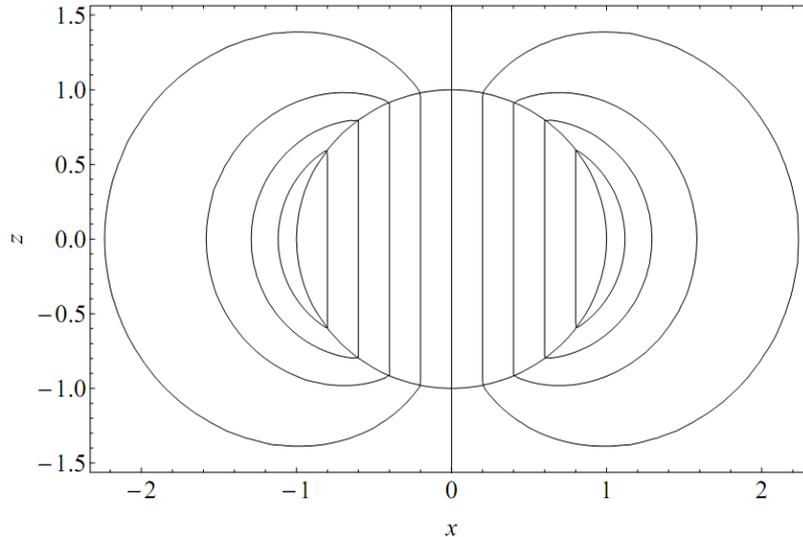


Рисунок 3 – Силовые линии магнитного поля вращающейся сферы радиуса R , угловой скоростью $\vec{\omega}$ и поверхностной плотностью σ . Угловая скорость направлена по оси z . Силовые линии направлены из северного полюса к южному полюсу

Заключение

В результате мы видим, что для данной задачи использование всех трех методов тождественно эквивалентны. Однако стоит отметить, что методика Марша (т.е. третий метод) более лаконична и практически удобна. Поскольку зная только значение потенциала внутри рассматриваемого тела, можно вычислить индуцированное магнитное поле вращающегося тела при условии, что объект не деформируется при вращении [20].

Здесь следует заметить, что астрофизические объекты от планет до компактных звезд имеют форму почти не отличающейся от сферической симметрий [21, 22]. Большие отклонения от сферы появляются в случае быстрого вращения вблизи кеплеровского предела. Из наблюдений известно, что вращение небесных тел гораздо меньше, чем кеплеровский предел. Следовательно, их отклонение от сферической симметрии незначительно [23].

Вместе с тем методика Марша более универсальна для более широкого класса задач.

Тогда как применение других методов сложно, или даже невозможно для некоторых случаев. Метод Марша позволяет относительно легко получить эти решения. Использование метода Марша для определения магнитного поля вращающихся объектов с аксиальной симметрией будет рассмотрено в последующих работах.

Работа была выполнена в рамках проекта: «Фундаментальные и прикладные исследования в смежных областях физики земных, околоземных и атмосферных процессов и их практическое применение» ИРН BR05236494 МОН РК.

Приложение. Силовые линий магнитного поля.

Вычислим магнитные силовые линии с помощью программного пакета Wolfram Mathematica 8.0 (хотя имеются более поздние версии) [24-26]. Для этого выберем направление угловой скорости вращения сферы по оси z (ось симметрии). Значение суперпотенциала внутри и вне сферы известно из формулы (46) или (47). Для удобства выберем так, чтобы все коэффициенты (постоянные) в формуле (46) были равны единице, включая радиус сферы. Тогда значение суперпотенциала в плоскости xz примет вид:

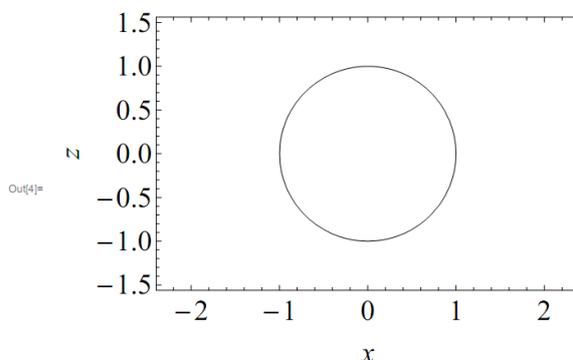
$$\begin{aligned} \text{In[1]} &= R = 1; \\ F[x_, z_] &:= \frac{\sqrt{x^2 + z^2}}{R} /; \sqrt{x^2 + z^2} < R \\ F[x_, z_] &:= \left(\frac{R}{\sqrt{x^2 + z^2}} \right)^2 /; \sqrt{x^2 + z^2} \geq R \end{aligned}$$

Нарисуем сначала окружность в плоскости xz как поперечное сечение сферы. Для этого воспользуемся командой «ContourPlot» в Mathematica и уравнением окружности:

```

In[4]= P1 = ContourPlot[x^2 + z^2 == R^2, {x, -2.3, 2.3}, {z, -1.5, 1.5}, ContourStyle -> Thin,
FrameLabel -> Automatic, BaseStyle -> {FontFamily -> "Times", FontSize -> 22},
AspectRatio -> 0.65, ImageSize -> 400]

```

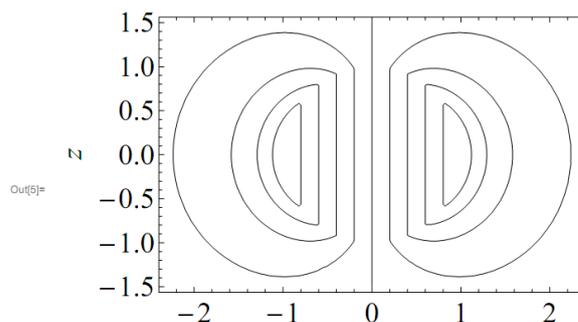


Далее, нарисуем силовые линии магнитного поля:

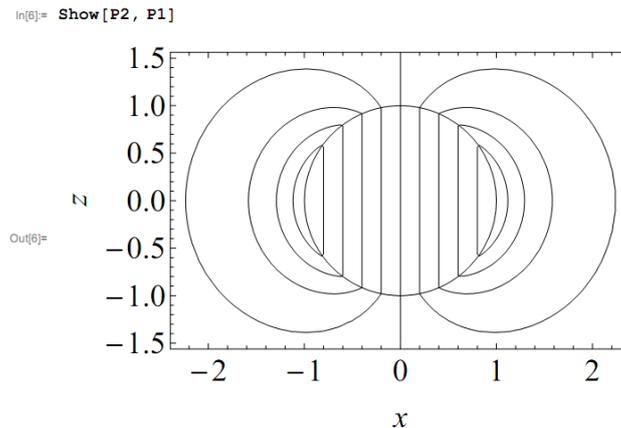
```

In[5]= P2 = ContourPlot[ -x / Sqrt[x^2 + z^2] F[x, z], {x, -2.3, 2.3},
{z, -1.5, 1.5}, ContourStyle -> Thin, FrameLabel -> Automatic,
ContourShading -> None, BaseStyle -> {FontFamily -> "Times", FontSize -> 22},
AspectRatio -> 0.65, ImageSize -> 400]

```



Теперь два рисунка можно наложить друг на друга командой «Show». В результате получим Рис. 3:



Литература

- 1 Детлаф А.А., Яворский Б.М., Милковская Л.Б. Курс физики. Том 2. Электричество и магнетизм (4-е издание). – М.: Высшая школа, 1977. – 384 с.
- 2 Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Краткий курс теоретической физики, том 1: Механика. Электродинамика. – М.: Наука, 1969. – 271 с.
- 3 Матвеев А.Н. Электродинамика. (2-е изд.). – М.: Высш. школа, 1980. – 383 с.
- 4 Савельев И.В. Курс общей физики. Том 2. Электричество. – М.: Наука, 1970. – 442 с.
- 5 Сивухин Д.В. Общий курс физики. Том 3. Электричество (4-е изд.). – М.: Физматлит; Изд-во МФТИ, 2004. – 656 с.
- 6 Терлецкий Я.П., Рыбаков Ю.П. Электродинамика. (2-е изд.). – М.: Высш. школа, 1990. – 352 с.
- 7 Парселл Э. Берклевский курс физики. Том 2. Электричество и магнетизм. – М.: Наука, 1971. – 448 с.
- 8 Зельдович Я.Б., Новиков И.Д. Теория тяготения и эволюция звезд. – М.: Наука, 1971. – 486 с.
- 9 Шапиро С., Тюколски С. Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды / Пер. с англ. под ред. Я.А.Смородинского. – М.: Мир. Том 1-2. 1985. – 656 с.
- 10 Гречко Л.Г., Сугаков В.И., Томасевич О.Ф., Федорченко А.М. Сборник задач по теоретической физике. – М.: Высшая школа, 1984. – 319 с.
- 11 Griffiths, David J. Introduction to Electrodynamics. 5th ed., Pearson, 2017. ISBN 978-1108420419. – 599 p.
- 12 James S. Marsh. Magnetic and electric field of rotating charge distributions // American Journal of Physics. – 1982. – Vol. 50, No. 1. – P. 51-53.
- 13 Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. «Теоретическая физика», том II. Теория поля. 8-е изд., 2012. – 536 с.
- 14 Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Высшая школа, 2004. – 798 с.
- 15 Abramowitz M., Stegun I.A. (1974) Handbook of Mathematical Functions, Dover Publications, Inc. New York, NY, USA ©1974 ISBN 0486612724. – 1047 p.
- 16 Jackson J.D. (1999). Classical Electrodynamics (3rd ed.). New York: John Wiley & Sons. ISBN 978-0-471-30932-1. OCLC 925677836 – 808 p.
- 17 Greiner W. Classical Electrodynamics (Springer, New York, USA, 1998). – 566 p.
- 18 Болянский В. Г., Виленкин Н. Я. Симметрия в алгебре. - 2-е изд. – М.: МЦНМО, 2002. – 240 с.
- 19 Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления (9-е изд.). – М.: Наука, 1965. – 427 с.
- 20 Boshkayev K., Rotondo M., Ruffini R. On the magnetic fields in rotating nuclear matter cores of stellar dimensions // Int. Journal Mod. Phys. Con. Ser. – 2012. – Vol. 12. – P. 58-67.
- 21 Haensel P., Potekhin A.Y., Yakovlev D.G. (Eds.). Neutron Stars 1: Equation of State and Structure. – Astrophysics and Space Science Library. – 2007. – 326 p.
- 22 Belvedere R., Boshkayev K., Rueda J.A., Ruffini R. Uniformly rotating neutron stars in the global and local charge neutrality cases // Nuclear Physics, Section A. – 2014. – Vol. 921. – P. 33-59.
- 23 Stergioulas N. Rotating Stars in Relativity // Living. Rev. – 2003. – Vol. 6. – P. 174.
- 24 Программный пакет «Wolfram Mathematica»: <https://www.wolfram.com/mathematica/>
- 25 Zimmerman R.L., Olness F.I. Mathematica for physics. Copyright © 2002 by Addison-Wesley Publishing Company, Inc. – 665 p.
- 26 Sadri Hassani, Mathematical Methods Using Mathematica: For Students of Physics and Related Fields. – 2003. – 253 p.

References

- 1 A.A. Detlaf, B.M. Yavorsky, L.B. Milkovskaya, Physics course. Vol. 2. Electricity and Magnetism (4th edition), (Moscow, Higher School, 1977), 384 p. (in Rus).
- 2 L.D. Landau, E.M. Lifshits, Short course in theoretical physics, Vol. 1: Mechanics. Electrodynamics, (Moscow, Science, 1969), 271 p. (in Rus).

- 3 A.N. Matveev, *Electrodynamics*, (2nd ed.), (Moscow, Higher. school, 1980), 383 p. (in Rus).
- 4 I.V. Saveliev *The course of general physics*, Vol. 2. Electricity, (Moscow, Science, 1970), - 442 p. (in Rus).
- 5 D.V. Sivukhin *General course of physics*, Vol. 3. Electricity (4th ed.), (Moscow, Fizmatlit; MIPT Publishing House, 2004), 656 p. (in Rus).
- 6 Ya.P. Terletsky, Yu.P. Rybakov, *Electrodynamics*. (2nd ed.), (Moscow, Higher. School, 1990), 352 p. (in Rus).
- 7 E. Purcell *Berkleev's physics course*. Vol. 2. Electricity and magnetism, (Moscow, Science, 1971), 448 p. (in Rus).
- 8 Ya.B. Zeldovich, I.D. Novikov, *The theory of stars and the evolution of stars*, (Moscow, Science, 1971), 486 p. (in Rus).
- 9 S. Shapiro, S. Tiukolski *Black holes, white dwarfs and neutron stars*, Trans. from English by ed. Ya. A. Smorodinsky, Vols 1-2, (Moscow, Mir, 1985), - 656 s. (in Rus).
- 10 Grechko L.G., Sugakov V.I., Tomasevich O.F., Fedorchenko A.M. *Collection of problems in theoretical physics*, (Moscow, Higher School, 1984), 319 p. (in Rus).
- 11 Griffiths, David J. *Introduction to Electrodynamics*, (5th ed.), (Pearson, 2017. ISBN 978-1108420419), 599 p.
- 12 James S. Marsh, *American Journal of Physics*, 50 (1), 51-53 (1982).
- 13 L.D. Landau, E.M. Lifshits, *Theoretical Physics*, Vol. II. Field theory. (8th ed.), (Moscow, Higher School, 2012), 536 p. (in Rus).
- 14 A.N. Tikhonov, A.A. Samara *Equations of mathematical physics*, (Moscow, Higher School, 2004), 798 p.
- 15 M. Abramowitz, I.A. Stegun *Handbook of Mathematical Functions*, (Dover Publications, Inc. New York, NY, USA © 1974 ISBN 0486612724, 1974), 1047 p.
- 16 J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (3rd ed.), (New York: John Wiley & Sons. ISBN 978-0-471-30932-1. OCLC 925677836, 1999), 808 p.
- 17 W. Greiner, *Classical Electrodynamics* (Springer, New York, USA, 1998). - 566 p.
- 18 V.G. Boltyanskii, N.Ya. Vilenkin, *Symmetry in algebra*, (2nd ed.), (Moscow, MTSNMO, 2002), 240 p. (in Rus).
- 19 N.E. Kochin, *Vector calculus and the beginnings of tensor calculus* (9th ed.), (Moscow, Science, 1965), 427 p. (in Rus).
- 20 K. Boshkayev, M. Rotondo, R. Ruffini, *Int. Journal Mod. Phys. Con. Ser.*, 12, 58-67 (2012).
- 21 P. Haensel, A.Y. Potekhin, D.G. Yakovlev (Eds.). *Neutron Stars 1: Equation of State and Structure*, (Astrophysics and Space Science Library, 2007), 326 p.
- 22 R. Belvedere, K. Boshkayev, J.A. Rueda, R. Ruffini, *Nuclear Physics A*, 921, 33-59 (2014).
- 23 N. Stergioulas, *Living. Rev.*, 6, 174 (2003). <https://arxiv.org/pdf/1612.03050.pdf>
- 24 Software package "Wolfram Mathematica": <https://www.wolfram.com/mathematica/>
- 25 R.L. Zimmerman, F.I. Olness, *Mathematica for physics*, (Copyright © 2002 by Addison-Wesley Publishing Company, Inc.), 665 p.
- 26 Sadri Hassani, *Mathematical Methods Using Mathematica: For Students of Physics and Related Fields*, 2003, 253 p.