

ФИЗИКА КОНДЕНСИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ И ПРОБЛЕМЫ МАТЕРИАЛОВЕДЕНИЯ

КРИТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА УРОВНЕЙ ЭНЕРГИИ В НЕУПОРЯДОЧЕННЫХ СИСТЕМАХ: I. ОРТОГОНАЛЬНЫЙ КЛАСС СИММЕТРИИ

И.Х. Жарекешев

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы

Исследуются статистика электронных уровней дискретного спектра неупорядоченных твердых тел в критической точке перехода металл-изолятор. Установлен однопараметрический скейлинг для ортогональной симметрии.

Введение

Статистические флуктуации в спектре энергии неупорядоченных квантовых систем в настоящее время привлекают большое внимание. Известно, что с увеличением амплитуды флуктуаций хаотического потенциала одноэлектронные состояния подвергаются скачкообразному переходу, а именно переходу от делокализованной фазы к локализованной фазе. Этот переход составляет основу для перехода металл-изолятор по Андерсону. Влияние беспорядка на волновые флуктуации электронов проявляется в их взаимной корреляции и во взаимной корреляции соответствующих им уровням энергии. Можно сказать, что статистика уровней энергии электронов очень чувствительна к переходу металл-диэлектрик. На металлической стороне перехода, статистика энергетических уровней может быть хорошо описана теорией хаотических матриц (RMT), развитой Вигнером и Дайсоном [1]. Используя решение нелинейной σ -модели с нулевой модой, было показано, что теория хаотических матриц действительно довольно точно определяет статистико-вероятностные свойства электронных спектров неупорядоченных систем, как показано в работе [2], в которой применялся метод формализма суперсимметрии. Позже были выведены поправки по теории возмущений для двухуровневой корреляционной функции в диффузионном режиме с использованием примесной диаграммной техники [3].

В изолированной фазе, то есть на диэлектрической стороне перехода металл-диэлектрик, там, где степень беспорядка W немного больше, чем критическая величина W_c , уровни энергии электронов сильно локализованных волновых состояний флуктуируют как независимые случайные переменные. Важной величиной для анализа спектральных флуктуаций является распределение расстояний между ближайшими уровнями энергии $P(s)$. Она содержит полную информацию о корреляциях всех уровней порядка n . В металлическом пределе функция $P(s)$ очень близка к предположению Вигнера

$$P_w(s) = \frac{\pi s}{2} \exp\left(-\frac{\pi s^2}{4}\right). \quad (1)$$

Здесь спейсинг s измеряется в единицах среднего расстояния между энергетическими дискретными уровнями Δ электронных состояний. В локализованном режиме, то есть в диэлектрическом пределе энергии спейсингов s распределены согласно закона Пуассона

$$P_p(s) = \exp(-s), \quad (2)$$

так как все уровни энергии электронов являются полностью некоррелированными, другими словами статистически независимыми. Изучение кроссовера функции $P(s)$ между распределениями Вигнера и законом Пуассона, перехода между этими предельными случаями, который сопровождается переходом металл-изолятор, вызванного беспорядком, в трехмерных системах было начато впервые в работе [4], и впоследствии, стало предметом

последующих систематических исследований [5-8].

Ранее в работе [4] было предположено, что $P(s)$ проявляет критическое поведение и должна была быть размерно-независимой на переходе металла-диэлектрика. Исследования по скейлингу конечного размера для функции $P(s)$ обеспечили не только альтернативный и более точный способ определения местоположения перехода и его критической точки, но и позволили изучить также критическое поведение длины локализации. Техническое достоинство этого метода заключается в том, что достаточно вычислять только спектры энергии, без громоздкого вычисления собственных функций и проводимости. С другой стороны, необходима выборка по очень большому числу хаотических реализаций из статистического ансамбля образцов. По сравнению с хорошо разработанным и тщательно апробированным методом трансфер-матриц, с помощью которого к переходу металл-диэлектрик приближаются с локализованной стороны (квази-одномерная геометрия этого метода предполагает полную локализацию всех электронных состояний согласно гипотезе однопараметрического скейлинга), процедура статистики уровней практически начинается с металлической стороны перехода. Таким образом, оба метода могут рассматриваться вместе как взаимодополняющие и дающие более полную информацию о критической области, приближаясь к критической точке с обеих сторон перехода.

В настоящей серии работ метод статистики уровней применяется для вычисления статистических свойств электронного спектра мезоскопических образцов в различных физических случаях, а именно: в присутствии симметрии к обращению времени в присутствии сильного спин-орбитального взаимодействия и в присутствии магнитного поля. Для многих из этих ситуаций в настоящий момент имеются экспериментальные измерения, приведенные в различных лабораториях. Результаты этих экспериментальных измерений можно сравнить с теоретическими результатами в тех диапазонах параметров, которые учитываются принимаемой моделью. Многие из этих результатов хорошо согласуются друг с другом, подтверждая тем самым, что наш подход адекватно объясняет рассматриваемые явления.

Интерполяционная формула

Предположение о существовании третьей универсальной статистики точно на переходе возбудило значительный интерес для нахождения аналитического выражения для критической функции распределения расстояния между ближайшими уровнями $P(s)$. Из общих соображений для ортогональной симметрии мы имеем $P(s) = Bs$ для малых $s \leq 1$.

Для больших энергий спейсингов s было предложено, в основном, три независимых аналитических выражения.

1) Интерполяционная формула Броди [9]

$$P(s) = As^\beta e^{-Bs^{1+\beta}} \quad (3)$$

Здесь коэффициенты $A = (1 + \beta)B$ и $B = [\Gamma((2 + \beta)/(1 + \beta))]^{1+\beta}$ определяется из условий нормировки

$$\int P(s)ds = 1, \quad \int P(s)sds = \Delta. \quad (4)$$

При этом параметр отталкивания β может быть не только целочисленным, но и дробным ($\beta < 1$).

2) Другая интерполяционная формула также связана с дробным показателем β (параметр отталкивания) и известна как формула распределения Израйлева [10]

$$P(s) = As^\beta (1 + B\beta s)^c \exp(-Ds^2 - Es), \quad (5)$$

где

$$C = (1 - \beta/2)2^\beta / \beta - C_0, \quad D = \beta\pi^2 / 16, \quad E = (1 - \beta/2)\pi/2, \quad (6)$$

Оба вышеуказанных интерполяционных выражения: формула (3) и формула (5) совпадают, когда они стремятся к пределу теории хаотических матриц, если $\beta=1$, и к пределу Пуассона $\beta=0$, соответственно.

Один из этих подходов предполагает, что критическая функция $P_c(s)$ является пуассоновской для энергий $s \geq 1$. Это обосновывается тем, что в критической точке энергия Таулесса, которая является мерой числа уровней энергии дающих вклад в средний кондактанс системы G , становится порядка среднего спейсинга Δ , в то время, как отталкивание между уровнями, важно только на малых энергиях s .

3) Третьей существенной асимптотической формой является

$$P_c(s) = \infty \exp(-As^\alpha), \quad (7)$$

которая была предложена на основе аналогии между последовательностью уровней энергии и классически одномерным газом взаимодействующих «фиктивных» частиц [11]. Здесь показатель α определяется только размерностью пространства d и критическим индексом длины локализации ν :

$$\alpha = 1 + \frac{1}{d\nu}. \quad (8)$$

Это соотношение получено в модели Гиббса, в которой предполагалось, что взаимодействие между фиктивными частицами происходит по степенному закону $s^{2-\alpha}$. Распределение (7) спадает быстрее, чем распределение Пуассона (2), для которого $\alpha=1$, и намного медленнее, чем распределение Вигнера (1), для которого $\alpha=2$.

Численные эксперименты для трехмерной модели Андерсона были выполнены с целью, чтобы проанализировать, какое из вышеперечисленных аналитических выражений (2), (5) или (7) является правдивым или, по крайней мере, продемонстрировать какое из них наиболее близко к искомому выражению. Большинство предыдущих результатов по численному моделированию показало, что наиболее подходящей гипотезой для описания критической функции распределения между ближайшими уровнями энергии является последняя, а именно формула (7), причем с дробным показателем $\alpha=1.2-1.3$. Однако, так как ошибка округления в приведенных работах была большой для больших энергий s , то ситуация с показателем $\alpha=1$ не могла быть полностью исключена. Исходя из этих результатов, нахождение точной асимптотической формы $P(s)$ все еще является открытым вопросом и остается предметом продолжающихся по сегодняшний день противоречивых дебатов. Представляется необходимым получить результаты подробного, численного исследования высокой точности для анализа формулы критического распределения межуровневых расстояний $P(s)$.

С применением диагонализации по методу Ланцоша андерсоновского гамильтониана, который был специально усовершенствован нами с целью, достичь гигантских размеров систем вплоть до 10^6 узлов решетки, мы исследовали критическое поведение и свойства скейлинга конечного размера интегрированной плотности вероятности межуровневых интервалов $I(s)$. Наш основной результат заключается в том, что асимптотическая форма критической $I_c(s)$ и, следовательно $P(s)$ при больших s очень близка к пуассоновскому спаду, как основной член, тем самым подтверждая идеи работ [4]. Кроме того, используя независимость функции $I_c(s)$ от размеров системы L на переходе проводник-изолятор и исследуя скейлинг функций $I(s)$ вблизи перехода в зависимости от размера L и степени беспорядка, мы впервые рассчитали длину корреляции, и ее критический индекс $\nu=1.45$. Эти результаты получены нами независимо.

Мы пользуемся гамильтонианом Андерсона в решеточной форме согласно формуле

$$H = I \left[\sum_i \varepsilon_i a_i^\dagger a_i + \sum_{i \neq j} a_j^\dagger a_i + h.c. \right],$$

Локальные энергии узлов измеряются в единицах интеграла перекрытия между соседними узлами. Эти энергии являются независимыми случайными переменными, которые распределены вокруг $\varepsilon=0$ согласно равномерному распределению. Ширина этого распределения определяет W , определяет степень беспорядка примесного потенциала. Использовалась простая кубическая решетка. Здесь следует отметить, что такой выбор решетки вполне проверен, так как результаты наших вычислений не зависят от типа решетки. Периодические граничные условия накладываются на волновые функции по всем граням трехмерного образца.

Мы вычислили электронные спектры кубических систем линейных размеров, изменяющихся в диапазоне от $L=28$ до $L=100$. Из наших результатов полученных методом трансфер-матриц вытекает, что в центре зоны, то есть при $\varepsilon=0$ степень критического беспорядка W равна $W_c=16.5$. Спектр электронов должен был выпрямлен (unfolding procedure). Выпрямление плотности состояний производилось с помощью сплайнов по полиномам высокой степени. Следует отметить, что диагонализация гигантских матриц разряженной структуры размерами до 10^6 матричных элементов, соответствующих наибольшим решеткам из 100^3 узлов является весьма нетривиальной задачей. Примером для точной диагонализации могут служить результаты по вычислению функции распределения плотности вероятности энергетических щелей (расстояний) между ближайшими уровнями энергии квантовой наносистемы в условиях близких к переходу металл-изолятор. Они показаны на рисунке 1.

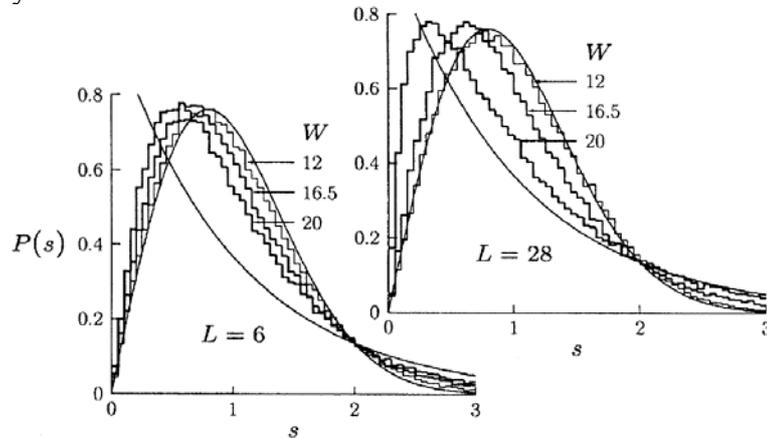


Рис. 1. Функция распределения расстояний между ближайшими уровнями энергии $P(s)$ для кубических решеток двух линейных размеров L при различной степени беспорядка примесного потенциала вблизи фазового перехода металл-изолятор. Сплошные кривые соответствуют распределениям Вигнера (1) и Пуассона (2)

Чтобы захватить полный диапазон всех спейсингов s , в работе [11] была предложена интерполяционная формула для функции распределения межуровневых интервалов

$$P_{AKL}(s) = B^0 s \exp(-A^0 s^\alpha) \quad (9)$$

Вследствие двух условий нормировки для коэффициентов A и B имеем

$$A^0 = \left[\frac{\Gamma(3/\alpha)}{\Gamma(2/\alpha)} \right]^\alpha, \quad B^0 = \frac{\alpha A^{2/\alpha}}{\Gamma(2/\alpha)}. \quad (10)$$

Совмещение формулы (9) с нашими данными по критерию χ^2 дает наилучшую оценку для показателя $\alpha = 1.48 \pm 0.08$. в интервале $0 < s < 4$. При этом коэффициенты по формуле (10) A и B равны $A \approx 1.35$, $B \approx 2.41$, с типичной относительной ошибкой 4.2% для $L=5$ с уровнем доверия гипотетической оценки 0.95. Например, для размера $L=100$ ожидаемые и полученные величины для χ^2 равны 52 и 37, соответственно. Найденный по гипотезе (9) показатель α намного больше, чем показатель α по формуле (8), предположенным более ранними теориями. Для энергии $s > 3$ наблюдается существенное отклонение компьютерных гистограмм от $P_{AKL}(s)$. В свою очередь, из-за нормировки коэффициенты A и B зависят от показателя α . Используя это, мы нашли, что значения показателя α становится еще больше, что приводит к еще более сильному отклонению от компьютерной гистограммы. Отклонение подтверждает, что интерполяция по формуле (9) в области энергий $s \sim 1$ не обеспечивает надежной информацией о показателе α потому, что экспоненциальный хвост функции распределения $P(s)$ дает вклад в относительную погрешность только с очень малым весом.

Следовательно, необходимо отдельно исследовать асимптотическое поведение при больших энергиях s не включая данные из области $0 < s < 3$. Из сравнительного анализа экспериментальной $P(s)$ и $P_{AKL}(s)$ по аналитической формуле (9) мы приходим к выводу, что гипотеза, которая предлагается интерполяционной формулой (9) не выдерживает статистической проверки и может быть отвергнута, как недостаточно адекватная. Таким образом, проблема точности вида формулы для критической функции распределения $P_c(s)$ в критической точке перехода проводник-изолятор представляется пока не разрешенной.

Асимптотика критической функции распределения

В этом пункте предлагается не только точное поведение на асимптотике функции распределения $P(s)$, но и общую интерполяционную формулу, которая верна с хорошей точностью на всем диапазоне изменения спейсингов s . В дальнейшем мы будем иметь дело с кумулятивной функцией распределения межуровневых расстояний

$$I(s) = \int_s^{\infty} P(s') ds'. \quad (11)$$

Она дает плотность вероятности найти соседние уровни энергии на расстоянии E , больше некоторого, то есть $E > s\Delta$. Строже говоря, функция $P(s)$ есть плотность вероятности, а $dI = P(s)ds$ сама вероятность. Отметим, что интегрирование по формуле (11) не изменяет асимптотического экспоненциального поведения функции $P(s)$.

Численное моделирование кумулятивной функции распределения $I(s)$ аналогично тому, как это делается для интегрированной плотности состояний при распрямлении спектра. После перераспределения спейсингов в порядке увеличения в возрастающую последовательность можно очень точно построить гистограммы $I(s)$. Эта процедура более точно, чем прямой расчет $P(s)$, так как все события в статистическом смысле, со спейсингами большими, чем выбранное s собираются, что приводит к значительно меньшим численным погрешностям. С другой стороны, можно расширить область до больших спейсингов вплоть до $s \approx 10$ для общего количества $N_s \sim 10^7$. Используя общую статистическую гипотезу для больших спейсингов s , а именно, $\ln I_c(s) = -A_c s^\alpha$, мы вычисляем коэффициент A_c и показатель α для различных размеров L . Независимо от L двухпараметрическая интерполяция дает следующую оценку для показателя $\alpha = 1.0 \pm 0.1$. Она находится в прямом противоречии с аналитическими результатами (9)–(10). Мы приходим к выводу, что численные данные для $\ln I_c(s)$ более точно описываются линейным законом для всех больших энергий ($s > 3$) так, что справедливо $I_c(s) \propto \exp(-A_c s)$ с коэффициентом $A_c = 1.9 \pm 0.1$. Данные численного расчета показаны $\ln I_c(s)$ на рисунке 2.

Такое поведение выглядит аналогичным поведению в изолирующей фазе, при этом скорость экспоненциального спада больше единицы (почти вдвое в нашем случае). Это объясняется квантово-механическим отталкиванием уровней на малых масштабах энергии и жесткостью спектра на больших масштабах энергий. Показатель степени $\alpha \approx 1.2$, который был найден после анализа всей формы $P(s)$ в диапазоне $0 < s < 5$ для систем размерами $L \leq 21$ с использованием аналогичного метода статистики уровней [5] заметно отличается от нашего результата. Вышеприведенная асимптотическая формула (10) может быть объяснена следующим образом. Вероятность нахождения соседних спейсингов на расстоянии большем, чем определенная энергия может быть вычислена из распределения $Q_N(E)$ числа N уровней, лежащих внутри интервала E . Число уровней в интервале фиксированной ширины E , флуктуирует от образца к образцу вокруг среднего значения $\langle N(E) \rangle = \frac{E}{\Delta}$, с дисперсией

$$\Sigma^2(E) = \langle [N - \langle N(E) \rangle]^2 \rangle. \quad (12)$$

Мы получили результат, что это распределение является Гауссовым

$$Q_N(E) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Sigma}} \exp\left(-\frac{[N - \langle N(E) \rangle]^2}{2\Sigma^2(E)}\right). \quad (13)$$

Действительно, как показано на вставке к рисунку 2 все точки распределения для нормированного числа уровней $\delta = (N - \langle N \rangle) / \Sigma$, найденные методом численного моделирования, хорошо ложатся по одному нормальному закону, независимо от энергии E .

Для малых относительных флуктуаций Гауссова формула была выведена в пределе теории хаотических матриц. Предполагая, что на переходе металл-изолятор $\Sigma^2(E) = k \langle N(E) \rangle$ с константой $k \approx 0.27$, которая определяется критическим кондактансом G_c неупорядоченной системы можно получить из формулы (13), что

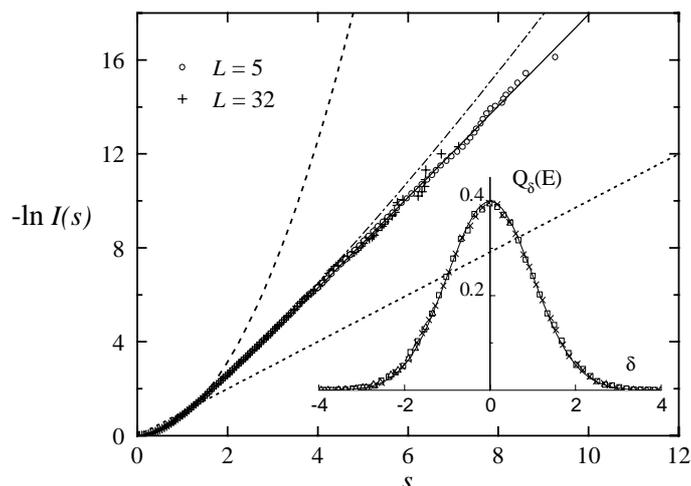
$$Q_N(E) \propto \exp\left(-\frac{\langle N(E) \rangle}{2k}\right) \quad (14)$$

для $\langle N(E) \rangle \geq N$. Следовательно вероятность, найти ни одного уровня внутри интервала шириной $s = E/\Delta \geq 1$ определяется следующим образом

$$I_c(s) = -\frac{dQ_0(s)}{ds} \propto \exp\left(-\frac{s}{2k}\right) \quad (15)$$

При $s \geq \Delta$ формула (13) совпадает с предельным выражением (7), $I_c(s) = \exp(-\frac{A_c s^2}{2\mu^2})$. Взяв производную получим при $s \leq \Delta$ линейное поведение $P_c(s) = \frac{A_c}{\mu} s$. Общая интерполяционная формула для функции распределения межуровневых расстояний принимает вид:

$$P_c(s) = \frac{A_c s}{\sqrt{\mu^2 + A_c^2 s^2}} \exp\left[\mu - \sqrt{\mu^2 + A_c^2 s^2}\right]. \quad (16)$$



L – линейный размер трехмерной системы; W – степень беспорядка; сплошная линия – формула (15); штриховая линия – распределение (1); пунктирная линия – распределение (2); штрихпунктирная линия – распределение по формуле (9) с $\alpha=1.24$ из формулы (10). Вставка – распределение $Q_\delta(E)$ флуктуаций нормированного числа уровней $\delta=(N-\langle N \rangle)/\Sigma$ для различных энергий E/Δ : 5 (\square), 10(\times) и 15(Δ). Сплошная линия – формула (13).

Рис. 2. Интегрированная функция распределения межуровневых расстояний $I(s)$ на переходе проводник-изолятор

Эта функция наилучшим образом объясняет поведение критической функции распределения межуровневых расстояний на переходе металл-диэлектрик. Несмотря на то, что здесь не приводится строгий аналитический вывод (16), предложенная интерполяционная формула дает отличное согласие с результатами численного эксперимента по всему диапазону вычисляемых энергий. Отметим, выражение (16) удовлетворяет обоим условиям нормировки (4).

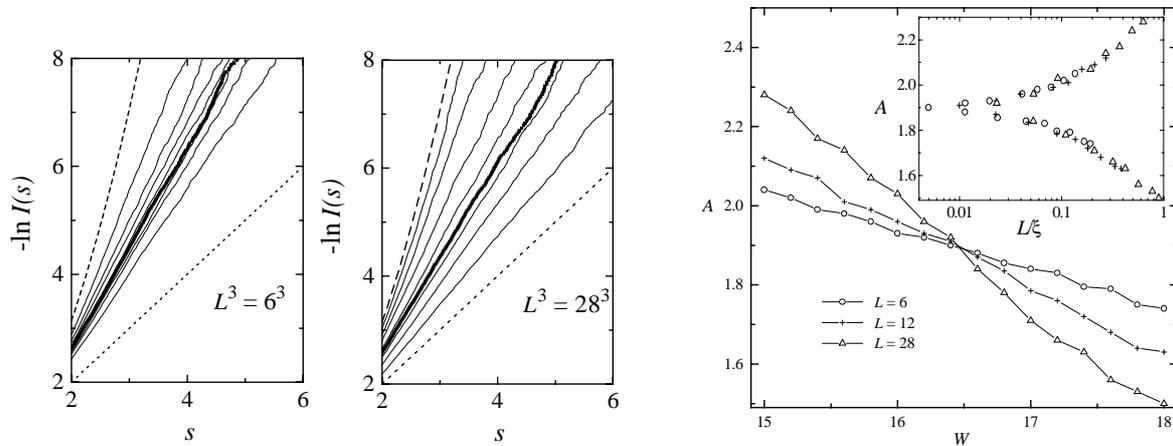
Критическое поведение и скейлинг

Чтобы изучить скейлинг конечного размера поведение функции $I(s)$ для больших s , мы расширили вычисления на все другие степени беспорядка W_c причем для различных размеров системы. Эти вычисления были выполнены по большому ансамблю образцов. Число образцов для каждой выбранной пары L и W выбиралось так, чтобы полное число уровней было фиксированным $N_s \approx 10^5$. Мы также тщательно исследовали чувствительность результатов по отношению к числу реализаций. Однако, никакого изменения в пределах ошибки не наблюдалось, при увеличении размеров системы за счет уменьшения числа реализаций и наоборот. На рисунке 3 (слева) показано, что при увеличении степени беспорядка W распределение спейсингов $I(s)$ для фиксированного L изменяется непрерывно от $I_w(s)$ до $I_p(s)$. Причем крутизна кроссовера зависит от размера L . Чем больше L , тем быстрее наступает переход между двумя предельными режимами. И только при $W=W_c=16.5$ распределение не зависит от размера L , то есть $I(s)$ имеет почти одинаковую асимптотическую форму для всех размеров $L=5$ до $L=100$ (в том числе и для бесконечной системы). Этот результат отражает универсальность уровней в критической точке перехода проводник-изолятор. Ясно, что в термодинамическом пределе статистика уровней изменяется непрерывно от делокализованного к локализованному состоянию.

Для конечных L распределение $I(s)$ проявляет скейлинг вблизи W_c . В пределах критической области $L < \xi(W)$, разумно предположить, что линейный размер $\ln I(s)$ управляется однопараметрическим законом подобия

$$A(W, L) = f\left(\frac{L}{\xi(W)}\right). \quad (17)$$

Рисунок 3 (справа) показывает зависимость коэффициента A от беспорядка W в критической точке перехода для различных L . Отметим, что функция $A(W_c)$ не зависит от L , что видно из общей точки пересечения всех кривых, и равно $A(W_c) = A_c = const$. Если мы введем скейлинговый параметр, в виде длины корреляции $\xi(W)$, мы найдем, что все точки падают на одну единственную кривую, которая состоит из двух ветвей. Верхняя ветвь относится к металлическому состоянию $A > A_c$, а нижняя ветвь – к диэлектрическому состоянию $A < A_c$. Эта кривая, называемая скейлинговой зависимостью, показана на вставке к рисунку 3. Критическая экспонента (критический индекс ν) вычислялась по методу, опубликованному в работе [4], где брались только мелкомасштабные корреляции $P(s)$. Мы нашли численное значение по методу наименьших квадратов $\nu = 1.40 \pm 0.15$ в полном согласии с данными полученными ранее совершенно другими методами.



L – линейный размер трехмерной системы; W – степень беспорядка: $W=12,14,15,16,16.5, 17, 18$ и 20 сверху вниз. Вставка – однопараметрическая зависимость A от $L/\xi(W)$.

Рис. 3 – Функция вероятности $I(s)$ для разных размеров L трехмерной системы (слева); Скейлинговая переменная A как функция беспорядка W (справа)

Заключение

Мы представили крупно-масштабные численные результаты по статистике уровней энергии электронов вблизи перехода ПИ, вызванного беспорядком примесного потенциала для систем размерами до рекордных $L^3=100^3$ узлов решетки. Нами был выполнен сравнительный анализ с результатами, полученными с помощью различных аналитических методов и других численных расчетов. Показано, что в критической точке перехода проводник-изолятор вероятность межуровневых расстояний имеет инвариантный и универсальный вид. Ее асимптотическая форма имеет вид $I_c(s) \propto \exp(-A_c s)$ с $A_c \approx 1.9$, очень похожий на распределение Пуассона. Такой спад является прямым следствием линейной зависимости между дисперсией $\Sigma^2(E)$ и средним $\langle N(E) \rangle$ числа уровней в интервале заданной ширины E . Мы убеждены, что эта простая экспоненциальная асимптотика критического распределения спейсингов справедлива не только для ортогональной симметрии (т.е. без спин-орбитального взаимодействия и без магнитного поля), но также и для других классов универсальности: унитарной симметрии (т.е. при сильном спин-орбитальном взаимодействии). Расчеты показали, что критическая скорость спада A_c не зависит от фундаментальной симметрии, но зависит от физической пространственной размерности.

Литература

1. Wigner E.P. Statistical theories of spectral fluctuations / ed. by C.E. Porter. – New York: Acad. Press, 1965. – 576 p.
2. Efetov K.B. Supersymmetry in Disorder and Chaos. – Cambridge: Cambridge University, 1997. – 540 p.
3. Альтшулер Б.Л., Шкловский Б.И. Отталкивание энергетических уровней и проводимость малых металлических образцов // ЖЭТФ. – 1986. – Т.91, №7. – С. 220-234.
4. Zharekeshev I.Kh., Kramer B. Scaling of level statistics at the disorder-induced metal-insulator transition // Phys. Rev. B. – 1995. – Vol.51. – P. 17239-17242.
5. Kravtsov V.E., Lerner I.V. Effective plasma model for the level correlations at the mobility edge // J. Phys. A: Math. Gen. – 1995. – Vol.28. – P. 3623-3640.
6. Evangelou S.N. Level-spacing function $P(S)$ at the mobility edge // Phys. Rev. B. – 1994. – Vol.49. – P. 16805-16808.
7. Zharekeshev I.Kh. Universal statistics of energy levels at the metal-insulator transition // Вестник КазНУ. Серия физическая. – 2009. – Т.31, №4. – С.56-60.
8. Hofstadter E., Schreiber M. Relation between energy-level statistics and phase transition and its application to the Anderson model // Phys. Rev. B. – 1994. – Vol.49. – P. 14726-14729.
9. Brody T.A. Statistical measure for the repulsion of energy levels // Nuovo Cimento Lett. – 1973. – Vol.7. – P. 482-484.
10. Izrailev F.M. in Quantum Chaos – Measurement / ed. by P. Cvitanovic, I. Percival, A. Wirzba. – Kluwer Scientific Publishers, 1992. – P. 89-122.
11. Kravtsov V.E., Lerner I.V., Altshuler B.L., Aronov A.G. Universal spectral correlations at the mobility edge // Phys. Rev. Lett. – 1994. – Vol.72. – P. 888-891.

РЕТТЕЛМЕГЕН ЖҮЙЕЛЕРДЕГІ ЭНЕРГИЯ ДЕҢГЕЙЛЕРІНІҢ КРИТИКАЛЫҚ СТАТИСТИКАСЫ: I. СИММЕТРИЯНЫҢ ОРТОГОНАЛДЫҚ КЛАСЫ

И.Х. Жарекешев

Металл-изолятор көшудің критикалық нүктесінде дискреттік спектрдің реттелмеген қатты денелердегі электрон деңгейлерінің статистикасы зерттелген. Ортогоналдық симметрия үшін бірпараметрлік скейлинг анықталған.

CRITICAL STATISTICS OF ENERGY LEVEL IN DISORDERED SYSTEMS: I. ORTHOGONAL SYMMETRY CLASS

I.Kh. Zharekeshev

The statistics of electronic levels of discrete spectra of disordered solids at the critical point of the metal-insulator transition are investigated. The single-parameter scaling for the orthogonal symmetry is established.