ҒТАМР 29.01.07, 29.05.41, 29.05.43

Талхат А.З., Абылаева А.Ж., Муратхан А.

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті,
Қазақстан, Алматы қ., e-mail: medeu.abishev@kaznu.kz, saken.yan@yandex.com

ЖАЛПЫ САЛЫСТЫРМАЛЫЛЫҚ ТЕОРИЯСЫНДА РЕЛЯТИВТІ ШЕКТЕЛГЕН ҮШ ДЕНЕ ОРБИТАСЫНЫҢ ОРНЫҚТЫЛЫҒЫ

Жұмыста массивті екі айналмалы дене өрісіндегі сынақ денесінің квази-дөңгелек қозғалысындағы орбитасының орнықтылық шарттары зерттелді. Орталық дененің орналасуы координаттар басына сәйкес келеді, екінші дене орталық (бірінші) дененің айналасындағы дөңгелек орбитамен қозғалады. Сынақ денесі айналмалы қозғалысы ескеріледі.

Сынақ денесінің айналмалы қозғалыс теңдеулері зерттелді. Бұрыштық жылдамдық Лагранж теңдеулері сынақ денесінің өзіндік айналуына жауапты мүшемен толықтыруға мүмкіндік береді. Осылайша, мәселенің физикасы іс жүзінде бақылауларға жақындатылады. Өз кезегінде, қозғалыс теңдеулерін шешу қиын, бұл зерттеулерге сандық әдістерді қолдануға әкеледі. Қозғалыс теңдеуі уақыт бойынша орташаланады, қозғалыс интегралдарының айқын түрі яғни қозғалыстың траекториясына арналған теңдеулердің айқын формасы табылған.

Сызықты емес механиканың асимптотикалық әдістерінің көмегімен сынақ денесінің қозғалысы теңдеулері жалпы салыстырмалық теориясында шектелген үш дене мәселесінде интегралданады.

Біз денелердің өлшемдерін олардың өзара қашықтықтарындағы салыстырғанда нөлінші жуықтаумен шектелеміз.

Түйін сөздер: ЖСТ, үш дене есебі, айналмалы қозғалыс, қозғалыстың орнықтылығы, үш дене есебі.

Talkhat A.Z., Abylayeva A.Zh., Muratkhan A.

Al-Farabi Kazakh National University, Kazakhstan, Almaty,
e-mail: medeu.abishev@kaznu.kz, saken.yan@yandex.com

The orbital stability of relativistic three-body problem in the fremework of general relativity

In this paper, the stability conditions of a quasi-circular orbit of a test body in the field of two rotating bodies in the framework of general theory of relativity are investigated. The position of the central body coincides with the reference point of coordinates, the second body is moving in circular orbit around a central body (first body), and without inner mass distribution. The test body moves in a perturbed circular orbit. The equations of translational motion of a test body with rotation components are studied. The initial angular velocity allows the Lagrange equation to be supplemented with a member responsible for the uniform rotation of the test body itself. The physical Interpretation of the phenomenon as close as possible to the actually observed. In turn, the equations of motion are complicated, which inevitably leads to the use of numerical methods of analysis. The equations of motion are averaged over time using asymptotic methods of nonlinear mechanics.

We confine ourselves to zero terms of expansion in powers of the relations of the sizes of bodies to their mutual distances.

Key words: General relativity, rotational motion, translational motion, stability of motion, three-body problem.

Талхат А.З., Абылаева А.Ж., Муратхан А.

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Казахстан, г. Алматы,
e-mail: medeu.abishev@kaznu.kz, saken.yan@yandex.com

Устойчивость орбиты пробного тела в релятивистской ограниченной задаче трех тел

В работе Исследованы условия устойчивости квазикруговых орбит пробного тела в поле двух вращающихся тел в ограниченной круговой задаче трех тел в ОТО. Положение покоящегося центрального тела совпадает с точкой отсчета координат, второе тело движется по кругу вокруг центрального (первого) тела и не подвергается возмущению. Пробное тело движется по возмущенной круговой орбите.

Изучены уравнения поступательного движения пробного тела с вращением. Начальная угловая скорость позволяет дополнить уравнение Лагранжа членом, отвечающим за однородное вращение самого пробного тела. Тем самым, физика явления максимально приближается к реально наблюдаемой. В свою очередь уравнения движения усложняются, что неминуемо ведёт к использованию численных методов анализа. Уравнения движения усреднены по времени, найден явный вид интегралов движения, явный вид уравнений для траекторий движения.

С помощью асимптотических методов нелинейной механики проинтегрированы уравнения поступательного движения пробного тела в ограниченной круговой задаче трех тел в ОТО с периодически меняющейся во времени пертурбационной добавкой.

Мы ограничиваемся нулевыми членами разложения по степеням отношений размеров тел к их взаимным расстояниям.

Ключевые слова: общая теория относительности, вращательное движение, поступательное движение, устойчивость движения, задача трех тел.

Кіріспе

Табиғаттағы құбылыстар жекелеген денелерден емес, көп бөлшекті жүйеден тұратындығы белгілі. Сол көп бөлшекті жүйенің бірі – аспан денелерінің қозғалысында N дене есебі деген атпен белгілі. N массадан тұратын жүйенің қозғалысын зерттеудің жекелеген жағдайы – үш дене қозғалыснның заңдылығын зерттеу. Астрономияда және аспан механикасы тарихында маңызды орны бар мәселенің бірі осы – үш дене есебі. Ньютонның бүкіл әлемдік тартылыс заңымен байланысқан үш массаның бір бірімен салыстырмалы қозғалысын зерттеу – есептің қойылуынан бастап кәзіргі уақытқа дейін өз маңыздылығын жоғалтқан емес, сондықтан көптеген математиктер мен физиктердің назарын өзіне тартты, олардың ішінде әлемге әйгілі математиктер Дж. Лагранж, С. Жакоби, А. Пунчинь, Дж. Бирхофф және басқалар осы мәселе бойынша көп жылдар бойы зерттеулер жасап, тамаша идеяларды ұсынды, көптеген құнды әдістер мен нәтижелерді алды, алайда үш дене есебінің жалпы шешімін ешкім де таба алмады. Зерттеулерге сүйеніп, Брунсу және А. Пуанкаре үш дене есебінің жалпы шешімін координаттар мен жылдамдықтарының алгебралық немесе бір мәнді трансцендenттік функциялармен көрсету мүмкін емес екенін дәлелдеді. Өткен ғасырдың соңында, ғалымдар бұл мәселені басқаша шешуге тырысты. Сол әдістердің бірі ретінде – жалпы шешімді шексіз қатарлар түрінде табуды 1912 жылы фин математигі К. Зундман ұсынды. Алайда, жиырма жылдан кейін, Француз ғалымы Д. Белорицкий заманауи астрономиялық жылнамаларда көрсетілген дәлдіктегі планетаның орнын анықтау үшін, Зундман қатарларында көрсетілген мүшелердің саны ондаған нөлге ие бірлікте болуы керек деп көрсетті. Бұл есептеуді тіпті қазіргі заманғы компьютерлердің көмегімен жүзеге асыру мүмкін емес еді [1,2].

Үш дене есебінің жалпы шешімі болмағанымен, кейбір дербес жағдайларды зерттеу ғалымдардың қызығушылығын туғызды. Берілген екі массаның гравитациялық өрісіндегі сынақ массасының қозғалысын зерттеу шектелген үш дене есебі деп аталады. Сынақ массаның басқа массаларға әсері ескерілмейді. Егер берілген екі массаның біреуі екіншісін дөңгелек орбитамен айналса, онда есеп дөңгелек қозғалысты шектелген үш дене есебі деп аталады. Егер екінші масса эллипстік орбитамен қозғалса есеп сәйкесінше эллипстік – шектелген үш дене есебі болады. Эйлер және Лагранж кейбір шектелген жағдайлардағы шешімдерді тапты. Солардың мысалы ретінде, шамалары бірдей үш масса тең қабырғалы үшбұрыштың төбелерінде орналасып, массалық центрді айнала қозғалатын жағдай үшін шешімді айтуға болды. Алғашында, бұл шешімнің тек математикалық мағынасы ғана бар болды. 1906 жылы, Юпитер орбитасында орналасқан, күн және Юпитермен тең қабырғалы екі үшбұрыштың төбелеріне орналасқан шағын планеталар тобы – «гректер» және «трояндықтар» анықталғаннан кейін, бұндай дербес шешімдердің практикалық маңыздылығы ескеріле бастады [3].

Эйнштейннің жалпы салыстырмалылық теориясы (ЖСТ) заманауи гравитацияның ралятивті теориясы болып табылады. Осы теорияның көмегімен Меркурий планетасының перигелийдің қозғалысын теориялық есептеулерде анық сипаттап, релятивті эффектілерді ескерудің маңыздылығын көрсетті. Бастапқыда бақылау нәтижелерінің дәлдігі төмен болғандықтан, бұл теория аспан механикасында аз мөлшерінде қолданылды. Қазіргі уақытта, бақылау дәлдігі жоғарлаған сайын және жаңа бақылау нәтижелерін қолданудың маңызыдылығы арта бастағандықтан, салыстырмалық теориясынның эффектілерін ескеру қажеттілігі де сәйкесінше артуда. Осы бағыттағы зерттеулерге көп үлес қосқандардың бірі академик В.А. Фок және оның зерттеу жолын жалғастырушылар Брумберг, М.М. Абдильдин т.б. болды. ЖСТ теңдеулері екінші реттік, дербес туындылы, сызықты емес теңдеулер. Елер табиғаттағы аспан денелерінің өз өсін айналатындығын және олардың ішкі құрылымы бар екендігін ескерсек, онда әр түрлі әдіспен алынған релятивтік қозғалыс теңдеулері әр түрлі болып қоймай, бірдей әдіспен алынған теңдеулерің өзі бір мәнді болып шықпаған. Бұл жағдай релятивті қозғалыс теңдеулерінің бірдейлікке келуіне кедергі болуда. Осы жағдайларды ескеріп, қозғалыс орбиталарының орнықтылығын зерттеу әлі күнге дейін зерттеуді қажет ететіндігін көруге болады [5-10].

Бұл жұмыста сынақ массасының орбитасының орнықтылық мәселесі зерттеледі. Екі массивті дененің өзіндік айналуын ескерсек, сынақ денесінің қозғалысына қаншалық әсер ететіндігін зерттейміз. Қозғалыс теңдеулерінде релятивтік жуықтауларды ескеріледі.

ЖСТ дағы айналмалы үш дене есебінің Лагранж және Гамильтон функциялары

Бұл жұмыста, сынақ дене қозғалысының орталық дене есебінен болатын релятивтік түзетулері ескеріледі. Сынақ денесіне әсер ететін орталық және екінші денелердің потенциалдары төмендегідей жуықтауларда ескереіледі [11]:

$$U_1 << c^2, U_2 << U_1 \qquad (1)$$

мұндағы U_1, U_2 сәйкесінше орталық және екінші денеің потенциалдары. Орталық дененің орналасуы координаттар басына сәйкес келеді, екінші дене орталық (бірінші) дененің айналасында шеңбер бойымен қозғалады. Бұндай есеп шектелген дөңгелек қозғалысты үш дене есебі деп аталады. Сынақ денесі ауытқыған квазидөңгелек орбита бойымен қозғалады.

Қозғалмалы үш дененің жүйесі энергияны жоғалта отырып гравитациялық толқындарды шығарады. Энергияны жоғалту, алайда, тек $1/c$ бесінші жуықтауда пайда болады [12-16]. Алғашқы төрт жуықтауда жүйенің энергиясы тұрақты болып қалады. Осыдан гравитациялық денелер жүйесі Лагранж функциясының көмегімен $1/c^4$ қатарына дейінгі дәлдікпен сипатталуы мүмкін, электромагниттік өріске қарағанда, мұнда Лагранж функциясы екінші қатардың мүшелеріне дейінгі дәлдікпен ғана ерекшеленеді. Біз екінші рет мүшелеріне дейінгі дәлдікпен Лагранж денелер жүйесінің функциясын шығардық. Одан кейін біз жуықтауда жүйе қозғалысының теңдеуін, ал кейінгісін Ньютон теңдеуінен кейін табамыз. Релятивтік аспан механикасының есептері үшін жеткілікті дәлдікпен, денелердің ішкі мүшелерінің әсерін мүлдем ескермеуге болады. Біз a денелер өлшемдерінің өзара l қашықтығына қатынасы дәрежелері бойынша ыдыраудың нөлдік құрылымымен шектелеміз .

Үш айналмалы денелер үшін айналмалы және ілгерімелі қозғалысы үшін Лагранж функциясы келесі түрде болады [17]:

$$L = L_0 + L^*, \qquad (2)$$

мұндағы L_0 – үш нүктелік масса үшін Лагранж функциясы, ал екінші L^* мүшесі айналмалы мүшесі құрайтын түземелерге байланысты [18-19].

Біздің мақсатымыз – орбиталық моменттің орташа өзгерісімен сипатталатын, сынақ денесінің (үшінші дененің) эволюциялық қозғалыс теңдеулерін табу. Ол үшін қарастырылып отырған жүйенің Гамильтон функциясын мынадай өрнектейміз [20]:

$$H = \vec{v}_i \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} - L = \vec{v}_i \frac{\partial L_0}{\partial \vec{v}_i} - L_0 + \vec{v}_i \frac{\partial L^*}{\partial \vec{v}_i} - L^* = H_0 + H^*, \quad (3)$$

мұндағы – H_0 үш нүктелік масса үшін Гамильтониан, ал екінші H^* мүшесі айналмалы қозғалыстың есебінен болатын түземелер.

H^* гамильтонианға қатысты бұл шама мынадай қатынаспен анықталады:

$$H^* = -\left(\omega_1^2 I_1 + \omega_2^2 I_2 + \omega_3^2 I_3\right) - \frac{1}{c^2}\Big[I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2 -$$

$$-\frac{1}{2}\left(I_1\left(\boldsymbol{\omega}_1 \cdot \mathbf{p}_1\right)^2 + I_2\left(\boldsymbol{\omega}_2 \cdot \mathbf{p}_2\right)^2 - I_3\left(\boldsymbol{\omega}_3 \cdot \mathbf{p}_3\right)^2\right)\Big] -$$

$$-\frac{\gamma}{2c^2} \cdot \frac{m_2 I_2 + m_3 I_3}{\left|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3\right|^3} \cdot \left[-\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_3 + 3\frac{\left(\left(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3\right)\cdot \mathbf{p}_2\right)\cdot\left(\left(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3\right)\cdot \mathbf{p}_3\right)}{\left|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3\right|^2}\right] +$$

$$+\frac{3\gamma}{c^2}\left[\frac{1}{\left|\mathbf{r}_2\right|}\cdot\left(m_1\omega_2^2 I_2 + m_2\omega_1^2 I_1\right) + \frac{1}{\left|\mathbf{r}_3\right|}\left(m_1\omega_3^2 I_3 + m_3\omega_1^2 I_1\right) + \frac{1}{\left|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3\right|}\left(m_2\omega_3^2 I_3 + m_3\omega_2^2 I_2\right)\right] -$$

$$-\frac{\gamma^2}{2c^2}\left\{\frac{m_1 I_2 + m_2 I_1}{\left|\mathbf{r}_2\right|^3} + \frac{m_1 I_3 + m_3 I_1}{\left|\mathbf{r}_3\right|^3} + \frac{m_2 I_3 + m_3 I_2}{\left|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3\right|^3} + \right.$$

$$\left. + m_1 m_2 I_3 \cdot \frac{\mathbf{r}_3 \cdot \left(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2\right)}{\left|\mathbf{r}_3\right|^3\left|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3\right|^3} + m_2 m_3 I_1 \cdot \frac{\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_3}{\left|\mathbf{r}_2\right|^3 \cdot \left|\mathbf{r}_3\right|^3} + m_1 m_3 I_2 \cdot \frac{\left(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3\right)\cdot \mathbf{r}_2}{\left|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3\right|^3\left|\mathbf{r}_2\right|^3}\right\} +$$

$$+\frac{\gamma}{c^2}\left\{4\left[\frac{I_1 I_2}{\left|\mathbf{r}_2\right|^3} + \frac{I_1 I_3}{\left|\mathbf{r}_3\right|^3} + \frac{I_2 I_3}{\left|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3\right|^3}\right] - 3\left[\frac{\left(\mathbf{r}_2 \cdot \boldsymbol{\omega}_1\right)\cdot\left(\mathbf{r}_2 \cdot \boldsymbol{\omega}_2\right)}{\left|\mathbf{r}_2\right|^3} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\left(\mathbf{r}_3 \cdot \boldsymbol{\omega}_1\right)\cdot\left(\mathbf{r}_3 \cdot \boldsymbol{\omega}_3\right)}{\left|\mathbf{r}_3\right|^3} + \frac{\left(\left(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3\right)\cdot \boldsymbol{\omega}_2\right)\cdot\left(\left(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3\right)\cdot \boldsymbol{\omega}_3\right)}{\left|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3\right|^3}\right]\right\}$$

Айналмалы үш дененің релятивтік қозғалыс теңдеулерін орташалау

Эволюциялық қозғалыс теңдегін алу үшін (1.17) теңдігін T (сынама дененің синодикалық периоды) жүйесінің конфигурациясын қайталануын период бойынша интегралдау қажет:

$$\bar{\dot{\mathbf{M}}} = \frac{1}{T}\int_0^T \left(\bar{\dot{\mathbf{M}}}^{(0)} + \bar{\dot{\mathbf{M}}}^{(*)}\right) dt\,. \quad (4)$$

Сынақ денесінің ауытқыған қозғалысы мына өрнекпен сипатталады

$$r = r_{kep} + r_p + r_{rel} \ ,$$

мұндағы

$$r_{kep} = \frac{p}{1 + e\cos\omega_3 t} \ ,$$

Мұндағы r_{ker} ауытқымаған қозғалысты сипаттайды, r_p екінші деneден классикалық ауытқуды сипаттайды, ал үшінші мүше релятивтік түзету болып табылады. Мына есепті классикалық тұрғыдан қарастырғанда эволюциялық теңдеуде екінші деneден ауытқу нөлге тең болады. Бұл есепке аздаған ауытқудың суперпозициялық принципі қатысты екенін ескеріп, біз r_p-ді ескермеуімізге болады. Импульстер тек релятивті түзетулерде болады, сондықтан онда классикалық өрнектерді қоюға болады.

Олай болса, сынақ денесінің радиус-векторы:

$$\vec{r}_3 = r_{kep}\left(\vec{i}\,\cos\omega_3 t + \vec{j}\,\sin\omega_3 t\right), \qquad (5)$$

және де екінші дененің радиус-векторы мынаған тең:

$$\vec{r}_2 = r_2\left(\vec{i}\,\cos\omega_2 t + \vec{j}\,\sin\omega_2 t\right), \qquad (6)$$

сонымен қатар олардың тиісті массаларына көбейтілген импульстарды қойсақ, және T период бойынша интегралдасақ:

$$\bar{\dot{M}} = \frac{1}{T}\int_0^T\left(\dot{M}_{kep} + \dot{M}_{rel}\right)dt$$

эволюциялық қозғалыс теңдеуін аламыз.

Айналмалы құрам үшін мынадай өрнек құрылады:

$$\dot{\mathbf{M}}^{(*)} = \frac{I_3\left(\boldsymbol{\omega}_3\cdot\mathbf{p}_3\right)}{c^2}\left[\boldsymbol{\omega}_3,\mathbf{p}_3\right] - \frac{\gamma}{2c^2}\cdot\frac{m_2I_2 + m_3I_3}{\left|\mathbf{r_2}-\mathbf{r}_3\right|^3}\cdot\left[\left(-\mathbf{p}_2 + 3\frac{\left(\left(\mathbf{r_2}-\mathbf{r}_3\right)\cdot\mathbf{p_2}\right)\cdot\left(\mathbf{r_2}-\mathbf{r}_3\right)}{\left|\mathbf{r_2}-\mathbf{r}_3\right|^2}\right),\mathbf{p}_3\right] +$$

$$+\left[\mathbf{r_3},\left\{-\frac{3\gamma}{2c^2}\left(m_2I_2 + m_3I_3\right)\frac{\mathbf{p_2p}_3}{\left|\mathbf{r_2}-\mathbf{r_3}\right|^5} + \frac{15\gamma}{2c^2}\frac{\left(\left(\mathbf{r_2}-\mathbf{r}_3\right)\mathbf{p_2}\right)\cdot\left(\left(\mathbf{r_2}-\mathbf{r}_3\right)\mathbf{p}_3\right)}{\left|\mathbf{r_2}-\mathbf{r_3}\right|^7} -\right.\right.$$

$$-\frac{3\gamma}{c^2}\frac{1}{\left|\mathbf{r_2}-\mathbf{r_3}\right|^3}\left(m_2\boldsymbol{\omega}_3^2I_3 + m_3\boldsymbol{\omega}_2^2I_2\right) + \frac{3\gamma^2}{2c^2}\frac{\left(m_2I_3 + m_3I_2\right)}{\left|\mathbf{r_2}-\mathbf{r_3}\right|^5} +$$

$$+\frac{\gamma^2}{2c^2}m_1m_2I_3\frac{1}{\left|\mathbf{r}_3\right|^3\left|\mathbf{r_2}-\mathbf{r_3}\right|^3} - \frac{3\gamma^2}{2c^2}m_1m_2I_3\frac{\left(\mathbf{r_3}\left(\mathbf{r_2}-\mathbf{r_3}\right)\right)}{\left|\mathbf{r}_3\right|^3\left|\mathbf{r_2}-\mathbf{r_3}\right|^3} - \frac{\gamma^2}{2c^2}m_2m_3I_1\frac{1}{\left|\mathbf{r_2}\right|^3\left|\mathbf{r_3}\right|^3} +$$

$$\left.-\frac{\gamma}{c^2}\frac{9\left(\left(\mathbf{r_2}-\mathbf{r_3}\right)\boldsymbol{\omega}_2\right)\left(\left(\mathbf{r_2}-\mathbf{r_3}\right)\boldsymbol{\omega}_3\right)}{\left|\mathbf{r_2}-\mathbf{r}_3\right|^5}\right\}\mathbf{r_2} + \left[\mathbf{r}_3,\left\{-\frac{9\gamma}{2c^2}\left(m_2I_2 + m_3I_3\right)\frac{\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3}{\left|\mathbf{r_2}-\mathbf{r_3}\right|^5} -\right.\right.$$

$$-\frac{15\gamma}{2c^2}\frac{\left(\left(\mathbf{r_2}-\mathbf{r}_3\right)\mathbf{p_2}\right)\cdot\left(\left(\mathbf{r_2}-\mathbf{r}_3\right)\mathbf{p}_3\right)}{\left|\mathbf{r_2}-\mathbf{r}_3\right|^7} + \frac{3\gamma}{c^2}\frac{1}{\left|\mathbf{r_3}\right|^3}\left(m_1\omega_3^2I_3 + m_3\omega_1^2I_1\right) +$$

$$+\frac{3\gamma}{c^2}\frac{1}{\left|\mathbf{r_2}-\mathbf{r_3}\right|^3}\left(m_2\omega_3^2I_3 + m_3\omega_2^2I_2\right) - \frac{3\gamma^2}{2c^2}\frac{\left(m_1I_3 + m_3I_1\right)}{\left|\mathbf{r}_3\right|^5} - \frac{3\gamma^2}{2c^2}\frac{\left(m_2I_3 + m_3I_2\right)}{\left|\mathbf{r_2}-\mathbf{r_3}\right|^5} -$$

$$-\frac{\gamma^2}{c^2}m_1m_2I_3\frac{1}{|\mathbf{r_3}|^3|\mathbf{r_2}-\mathbf{r_3}|^3}-\frac{3\gamma^2}{2c^2}m_1m_2I_3\frac{\left(\mathbf{r}_3\left(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_3\right)\right)}{|\mathbf{r_3}|^5|\mathbf{r_2}-\mathbf{r_3}|^3}-\frac{3\gamma^2}{2c^2}m_1m_2I_3\frac{\left(\mathbf{r}_3\left(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_3\right)\right)}{|\mathbf{r_3}|^3|\mathbf{r_2}-\mathbf{r_3}|^3}+$$

$$+\frac{3\gamma^2}{2c^2}m_2m_3I_1\frac{\left(\mathbf{r_2r_3}\right)}{|\mathbf{r_2}|^3|\mathbf{r_3}|^5}+\frac{3\gamma^2}{2c^2}m_1m_3I_2\frac{\left(\left(\mathbf{r}_2-\mathbf{r_3}\right)\mathbf{r}_2\right)}{|\mathbf{r_2}-\mathbf{r_3}|^5|\mathbf{r_2}|^3}+\frac{12\gamma}{c^2}\frac{I_1I_3}{|\mathbf{r_3}|^5}+\frac{12\gamma}{c^2}\frac{I_2I_3}{|\mathbf{r_2}-\mathbf{r_3}|^5}+$$

$$+\frac{\gamma}{c^2}\frac{9\left(\left(\mathbf{r_2}-\mathbf{r_3}\right)\boldsymbol{\omega}_2\right)\left(\left(\mathbf{r_2}-\mathbf{r_3}\right)\boldsymbol{\omega}_3\right)\mathbf{r_3}}{|\mathbf{r_2}-\mathbf{r_3}|^5}\Bigg\}\mathbf{r_3}\Bigg]+\Bigg[\mathbf{r}_3,\frac{\gamma}{c^2}\Bigg\{\frac{9\left(\mathbf{r_3}\boldsymbol{\omega}_2\right)\left(\mathbf{r_3}\boldsymbol{\omega}_3\right)}{|\mathbf{r_2}-\mathbf{r_3}|^3}\mathbf{r}_{\mathbf{3}}-\frac{3\left(\mathbf{r_3}\boldsymbol{\omega}_3\right)}{|\mathbf{r_3}|^3}\boldsymbol{\omega}_1+\frac{3\left(\mathbf{r_3}\boldsymbol{\omega}_1\right)}{|\mathbf{r_3}|^3}\boldsymbol{\omega}_3+$$

$$+\frac{3\left(\left(\mathbf{r_2}-\mathbf{r_3}\right)\boldsymbol{\omega}_3\right)}{|\mathbf{r_2}-\mathbf{r_3}|^3}\boldsymbol{\omega}_2+\frac{3\left(\left(\mathbf{r_2}-\mathbf{r_3}\right)\boldsymbol{\omega}_2\right)}{|\mathbf{r_2}-\mathbf{r_3}|^3}\boldsymbol{\omega}_3\Bigg\}\Bigg];\qquad(7)$$

Жалпы жағдайда өрнекті шешу қиындықтар тудырады. Дербес жағдайларды талдау жасасақ, айталық айналмалы дененің бұрыштық жылдамдығы $\boldsymbol{\omega}_i$ $(i=1,2,3)$ оның қозғалысының орбита жазықтығына перпендикуляр болған жағдайды қарастырсақ:

$$\boldsymbol{\omega}_i=\vec{k}\omega^{(i)}{}_z(i=1,2,3)\,,\qquad(8)$$

$$\mathbf{r}_i=\vec{i}x^{(i)}+\vec{j}y^{(i)}\,,\ (i=1,2,3)\,,\qquad(9)$$

және

$$\mathbf{p}_i=\vec{i}p^{(i)}{}_x+\vec{j}p^{(i)}{}_y\,,\ (i=1,2,3)\,.\qquad(10)$$

Онда (7) теңдікті ескерсек, онда теңдеу келесі түрде болады:

$$\dot{\mathbf{M}}^{(*)}=-\frac{\gamma}{2c^2}\cdot\frac{m_2I_2+m_3I_3}{|\mathbf{r_2}-\mathbf{r}_3|^3}\cdot\left\{\left[-\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3\right]+3\frac{\left(\left(\mathbf{r_2}-\mathbf{r}_3\right)\cdot\mathbf{p_2}\right)}{|\mathbf{r_2}-\mathbf{r}_3|^2}\left[\left(\mathbf{r_2}-\mathbf{r}_3\right),\mathbf{p}_3\right]\right\}+$$

$$+\left\{-\frac{3\gamma}{2c^2}\left(m_2I_2+m_3I_3\right)\frac{\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3}{|\mathbf{r_2}-\mathbf{r_3}|^5}+\frac{15\gamma}{2c^2}\frac{\left(\left(\mathbf{r_2}-\mathbf{r}_3\right)\mathbf{p}_2\right)\cdot\left(\left(\mathbf{r_2}-\mathbf{r}_3\right)\mathbf{p}_3\right)}{|\mathbf{r_2}-\mathbf{r_3}|^7}-\frac{3\gamma}{c^2}\frac{1}{|\mathbf{r_2}-\mathbf{r_3}|^3}\left(m_2\boldsymbol{\omega}_3^2I_3+m_3\boldsymbol{\omega}_2^2I_2\right)+\right.$$

$$+\frac{3\gamma^2}{2c^2}\frac{\left(m_2I_3+m_3I_2\right)}{|\mathbf{r_2}-\mathbf{r_3}|^5}+\frac{\gamma^2}{2c^2}m_1m_2I_3\frac{1}{|\mathbf{r}_3|^3|\mathbf{r_2}-\mathbf{r_3}|^3}-\frac{3\gamma^2}{2c^2}m_1m_2I_3\frac{\left(\mathbf{r_3}\left(\mathbf{r_2}-\mathbf{r_3}\right)\right)}{|\mathbf{r_3}|^3|\mathbf{r_2}-\mathbf{r_3}|^3}-\frac{\gamma^2}{2c^2}m_2m_3I_1\frac{1}{|\mathbf{r_2}|^3|\mathbf{r_3}|^3}+$$

$$\left.-\frac{\gamma}{c^2}\frac{9\left(\left(\mathbf{r_2}-\mathbf{r_3}\right)\boldsymbol{\omega}_2\right)\left(\left(\mathbf{r_2}-\mathbf{r_3}\right)\boldsymbol{\omega}_3\right)}{|\mathbf{r_2}-\mathbf{r}_3|^5}\right\}\left[\mathbf{r}_3,\mathbf{r_2}\right].\qquad(11)$$

Олай болса, сынақ дененің радиусы (5) және екінші дененің радиусын (6), сонымен қатар олардың тиісті массаларына көбейтілген импульстарды қойсақ және олардың қозғалыс орбиталарының қайталану T периоды бойынша интегралдасақ:

$$\overline{\dot{\mathbf{M}}}^{(*)}=\frac{1}{T}\int_0^T\dot{\mathbf{M}}^{(*)}\,dt=0\qquad(12)$$

импульс моментінің орташа өзгерісі нөлге тең екендігін аламыз. $\dot{\mathbf{M}}^{(0)}$ орташаланған шамасы нөл болатындығы белгілі [19], мұндағы

$$T = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_3}. \tag{13}$$

Жоғарыдағы алынған (7) және (8) ескере отырып, бұл жағдайда дененің орбиталық момент векторларының суммалары сақталады. $\overline{\dot{\mathbf{M}}}^{(*)}$ векторының сақталуынан орбита жазықтықтағы шеңбер болатындығы шығады. Жалпы жағдайда бұл шама нөлге тең болмайды.

Қорытынды

Екі массивті денелердің өрісінде қозғалған сынақ денесінің қозғалысын релятивтік түзетулерді ескеріп қарастырдық. Бұндағы барлық дененің өзіндік айналуы қозғалыс теңдеулерін өзгертеді. Алайда орбитаның векторлық элементтері арқылы сынақ дене орбитасының орнықтылығын зерттеуде жалпы жағдайда теңдеулер интегралданбайды. Егер сынақ дененің өздік айналу өсі қозғалыс жазықтығына перпендикуляр болса, онда бұл жағдайда орташаланған импульс моментінің нөлге тең болуы – сынақ дене орбитасының шеңбер болатындығын және орбитаның қ орнықты болатындығын білдіреді.

Әдебиеттер

1 Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. – М.: Наука, 1968. – 799 с.

2 Себехей В. Теория орбит: ограниченная задача трех тел. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1982. – 655 с.

3 Пуанкаре А. Избранные труды в 3-х томах. Т. 1 Небесная механика. – М.: Наука, 1971.

4 Козлов В.В. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // УМН. – 1983. – Т. 38. – № 1. – С. 3-67.

5 Абдильдин М.М. Механика теории гравитации Эйнштейна. – Алма-Ата, 1988. – 198 с.

6 Брумберг В.А. Релятивистская небесная механика. – М., 1972. – 382 с.

7 Абдильдин М.М. О метрике вращающегося жидкого шара. Вопросы теории поля. Алма-Ата, 1985. – С. 20-25.

8 Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. – М. 1973. – 207 с.

9 Абдильдин М.М. Проблема движения тел в общей теории относительности. –Алматы: Қазақ университет», 2006. – 132 с.

10 Hans C. Ohanian and Remo Ruffini. Gravitation and Spacetime, 3rd edn. – Cambridge University Press, 2013. – 530 p.

11 Abishev M.E., Toktarbay S., Zhami B.A. On the Stability of Circular Orbits of a Test Body in the Restricted Three- Body Problem in GR Mechanics // Gravitation and cosmology. – 2014. – Vol. 20, No.3. – P. 149-151.

12 Абдильдин М.М. Механика теории гравитации Эйнштейна. – Алма-Ата, 1988. – 198 с.

13 Абдильдин М.М. Адиабатическая теория движения тел в ОТО. Движение тел в релятивистской теории гравитации // Тезисы докл. 2го всесоюзного симпозиума, Вильнюс-Каунас, 1986. – С. 6-7.

14 Абдильдин М.М., Омаров М.С. Адиабатическая теория движения тел в ОТО. Современные теоретические и экспериментальные проблемы теории относительности и гравитации // Мат. VII Всесоюзного конф., Ереван, 1988. – С. 3-4.

15 Абдильдин М.М., Омаров М.С. Анализ корректной метрики первого приближения в методе Фока в ОТО. Проблемы физики звезд и внегалактической астрономии. – Алматы, 1993. – С. 170-178.

16 Абдильдин М.М., Омаров М.С. Об оптимизации выбора векторных элементов в адиабатической теории движения тел в ОТО // Известия НАН РК, сер. физ. -мат. – 1994. – №4. – С. 17-21.

17 Абишев М.Е., Токтарбай С., Жами Б.А. Об устойчивости круговых орбит пробного тела в ограниченной задаче трех тел в механике ОТО // Известия НАН РК, Сер. физ.-мат. – 2014. № 2(294). – С. 11-13.

18 Abishev M., Toktarbay S., Beissen N., Zhumazhanova D. Periodic solutions of the restricted three body problem in GR mechanics // Fourteenth Marcel Grossmann Meeting, MG14 University of Rome "La Sapienza", Rome, July 12-18. – 2015.

19 Abishev M., Quevedo H., Toktarbay S., Zhami B. Orbital stability of the restricted three body problem in General Relativity // WSPC Proceedings, October 14, 2015. arXiv:1510.03703v1.

20 Abishev M.E., Toktarbay S., Ablayeva A.Zh., Talgat A.Z. The stability of periodic motions of the restricted threebody problem // Proc. of the 3rd Intern. Conf. "Astrophysics, Gravity and Cosmology", Astana, 2016. – P.83 – 85.

References

1 G.N. Duboshin, Nebesnaya mekhanika. Osnovnyye zadachi i metody, (Moscow, Nauka, 1968), 799 p. (in Russ).

2 Sebehej V, Teorija orbit: ogranichennaja zadacha treh tel, (Moscow, Nauka, Glavnaja redakcija fizikomatematicheskoj literatury, 1968), 655 p. (in Russ).

3 A. Puankare, Izbrannye trudy v 3-h tomah, T.1 Nebesnaja mehanik, (Moscow, Nauka, 1971). (in Russ).

4 Kozlov V.V., UMN, 38(1), 3-67 (1983). (in Russ).

5 Abdil'din M.M., Mehanika teorii gravitacii Jejnshtejna, (Alma-Ata, 1988), 198 p. (in Russ).

6 Brumberg V.A., Reljativistskaja nebesnaja mehanika, (Moscow, 1972), 382 p. (in Russ).
7 Abdil'din M.M., O metrike vrashhajushhegosja zhidkogo shara. Voprosy teorii polja, (Alma-Ata, 1985), 20-25 p. (in Russ).
8 Landau L.D., Lifshic E.M. Mehanika, (Moscow, 1973), 207 p. (in Russ).
9 Abdil'din M.M., Problema dvizhenija tel v obshhej teorii otnositel'nosti, (Almaty: Qazaq universiteti), 2006, 132 p. (in Russ).
10 Hans C., Ohanian and Remo Ruffini, Gravitation and Spacetime, 3rd edn. (Cambridge University Press, 2013), 530 p.
11 Abishev M.E., Toktarbay S., and Zhami B.A., Gravitation and cosmology, 20(3), 149-151 (2014).
12 Abdil'din M.M., Mehanika teorii gravitacii Jejnshtejna, (Alma-Ata, 1988), 198 p. (in Russ).
13 Abdil'din M.M., Adiabaticheskaja teorija dvizhenija tel v OTO. Dvizhenie tel v reljativistskoj teorii gravitacii, Tezisy dokl. vtorogo vsesojuznogo simpoziuma, Vil'njus-Kaunas, 6-7 (1986). (in Russ).
14 Abdil'din M.M., Omarov M.S., Adiabaticheskaja teorija dvizhenija tel v OTO, Sovremennye teoreticheskie i jeksperimental'nye problemy teorii otnositel'nosti i gravitacii, Materialy VII Vsesojuznogo konf., Erevan, , 3-4 (1988). (in Russ).
15 Abdil'din M.M., Omarov M.S., Analiz korrektnoj metriki pervogo priblizhenija v metode Foka v OTO, Problemy fiziki zvezd i vnegalakticheskoj astronomii. (Almaty, 1993), 170-178 p. (in Russ).
16 Abdil'din M.M., Omarov M.S., Izvestija NAN RK, ser. fiz. -mat., 4, 17-21 (1994) (in Russ).
17 Abishev M.E., Toktarbaj S., Zhami B.A., Izvestija NAN RK, Ser. fiz.-mat., 2(294), 11-13 (2014) (in Russ).
18 Abishev M., Toktarbay S., Beissen N., Zhumazhanova D., Periodic solutions of the restricted three body problem in GR mechanics, Fourteenth Marcel Grossmann Meeting, MG14 University of Rome "La Sapienza", Rome, July 12-18, 2015.
19 Abishev M., Quevedo H., Toktarbay S., Zhami B., WSPC Proceedings, October 14, 2015. arXiv:1510.03703v1.
20 Abishev M.E., Toktarbay S., Ablayeva A.Zh., Talgat A.Z., Proc. of the 3rd Intern. Conf. "Astrophysics, Gravity and Cosmology", Astana, 83 – 85 (2016).