ҒТАМР 41.03.02

Турежанов С.К.*, Иманбаева А.К.

әл-Фараби ат. Қазақ ұлттық университеті,
Қазақстан, Алматы қ., *e-mail: serikbay_t@mail.ru

N-ДЕНЕЛЕРДІҢ ГРАВИТАЦИЯЛЫҚ ЕСЕБІНІҢ МОДЕЛЬДЕУ ӘДІСТЕРІ

Бұл мақалада қара құрдымдары бар галактикалардың орталық аймақтарын модельдеуга арналған регуляризация алгоритмдері қарастырылды, яғни логарифмдік гамильтониан (LogH), уақыттың өзгеруі (Time-Transformed Leapfrog, TTL) және графтар негізіндегі регуляризация әдісі (Graph-based Activity Regularization, GAR) алгоритмдері [1]. Осы алгоритмдерде кез-келген координаттар жүйесін пайдалануға болады. Егер жақындасатын денелердің координаттары алыс қашықтықтан өлшенетін болса, онда жақын ара қашықтық жағдайда дөңгелектеу қатесі негізгі проблема болады. TTL алгоритмі негізінен өте кішігірім денелердің кездейсоқ жабық қақтығыстары үшін кейбір регуляризацияны қамтамасыз ету үшін ғана қолданылады. Тағы зерттеген алгоритмдердің бірі – ол бір немесе бірнеше қара құрдымдары бар галактиканың ортаңғы аумағын модельдеуге ұсынған алгоритм [2]. Бұл кодты авторлары φGRAPEch-деп атаған, немесе тағы гибридті N-дене коды деп атауға болады. Кодтың негізгісінде тізбекті іске асыруы алынған, және Миккола мен Мерриттың [1] алгоримтмдік тізбекті регуляризация схемасы (AR-CHAIN) кірген. Бұл алгоритм арқылы орталық қара құрдымның қасындағы орбиталарды өңдеуге мүмкіндік береді және PN2.5 ретіне дейін ньютонкейінгі шарттар еңгізілген. Кодты іске асыру үшін GRAPE арнайы аппаратураны қажет етеді, ол үдеткішті есептеуге бағытталған. Гибридті N-дене коды бөлшектерді екі топқа бөледі: массивтік нысанмен (немесе объектілермен) байланыстырылған мен тізбектің құрамына кіретін бөлшектер және стандартты төртінші реттік Эрмит схемасы бойынша қозғалатын тізбектің сыртындағы бөлшектер. Гибридті код, Эрмит интеграциялық схемасы қарағанда кем есептеу уақытында жақсы энергия үнемдеуді қамтамасыз етеді.

Түйін сөздер: N-дене есебі, регуляризация алгоритмдері, қара құрдым, гибридті N-дене коды.

Turezhanov S.K.*, Imanbayeva A.K.

Al-Farabi Kazakh National University,
Kazakhstan, Almaty, *e-mail: serikbay_t@mail.ru

Simulation methods the N-body gravity problem

This paper presents an overview of the regularization algorithms for modeling the central regions of galaxies having black holes. We are looking at the following algorithms: Logarithmic Hamiltonian (LogH), Time-Transformed Leapfrog (TTL), and the Graph-based Activity Regularization (GAR) [1]. In the data algorithms, you can use the system coordinate that is a good sign. The distortion of circular distances may be the main problem in the algorithm, where the coordinates of the corresponding body are measured from the split head. In the baseline, TTL algorithm is only used for some types of regularization for the random closest collisions of the very small bodies. Next, a hybrid algorithm, called φGRAPEch code, was investigated to simulate the central regions of galaxies containing one or more massive black holes. The φGRAPE code is based on a sequential implementation and includes a regularization scheme for the Mikkola and Merritt algorithmic chain for processing orbits near the central black hole with high accuracy. This algorithm divides particles into two groups: particles associated with massive objects and included in the chain, and particles outside the chain that move according to the Hermite φGRAPE scheme. The hybrid code provides better energy saving in less computation time than the standard fourth-order Hermite integration scheme.

Key words: N-body problem, regularization algorithms, black holes, N-body hybrid code.

Турежанов С.К.*, Иманбаева А.К.

Казахский национальный университет им. аль-Фараби,
Казахстан, г. Алматы, *e-mail: serikbay_t@mail.ru

Методы моделирования гравитационной задачи N-тел

В данной статье рассмотрены алгоритмы регуляризации для моделирования центральных областей галактик, имеющих черные дыры. Мы рассматривали следующие алгоритмы: логарифмический гамильтониан (LogH), скачкообразное преобразование по времени (Time-Transformed Leapfrog, TTL) и метод регуляризации на основе графов (Graph-based Activity Regularization, GAR) [1]. В данных алгоритмах можно использовать любую систему координат. Основной проблемой здесь может быть ошибка округления в случае близких расстояний, если координаты приближающихся тел измеряются из далекого начала. Алгоритм TTL используется в основном только для обеспечения некоторой регуляризации для случайных близких столкновений очень маленьких тел. Далее исследован гибридный алгоритм, названный автормами φGRAPEch код, предназначенный для моделирования центральных областей галактик, содержащих одну или несколько массивных чёрных дыр [2]. Основанный на последовательной реализации φGRAPE, код включает схему регуляризации алгоритмической цепочки Миккола и Мерритта для обработки орбит вблизи центральной черной дыры с высокой точностью. Этот алгоритм делит частицы на две группы: частицы, связанные с массивными объектами и включенные в цепочку, и частицы вне цепочки, которые продвигаются по схеме Эрмита φGRAPE. Гибридный код обеспечивает лучшее энергосбережение за меньшее время вычислений по сравнению со стандартной чистой схемой интегрирования Эрмита четвертого порядка.

Ключевые слова: задача N-тел, алгоритмы регуляризации, чёрные дыры, гибридный код N-тел.

Кіріспе

Астрофизиканың ең ғажап құбылыстарының бірі екі қара құрдымның соқтығысуы. Бұл процесс нәтижесінде бұрын соңды зерттелмеген құбылыстар тек астрофизиктер емес жалпы физиктерді де қызықтырып отыр. Мұндай оқиғаның жарқын мысалы GW150914 атпен белгілі болған екі қара құрдымның өзара гравитациялық тартылыстың әсерінен соншалықты жақындасуының нәтижесінде бірігіп кетуі. Бұл соқтығысудың маңызды салдары гравитациялық толқынның пайда болуы [3, 4].

Алайда мұндай процестердің дамуын тікелей бақылау арқылы зерттеу қиындық тудырады. Себебі бұл процесс миллиардтаған жылдарға созылуы мүмкін. Сондықтан кейінгі уақыттарда астрофизиктердің арасында кең тарап жатқан зерттеудің компьютерлік моделдеу әдістері арқылы бір секундта мыңдаған, тіпті миллиондаған жылдарды өткізіп жіберуге болады. Бұл бағытта әлемнің көптеген ғалымдары еңбек етуде. Нәтижесінде аспан денелерінің әсерлесуін есептейтін әдістер де дамуда.

Тығыз орналасқан жұлдыздар жиынының динамикасы қазіргі заманғы есептеу астрофизикасының күрделі мәселелерінің бірі болып табылады. Стандартты *N*-дене интеграторлары қысылған екілік жүйелердің қозғалысын немесе жұлдыздар арасындағы жақын гиперболалық кездесулерден кейін қиындықтарға тап болады. Егер интеграциялық кезеңнің қадамы өте қысқа болмаса, салыстырмалы орбита дәл сипатталмайды және жүйе энергиясы да қолайсыз дрейфті көрсетуі мүмкін, өйткені бір ықшам жүйе жалпы байланыс энергиясының үлкен үлесін қамтуы мүмкін. Бұл қиындық әсіресе гравитациялық потенциалда (бір немесе екі) супермассалы қара құрдымы (SMBH) бар Құс жолы сияқты галактика орталықтарын зерттеуді шектейді. Осындай жүйелерді модельдеу әрекеті ертеректе талап етілетін дәлдікке және өнімділікке жетуді қиындататын [5-7]. Кейінгі зерттеулерде қара құрдым айналасындағы тығыз байланыстағы жұлдыздар кейде жай ғана жойылды [8, 9]. Басқа зерттеулерде ең массивтік бөлшектердің позициясы мен жылдамдығы жасанды түрде бекітілген және жұлдыздық орбиталар Кеплерлік эллипстер ретінде жуықталған [10, 11]. Бұл тәсілдер белгілі бір проблемалар үшін пайдалы болуы мүмкін болғанымен, қарақұрдымы айналасындағы жұлдыздардың қозғалысы Кеплерлік емес қоздырғыштардың шамасын шектеу үшін пайдаланылады [12, 13]. Ең массалық бөлшектердің орналасуын түзету екілік немесе бірнеше супермассалы қарақұрдымды модельдеу кезінде қиындық тудыруы мүмкін. Массивтік қара құрдым бар галактиканың орталық аймақтарын модельдеуге арналған N-body кодын сипаттайтын әдіс [2]-жұмыста келтірілген. Мұнда Miccola тізбегі үшін «алгоритмдік» регуляризация схемасы, соның ішінде

PN2.5-нің тәртібіне дейін Ньютонлық терминдерді қамтиды.

Регуляризация алгоритмдері

Жақын орналасқан бірнеше денелердің мәселесі өте дәл есептеулерді талап етеді, себебі үлкен энергия тартылған. Осылайша, көп денелі жүйелердің қозғалысын сипаттайтын н әдіс екі дененің проблемасы үшін дәл және тиімді болуы керек. Классикалық KS трансформациясынан басқа, осы талапқа жауап беретін бірнеше жаңа алгоритмдер бар. Қосымша және ең маңызды мәселе - дөңгелектеу қатесі. Бұл, мысалы, масса орталығының координаттары пайдаланылғанда және симуляцияланған жүйеде жақын және / немесе тығыз қақтығыстар болған жағдайда үлкен мәселе болып табылады. Бұл мәселені шешу - бастапқыда KS трансформациясымен [1] қолданылған тізбекті құрылымды пайдалану, KS-ге барлық қысқа қашықтықты реттейді. Кейіннен тізбек құрылымы дөңгелектеу қателіктерін айтарлықтай төмендетуге де пайдалы болды. Бұл бөлімде алдымен біз соңғы N-дене алгоритмін құруға қажетті ингредиенттерді қарастырамыз. Бұл негізгі алгоритмдер ұқсас тәсілдермен тұрақты нәтижелер береді және олардың нәтижелерін жоғары дәлдікті пайдалану арқылы жақсартуға болады [14]. Бұл бөлімде біз негізгі үш регуляризация алгоритмін зерттейміз. Олар LogH, TTL және GAR алгоритмдері.

The logarithmic Hamiltonian (*LogH*) *алгоритмі.* Мына мақалаларда [1, 15] және [16] LogH кеңейтілген фазалық кеңістікте мынандай екенін көрсетті,

$$\Lambda = \ln(T + B) - \ln U, \tag{1}$$

мұндағы B (байланыс энергиясы) - бұл қозғалыс теңдеуін келесі формулада анықтайтын уақыт серпіні

$$t' = \frac{\partial \Lambda}{\partial B} = \frac{1}{T + B}, \tag{2}$$

$$t'_k = \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p_k} / (T + B), \tag{3}$$

$$B' = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial t} / U, \tag{4}$$

$$p'_k = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial r_k} / U. \tag{5}$$

Бұл жерде теңдеу (4) бар, бірақ бұл уақытқа тәуелді потенциал болған жағдайда ғана қажет. Бұл теңдеулердің оң жақтағы айнымалылардың сол жағынана тәуелді болмағандықтан, Leapfrog алгоритмі мүмкін. Бұны келесідей деп айтуға болады

$$X(h/2)\, V(h)\, X(h) \dots V(h)\, X(h/2), \tag{6}$$

мұнда $X(s)$ ұзындығы = s интеграциялық қадамында тұрақты B және p_k ала отырып (2), (3) координаттар теңдеулерінің шешімі:

$$\delta t = s/(T + B); \;\; t \to t + \delta t;$$

$$r_k \to t + \delta t \frac{\partial T}{\partial p_k}. \tag{7}$$

Тиісінше, $V(s)$:

$$\widetilde{\delta t} = \frac{s}{U}; \quad B \to B + \widetilde{\delta t} \frac{\partial U}{\partial t};$$
$$p_k \to p_k + \widetilde{\delta t} \frac{\partial U}{\partial r_k}, \tag{8}$$

t және r_k тұрақты үшін (4) және (5) теңдеулерін шешетін операцияны білдіреді. Тек екі корпус үшін бұл алгоритм O(h3) фазалық қателігімен дұрыс траекторияны береді. Бұл тіпті соқтығысу орбитасында да орынды, бұл жағдайда энергия үнемдеу машина дәлдігі деңгейінде болады.

Time-Transformed Leapfrog (*TTL*) *алгоритмі* [17]. Негізгі идея координаттарға тәуелді уақытты түрлендіру функциясын Ω енгізу болып табылады (, ..., Rk, ...) және Ω сияқты бірдей сандық мәнге ие болатын жаңа ω айнымалы мән, бірақ бұл мән келесі дифференциалдық теңдеуден

$$\dot{\omega} = \Omega = \sum_k \frac{\partial \Omega}{\partial r_k} \cdot \dot{v_k}. \tag{9}$$

Қозғалыс теңдеуі:

$$t' = \frac{1}{\omega}, \tag{10}$$

$$r'_k = \frac{v_k}{\omega}, \tag{11}$$

$$v_k' = \frac{A_k}{\Omega}, \tag{12}$$

$$\omega' = \sum_k \frac{\partial\Omega}{\partial r_k} \cdot \frac{v_k}{\Omega}, \tag{13}$$

мұндағы $A_к$ – бұл бөлшектердің жеделдету. Осы теңдеулер құрылымы Leapfrog алгоритмің құруға мүмкіндік береді:

$$X(s): \quad \delta t = \frac{s}{\omega}; \quad t \to t + \delta t; \\ r_k \to r_k + \delta t v_k, \tag{14}$$

$$V(s): \; \widetilde{\delta t} = \frac{s}{\Omega}; \quad v_k \to v_k + \widetilde{\delta t} A_k \\ \omega \to \omega + \widetilde{\delta t}\langle\dot{\Omega}\rangle, \tag{15}$$

мұндағы $\langle\Omega\rangle$ – бір қадам үшін орташа мәні, яғни

$$\langle\dot{\Omega}\rangle = \sum_k \frac{\partial\Omega}{\partial r_k} \cdot \frac{\left(v_k^{old} + v_k^{new}\right)}{2}. \tag{16}$$

мұндағы маңдайшадағы «old» және «new» де-гендер (15) операция жылдамдығының өсуінен бұрын және кейінгі VK мәндеріне сілтемелер.

Generalized midpoint method (*GAR*) *алгоритмі* [18]. Мұнда GAR әдісіне қысқаша шолу жасаймыз. Микола мен Мерит [19] сәйкес дифференциалдық теңдеуді қарастырамыз

$$\dot{z} = f(z) \tag{17}$$

және оны шешу үшін жуықтау (*h* қысқа кезең үшін), келесі формада жазылады

$$z(h) \approx z(0) + d(z(0), h), \tag{18}$$

мұнда *d*(z(0), *h*) – өсімі осы мәселені шешу үшін қолайлы кез келген жуықтау болуы мүмкін. (27) теңдеудің орнына екі теңдеу жазсақ

$$x = f(y); \quad \dot{y} = f(x), \tag{19}$$

және осы жұпты *x*(0) = *y*(0) = *z*(0) бастапқы мәндерімен шешсек, шешімі анық:

$$x(t) = f(t) = z(t)$$

қос теңдеуді пайдалана отырып, Leapfrog-ты былай жазуға болады

$$x_{\frac{1}{2}} = x_0 + \frac{h}{2} f(y_0); \\ y_1 = y_{\frac{1}{2}} + hf\left(x_{\frac{1}{2}}\right); \; x_1 = x_{\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} f(y_1),$$

бұл әйгілі өзгертілген ортаңғы нүкте әдісінен басқа ештеңе емес. Жоғарыдағы *y* жылжуды екі операцияға бөлу арқылы

$$x_{\frac{1}{2}} = x_0 + \frac{h}{2} f(y_0), \qquad y_{\frac{1}{2}} = y_0 + \frac{h}{2} f\left(y_{\frac{1}{2}}\right), \tag{20}$$

$$y_1 = y_{\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} f\left(x_{\frac{1}{2}}\right), \qquad x_1 = x_{\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} f(y_1), \tag{21}$$

алуға болады және бұны *d*(*z*, *h*)жалпы өсімі арқылы оңай жалпылауға болады. Бұл жалпыланған орташаланған әдіске әкеледі.

$$x_{\frac{1}{2}} = x_0 + d\left(y_0, \frac{h}{2}\right), \\ y_{\frac{1}{2}} = y_0 - d\left(x_{\frac{1}{2}}, -\frac{h}{2}\right), \tag{22}$$

$$y_1 = y_{\frac{1}{2}} + d\left(x_{\frac{1}{2}}, \frac{h}{2}\right), \\ x_1 = x_{\frac{1}{2}} - d\left(y_1, -\frac{h}{2}\right). \tag{23}$$

Бұл әдіс кез келген арнайы аппроксима-цияны қолдануға болатын үлкен артықшылығы бар және алгоритм уақыт бойынша (кеңейтілген (*x y*)-кеңістігінде ғана) және, демек, экстрапо-ляция әдісіндегі негізгі интегратор ретінде пай-далануға жарамды. Атап айтқанда, *d* ұлғайтуды LogH немесе TTL арқылы есептеуге болатынын атап өтуге болады, бұл жақындасу жағдай-ларында жақсы жуықтаулар береді. Сонымен қатар, жылдамдыққа тәуелді күштердің пайда болуы [19] көрсеткендей, мұнда проблема емес.

Гибридті N-дене коды

Бұл бөлімде AR-CHAIN [20] алгоритмінің φGRAPE тікелей қосу коды [2] бірізді нұсқасына қалай біріктіргені сипатталады. Соңғы алго-ритмдер Hermite интеграциялық схемасын [21] иерархиялық, пропорционалды блоктық уақыт қадамдарымен пайдаланады және күштерді есептеу үшін GRAPE тақтасын қолданады. Тізбекті интеграциялық схеманың қысқаша сипаттамасынан және оны GRAPE арқылы іске асырудан бастаймыз.

Кодтың интеграциялық схемасын қарастырайық [2]. Әрбір бөлшектердің X_i позициясынан басқа, жылдамдық V_i, үдеу a_i және үдеудің уақыт бойынша туындысы, өз уақыты мен уақыт кезеңі Δt_i бар. Интеграция келесі қадамдардан тұрады.

1. Бастапқы уақыт кезеңдері есептеледі

$$\Delta t_i = n_s \frac{|a_i|}{|\dot{a}_i|}, \qquad (24)$$

әдетте $n_s = 0.01$ жеткілікті дәлдік береді.

2. Жүйенің уақыты t барлық $t_i + \Delta t_i$–дің ең төменгі мәніне орнатылған, және $t_i + \Delta t_i = t$ бар барлық бөлшектер белсенді бөлшектер ретінде таңдалған.

3. Бөлшектердің жаңа t-дағы позициялары мен жылдамдықтары келесі формуламен болжанады:

$$x_{j,p} = x_{j,0} + (t - t_j)v_{j,0} + \\ + \frac{(t - t_j)^2}{2} a_{j,0} + \frac{(t - t_j)^3}{6} \dot{a}_{j,0}, \qquad (25)$$

$$v_{j,p} = v_{j,0} + (t - t_j)a_{j,0} + \\ + \frac{(t - t_j)^2}{2} \dot{a}_{j,0}, \qquad (25a)$$

мұндағы екінші индекс ағымдағы уақыт кезеңінің басында (0) немесе соңында (1) берілген мәнді білдіреді. Предикторда қолданылатын барлық шамалар тікелей есептелуі мүмкін, яғни жад жоқ, алдыңғы уақыт кезеңі талап етілмейді.

4. Үдеу және оның уақыт бойынша туындысы белсенді бөлшектер үшін келесі түрде жаңартылады

$$a_{i,1} = \sum_{j \neq i} G m_j \frac{r_{ij}}{\left(r_{ij}^2 + \epsilon^2\right)^{(3/2)}}, \qquad (26a)$$

$$\dot{a}_{i,1} = \sum_{j \neq i} G m_j \frac{v_{ij}}{\left(r_{ij}^2 + \epsilon^2\right)^{(3/2)}} + \frac{3(v_{ij} \cdot r_{ij}) r_{ij}}{\left(r_{ij}^2 + \epsilon^2\right)^{(5/2)}}, (26b)$$

мұндағы

$$r_{ij} = x_{j,p} - x_{i,p}, \qquad (27a)$$

$$v_{ij} = v_{j,p} - v_{i,p}, \qquad (27b)$$

және ϵ – жеңілдету параметрі.

5. Белсенді бөлшектердің позициялары мен жылдамдықтары төмендегідей реттеледі

$$x_{i,1} = x_{i,p} + \frac{\Delta t_i^4}{24} a_{i,0}^{(2)} + \frac{\Delta t_i^5}{120} a_{i,0}^{(3)}, \qquad (28a)$$

$$v_{i,1} = v_{i,p} + \frac{\Delta t_i^3}{6} a_{i,0}^{(2)} + \frac{\Delta t_i^4}{24} a_{i,0}^{(3)}, \qquad (28b)$$

мұндағы үдеудің екінші және үшінші рет туындылары

$$a_{i,0}^{(2)} = \frac{-6(a_{i,0} - a_{i,1}) - \Delta t_i(4\dot{a}_{i,0} + 2\dot{a}_{i,1})}{\Delta t_i^2}, (29a)$$

$$a_{i,0}^{(3)} = \frac{12(a_{i,0} - a_{i,1}) + 6\Delta t_i(\dot{a}_{i,0} + \dot{a}_{i,1})}{\Delta t_i^3}. \quad (29b)$$

6. Уақыт t_i және жаңа уақыт қадамдары Δt_i жаңартылады. Уақыт қадамдары стандартты формула бойынша есептеледі

$$\Delta t_{i,1} = \sqrt{\eta \frac{|a_{i,1}|\left|a_{i,1}^{(2)}\right| + |\dot{a}_{i,1}|^2}{|\dot{a}_{i,1}|\left|a_{i,1}^{(3)}\right| + \left|a_{i,1}^{(2)}\right|^2}} \qquad (30)$$

η – параметрі интеграцияның дәлдігін бақылайды және әдетте 0.01 мәніне тең болады (бірақ η-ның төменгі мәнін пайдалану төменде сипатталған). $a_{i,1}^{(2)}$ мәні былай есептеледі

$$a_{i,1}^{(2)} = a_{i,0}^{(2)} + \Delta t_{i,0} a_{i,0}^{(3)} \qquad (31)$$

және $a_{i,0}^{(3)} = a_{i,1}^{(3)}$.

7. 2-қадамнан қайталаңыз. Hermite интеграторы GRAPE көмегімен қолданылған кезде иерархиялық, барабар блоктық уақыт кезеңі схемасы қажет және параллелизация және векторизация үшін тиімді; төменде қараңыз McMillan (1986)]. Бөлшектер уақыт қадамдары ti-дің блоктың уақыт қадамдары ti мен ауыстыру арқылы топтастырылады, b = (1/2) n, мұндағы n –

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \Delta t_i < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}. \qquad (32)$$

Салыстырмалылық t/t_i –дің бүтін сан болуы қамтамасыз етіледі. Сандық пайымдаулар үшін біз, әдетте, ең аз уақытты орнатамыз

$$\Delta t_{min} = 2^{-m}. \qquad (33)$$

Бөлшектердің уақыт кезеңдері $t_i < t_{min}$, осы мәнге орнатылады. Ең аз уақыт кезеңі жұмсарту параметрімен анықталған максималды жеделдетуге сәйкес келуі керек, жиынтық энергетикалық мониторинг, әдетте, бұл шарттың бұзылғанын көрсетеді.

Қорытынды

Математикалық тұрғыдан, logH және TTL әдістері қарапайым жағдайда бірдей. Дәлдіктекі айырмашылығы сандық есептуге байланысты, мысалы, ω айнымалы мәнін жаңартқанда көбірек дөңгелектеу бар, бірақ соқтығыста $\omega \to \infty$ шекке ұмталады сосын «қалыпты» қалпына келеді. Жалпы жағдайда, егер сіз пайдалана алатын болсаңыз, logH әдісін ұсынуға болады. Гибридті N-дене коды бөлшектерді екі топқа бөледі: массивтік нысанмен (немесе объектілермен) байланыстырылған мен тізбектің құрамына кіретін бөлшектер және стандартты төртінші реттік Эрмит схемасы бойынша қозғалатын тізбектің сыртындағы бөлшектер. Гибридті код, Эрмит интеграциялық схемасы қарағанда кем есептеу уақытында жақсы энергия үнемдеуді қамтамасыз етеді.

Әдебиеттер

1 Mikkola S. and Merritt D. Implementing few-body algorithmic regularization with post-newtonian terms // ApJ. – 2008. – Vol.135 (6). – P.2398-2405.

2 Harfst S., Gualandris A., Merritt D., Mikkola S. A hybrid N-body code incorporating algorithmic regularization and post-Newtonian forces //Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 2008. – Vol.389, Iss.1. – P.2-12.

3 Mroué Abdul H., Scheel Mark A., Szilágyi Béla, Pfeiffer Harald P., Boyle Michael, Hemberger Daniel A., Kidder Lawrence E., Lovelace Geoffrey, Ossokine Serguei, Taylor Nicholas W., Zenginoğlu Anıl, Buchman Luisa T., Chu Tony, Foley Evan, Giesler Matthew, Owen Robert, and Teukolsky Saul A. Catalog of 174 Binary Black Hole Simulations for Gravitational Wave Astronomy // Phys. Rev. Lett. – 2013. – Vol.111. – P.241104.

4 Will Clifford M. On the unreasonable effectiveness of the post-Newtonian approximation in gravitational physics //PNAS. – 2011. – Vol. 108 (15). – P.5938-5945.

5 Quinlan Gerald D., Hernquist Lars, Sigurdsson Steinn. Models of Galaxies with Central Black Holes: Adiabatic Growth in Spherical Galaxies // Astrophysical Journal. – 1995. – Vol.440. – P.554.

6 Van der Marel, Roeland P. The Black Hole Mass Distribution in Early-Type Galaxies: Cusps in Hubble Space Telescope Photometry Interpreted through Adiabatic Black Hole Growth // The Astronomical Journal. – 1999. – Vol.117, Iss. 2. – P.744-763.

7 Zhao HongSheng, Haehnelt Martin G., Rees Martin J. Feeding black holes at galactic centres by capture from isothermal cusps // New Astronomy. – 2002. – Vol.7, Iss.7. – P.385-394.

8 Baumgardt H., Junichiro Makino J., and Ebisuzaki T. Massive Black Holes in Star Clusters. I. Equal-Mass Clusters // ApJ. – 2004. – Vol. 613 (2). – P.1133-1142.

9 Matsubayashi T., Makino J., and Ebisuzaki T. Orbital Evolution of an IMBH in the Galactic Nucleus with a Massive Central Black Hole // ApJ. – 2007. – Vol. 656 (2). – P.879-896.

10 Löckmann U., Baumgardt H. Tracing intermediate-mass black holes in the Galactic Centre // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 2008. – Vol. 384, Iss. 1. – P.323–330.

11 Berentzen I., Preto M., Berczik P., Merritt D., Spurzem R. Post□Newtonian simulations of super□massive black hole binaries in galactic nuclei // Astronomical Notes. – 2008. – Vol. 329, Iss. 9□10. – 904-907.

12 Fragile P. Chris and Mathews Grant J. Reconstruction of Stellar Orbits Close to Sagittarius A*: Possibilities for Testing General Relativity // The Astrophysical Journal. – 2000. – Vol. 542. – P.328-333.

13 Milosavljevi´c M. and Merritt D. Formation of Galactic Nuclei // ApJ. – 2001. – Vol.563. – P.34.

14 Bulirsch R., Stoer J. Numerical treatment of ordinary differential equations by extrapolation methods // Numer. Math. – 1966. – Vol.8. – P.1–13.

15 Harfst S., Gualandris A., Merritt D., Spurzem R., PortegiesZwart S., Berczik P., Performance analysis of direct N-body algorithms on special-purpose supercomputers //New Astron., – 2007. – Vol.12. – P.357-377.

16 Preto M. and Tremaine S. A class of symplectic integrators with adaptive timestep for separable Hamiltonian systems //Astron. J. – 1999. – Vol.118. – P.2532–2541.

17 Mikkola S., & Aarseth S. A Time-Transformed Leapfrog Scheme // Celest. Mech. Dyn. Astron. – 2002. – Vol.84. – P.343-354.

18 Makino J., Aarseth S. J. On a Hermite integrator with Ahmad-Cohen scheme for gravitational many-body problems // PASJ. – 1992. – Vol. 44. – P.141-151.

19 Mikkola S., & Merritt D. Algorithmic regularization with velocity-dependent forces //MNRAS. – 2006. – Vol.372. – P.219-223.

20 Mikkola S., Aarseth S. J. An implementation of *N*-body chain regularization // Celest. Mech. Dyn. Astron. – 1993. – Vol. 57. – P.439-459.

21 Mikkola S., Tanikawa T. Algorithmic regularization of the few-body problem // Mon. Not. R. Astron. Soc. – 1999. – Vol.310. – P.745-749.

References

1 S. Mikkola and D. Merritt, ApJ, 135 (6), 2398-2405 (2008).
2 S. Harfst, A. Gualandris, D. Merritt, and S. Mikkola, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 389 (1), 2-12 (2008).
3 A.H. Mroué, M.A. Scheel, B. Szilágyi, H.P. Pfeiffer, M. Boyle, D.A. Hemberger, L.E. Kidder, G. Lovelace, S. Ossokine, N.W. Taylor, A. Zenginoğlu, L.T. Buchman, T. Chu, E. Foley, M. Giesler, R. Owen, and S.A. Teukolsky, Phys. Rev. Lett., 111, 241104 (2013).
4 Will Clifford M., PNAS, 108 (15), 5938-5945 (2011).
5 Quinlan Gerald D., Hernquist Lars, Sigurdsson Steinn, Astrophysical J., 440, 554 (1995).
6 Van der Marel, Roeland P., The Astronomical Journal, 117(2), 744-763 (1999).
7 Zhao HongSheng, Haehnelt Martin G., Rees Martin J. New Astr., 7(7), 385-394 (2002).
8 H. Baumgardt, M.J. Junichiro, and T. Ebisuzaki, ApJ., 613 (2), 1133-1142 (2004).
9 T. Matsubayashi, J. Makino, and T. Ebisuzaki, ApJ., 656 (2), 879-896 (2007).
10 U. Löckmann and H. Baumgardt, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 384 (1), 323–330 (2008).
11 I. Berentzen, M. Preto, P. Berczik, D. Merritt, and R. Spurzem, Astronomical Notes, 329 (9□10), 904-907 (2008).
12 P. Chris Fragile and Grant J. Mathews, The Astrophysical J., 542, 328-333 (2000).
13 M. Milosavljevi´c and D. Merritt, ApJ., 563, 34 (2001).
14 R. Bulirsch, and J. Stoer, Numer. Math., 8, 1–13 (1996).
15 S. Harfst, A. Gualandris, D. Merritt, R. Spurzem, S. PortegiesZwart, and P. Berczik, New Astron., 12, 357-377 (2007).
16 M. Preto & S. Tremaine, Astron. J., 118, 2532–2541 (1999).
17 S. Mikkola & S. Aarseth, Celest. Mech. Dyn. Astron., 84, 343-354 (2002).
18 J. Makino & S.J. Aarseth, PASJ, 44, 141-151 (1999).
19 S. Mikkola & D. Merritt, MNRAS, 372, 219-223 (2006).
20 S. Mikkola & S.J. Aarseth, Celest. Mech. Dyn. Astron., 57, 439-459 (1993).
21 S. Mikkola & T. Tanikawa, Mon. Not. R. Astron. Soc., 310, 745-749 (1999).