МРНТИ 29.15.03 https://doi.org/10.26577/RCPh-2019-i4-6

[1]А.А. Мансурова, [1,2]Н.А. Бейсен, [3]Э. Кэведо, [1]М.О. Алимкулова, [1]А. Муратхан, [1]А. Кашкеева, [2]Д.А. Демисенова

[1]Казахский национальный университет имени аль- Фараби, Казахстан, г. Алматы
[2]Таразский государственный педагогический университет, Казахстан, г. Тараз
[3]Институт ядерных наук национальный автономный университет Мексики, Мексика, г. Мехико
e-mail: Sila756@mail.ru

СОГЛАСОВАНИЕ УСЛОВИЙ ДЛЯ ВНУТРЕННЕГО И ВНЕШНЕГО ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ АСТРОФИЗИЧЕСКИХ КОМПАКТНЫХ ОБЪЕКТОВ

Аннотация. В данной работе мы изучаем проблему согласования внутреннего и внешнего решений уравнений Эйнштейна для астрофизических компактных объектов. Мы предлагаем критерий для нахождения минимального расстояния, на котором внутреннее решение уравнений Эйнштейна можно сопоставить с внешним асимптотически плоским решением. Расположение совпадающей гиперповерхности, таким образом, ограничено критерием, определяемым в терминах собственных значений тензора кривизны Римана с использованием эффектов отталкивающей гравитации. Мы предлагаем соответствие C^3, при условии, чтобы производные определенного собственного значения кривизны были гладкими на соответствующих гиперповерхностях. Мы применяем подход согласования C^3 к сферически-симметричным пространствам-временам для идеальной жидкости и получаем физически значимые условия, при котором плотность и давление исчезают на согласующей поверхности. В результате мы получаем минимальный радиус, при котором можно выполнить сопоставление и фиксированное значение давления на оси симметрии. Эти значения затем используются для достижения плавного соответствия внутренних и внешних метрических функций. Также в работе были получены несколько идеально-жидкостных решений в гравитации Ньютона.

Ключевые слова: собственные значения, тензор кривизны, гравитационное поле, уравнение Эйнштейна, полекомпактных вращающихся тел, ОТО.

[1]A.A. Mansurova, [1,2]N. Beissen, [3]Hernando Quevedo, [1]M.O. Alimkulova, [1]A. Muratkhan, [1]A. Kashkeyeva, [2]D. Demissenova

[1]Al-Farabi Kazakh National University, Kazakhstan, Almaty
[2]Taraz State Pedagogical University, Kazakhstan, Taraz
[3]Instituto de CienciasNucleares, Universidad Nacional Autónoma de México, Mexico, México,
e-mail: Sila756@mail.ru

Matching conditions for the interior and exterior spacetimes of astrophysical compact objects

Abstract. We study the problem of matching the interior and exterior solutionsof Einstein's equations for astrophysical compact objects.We propose a criterion for finding the minimum distance at which an interior solution of Einstein's equations can be matched with an exterior asymptotically flat solution. The location of the matching hypersurface is thus constrained by a criterion defined in terms of the eigenvalues of the Riemann curvature tensor by using repulsive gravity effects. We propose a C^3 matching which consists in demanding that the derivatives of a particular curvature eigenvalue are smooth on the matching hypersurface. We apply the C^3 matching approach to spherically symmetric perfect fluid spacetimes and obtain the physically meaningful condition that density and pressure should vanish on the matching surface.As aresult we obtain a minimum radius at which the matching can be carried out and a fixed value for the pressure on the symmetry axis. These values are then used to reach the smooth matching of the interior and exterior metric functions. Several perfect fluid solutions in Newton gravity are tested.

Key words: eigenvalues, curvature tensor, gravitational field, Einsteinequations, field of compact rotating bodies, GRT.

[1]А.А. Мансурова, [1,2]Н.А. Бейсен, [3]Э. Кэведо, [1]М.О. Алимкулова,
[1]А. Муратхан, [1]А. Кашкеева, [2]Д.А. Демисенова
[1]Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Қазақстан, Алматы қ.
[2]Тараз Мемлекеттік педагогикалық университеті, Қазақстан, Тараз қ.
[3]Мексика автономды университетінің ядролық ғылымдар институты, Мексика, Мехико қ.
e-mail: Sila756@mail.ru

Астрофизикалық компакт объектілерінің ішкі және сыртқы кеңістік-уақытына арналған шарттарын сәйкестендіру

Аңдатпа. Осы жұмыста біз астрофизикалық компакт объектілері үшін Эйнштейн теңдеулерінің ішкі және сыртқы шешімдерін сәйкестендіру мәселесін зерттейміз. Біз Эйнштейннің ішкі есебінің шешімін оның сыртқы ассимптотикалық жазық шешімімен сәйкестендірудегі минималды қашықтықты табу критерийін ұсынып отырмыз. Үйлесімді гипербеттердің орналасуы Риманның өзінен кері тепкіш гравитациясы қолданылған қисықтық тензорымен шектелген. Мұнда сәйкесінше гипербеттердегі қисықтың белгілі меншікті мәндерінің туындылары біртекті тегіс болатындай жағдайда C^3 сәйкестендіру критерийі ұсынылған. Біз C^3-тің идеалды сұйықтыққа арналған сфералық симметриялы кеңістік-уақытқа сәйкестендіру әдісін қолданып, физикалық мәні бар шартқа қол жеткіздік: ол келісілген бетте тығыздық пен қысым өзара жойылып кететіндігін көрсетеді. Нәтижесінде симметрия өстерінде нақты бекітілген қысымның мәні мен сәйкестендіруді жүргізуге мүмкіндік беретін минималды радиусты табамыз. Осы нәтижелер ары қарай сыртқы және ішкі метрикалық функцияларды біртұтас сәйкестендіру үшін қолданылады. Сонымен қоса, осы жұмыста Ньютон гравитациясындағы бірнеше идеал сұйықтықтық шешімдер алынған.

Түйін сөздер: меншікті мәндер, қисықтық тензоры, гравитациялық өріс, Энштейн теңдеулері, шағын айналмалы денелердің өрісі, ЖСТ.

Введение

Общая теория относительности является теорией гравитационного взаимодействия и, в частности, должна описывать гравитационное поле релятивистских компактных объектов. В этом случае пространственно-временную составляющую можно разделить на две разные части: внутреннюю область, описываемую точным решением $g^{-}_{\mu\nu}$ уравнений Эйнштейна с физически обоснованным тензором энергии-импульса, и внешнюю область, которая соответствует точному вакуумному решению $g_{\mu\nu}$ [1-5]. Это означает, что пространство-временную составляющую M можно рассматривать как разделенное на две области $(M^{-}, g^{-}_{\mu\nu})$ и (M^{+}, g^{+}) со специальной гиперповерхностью Σ, на которой эти две области должны быть сопоставлены [6-7]. В случае компактных объектов Σ следует отождествлять с поверхностью объекта, то есть это времени подобная гиперповерхность. Из этого следует, что на Σ должны быть применены определенные условия соответствия, чтобы пространство-временная составляющая была хорошо определена.

Наш подход основан на анализе поведения собственных значений кривизны. Существуют разные способы определения этих собственных значений [8]. Наш метод заключается в использовании локальных метрик и дифференциальных форм. С физической точки зрения, локальная ортонормированная метрика является самым простым и наиболее естественным выбором для наблюдателя для выполнения локальных измерений времени [9], пространства и гравитации. Более того, после выбора локальной ортонормированной метрики, все величины относящиеся к этой системе отсчета, инвариантны относительно преобразований координат. Единственная степень свободы, остающаяся к выбору этой локальной области – это преобразование Лоренца[10].

Метод вычисления

В данных теоретических вычислениях мы использовалиспособ, использованный Картаном [11], чтобы исследовать общий вид тензора кривизны, который удовлетворяет уравнениям Эйнштейна с источником в виде идеальной жидкости. Кроме того, мы нашли общий вид собственных значений кривизны и вывели некоторые тождества, связанные с ними.Мы ограничились изучением сферически-симметричных решений, так что согласующая поверхность легко идентифицируется как сфера.Итак, выбираем ортонормальную метрику как:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu \otimes dx^\nu = \eta_{ab}\vartheta^a \otimes \vartheta^b, \quad (1)$$

с$\eta_{ab} = diag(-1,1,1,1)$ и $\vartheta^a = e^a_\mu dx^\mu$. Во первых,

$$d\vartheta^a = -\omega^a_b \wedge \vartheta^b\ , \quad (2)$$

и во-вторых, уравнение Картана

$$\Omega^a_b = d\omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b = \frac{1}{2}R^a_{bcd}\vartheta^c \wedge \vartheta^d \quad (3)$$

позволяет нам вычислить компоненты тензора кривизны Римана в локальной ортонормированной системе отсчета. Тензор Римана можно представить симметричной матрицей $R_{AB} = R_{BA}$с 21 компонентой. Первое тождество Бианки $R_{a[bcd]} = 0$, которое в бивекторном представлении записывается как

$$R_{14} + R_{25} + R_{36} = 0, \quad (4)$$

и уменьшает количество независимых компонент до 20.

Уравнения Эйнштейна с космологической постоянной

$$R_{ab} - \frac{1}{2}R\eta_{ab} + \Lambda\eta_{ab} = kT_{ab},$$

$$R_{ab} = R^c_{abc}\ , \quad (5)$$

может быть записано явно в терминах компонент тензора кривизны в бивекторном представлении, в результате чего получается набор из десяти алгебраических уравнений, которые связывают компоненты R_{AB}. Это означает, что только десять компонент R_{AB}являются алгебраически независимыми, которые могут быть расположены в матрице кривизны 6 × 6[12]. Это наиболее общая форма тензора кривизны, которая удовлетворяет уравнениям Эйнштейна с космологической постоянной и произвольным тензором энергии-импульса. Компоненты матриц, входящих в окончательный вид кривизны, оказываются особенно важными. Потому что матрицаL не отслеживается в силу тождеств Бианки, как показано выше. Более того, для оставшихся матриц получаем

$$Tr(R_{AB}) = k\left(\frac{T}{2} + 2T_{00}\right). \quad (6)$$

Мы видим, что эти матрицы зависят только от компонент тензора энергии-импульса.

В случае вакуумных пространств-времен матрица кривизны космологической постоянной ($\Lambda = 0$) и вакуумных полей (Rab = 0) уменьшается, а матрицы 3 и 3 L и M симметричны и не содержат компонентных матриц,

$$Tr(L)=0, Tr(M)=0. \quad (7)$$

Заметим, что соотношение Tr (L) = 0 в общем случае справедливо как следствие тождеств Бианки, тогда как Tr (M) = 0 выполняется только в случае предельного вакуума.

Для дальнейших вычислений мы также рассмотрим случай идеального тензора энергии-импульса жидкости с плотностью ρ и давлением p

$$T_{ab}=(\rho+p)u_a u_b+p\eta_{ab}, \quad (8)$$

где u_a – вектор скорости жидкости, которая для простоты всегда может быть выбрана в качестве скорости перемещения u^a= (−1,0,0,0). В случае решения уравнения идеальной жидкости, собственные значения кривизны связаны следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{6}\lambda_i = \frac{3k}{2}(\rho + p). \quad (9)$$

Эффекты отталкивающей гравитации были обнаружены в нескольких контекстах и в разных гравитационных полях[13–14]. В частности, отталкивающие эффекты были обнаружены в гравитационном поле вблизи черных дыр [15]. В литературе имеется несколько интуитивных определений отталкивающей гравитации, но только недавно в было предложено инвариантное определение с использованием собственных значений тензора кривизны. Идея состоит в том, чтобы использовать собственные значения для обнаружения областей гравитационного поля компактных объектов, где важны отталкивающие эффекты.

Радиус отталкивания определяется собственными значениями тензора внешней кривизны. Соответственно, минимальный совпадающий радиус совпадает с радиусом отталкивания. Физически это означает, что сопоставление C^3 предназначено для того, чтобы избежать наличия отталкивающей гравитации в случае гравитационных компактных объектов. Поэтому мы можем рассматривать отталкивающую гравитацию как нефизическое явление на уровне компактных объектов, и мы предлагаем использовать процедуру согласования C^3, чтобы избежать такой нефизической ситуации, охватывая отталкивающую область физическим внутренним решением.

Хорошо известно, что ньютоновская гравитация содержится в теории гравитации Эйнштейна как частный случай. В некотором смысле мы могли бы также сказать, что ньютоновская гравитация является простейшим нетривиальным частным случаем гравитации Эйнштейна. Поэтому разумно проверить соответствие C^3 в этом простом частном случае. Если окажется, что эта процедура не приводит к физически значимым результатам в предельном случае Ньютона, это будет означать провал метода. Тогда вероятность успеха в общей теории Эйнштейна была бы очень мала.

Рисунок 2 – Радиус отталкивания черных дыр с M = 1, Q = 0,5 и a = 0,74. Для сравнения также нанесен горизонт и эргосфера черной дыры Керра-Ньюмана

Рассмотрим линейный элемент для почти ньютоновской метрики в сферических координатах $x^{\alpha} = (t, r, \theta, \varphi)$

$$ds^2 = -(1+2\Phi)dt^2 + +(1-2\Phi)(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 sin^2\theta d\varphi^2) \quad (10)$$

где $\Phi \ll 1$ – ньютонов потенциал. В этой работе мы ограничимся изучением сферически-симметричных гравитационных конфигураций и поэтому предполагаем, что Φ зависит только от r. Тогда, компоненты ортонормированной тетрады:

$$\vartheta^0 = \sqrt{1+2\Phi}dt, \ \vartheta^1 = \sqrt{1-2\Phi}dr \quad (11)$$

$$\vartheta^2 = \sqrt{1-2\Phi}rd\theta, \ \vartheta^3 = \sqrt{1-2\Phi}rsin\theta d\varphi, \quad (12)$$

которые в приближении первого порядка приводят к 1-форме связности

$$\omega^0_1 = \Phi_r\vartheta^0, \ \ \omega^2_3 = -\frac{1}{r}(1+\Phi)cot\theta\vartheta^3, \quad (13)$$

$$\omega^1_2 = -\frac{1}{r}(1+\Phi - r\Phi_r)\vartheta^2, \quad \omega^1_3 = -\frac{1}{r}(1+\Phi - r\Phi_r)\vartheta^3, \quad (14)$$

радиальную производную от Φ. Кроме того, единственные неисчезающие компоненты рисунка 2 кривизны 2 могут быть выражены до первого порядка в Φ как

$$\Omega^0_1 = -\Phi_{rr}\vartheta^0\wedge\vartheta^1, \ \ \Omega^0_2 = -\frac{1}{r}\Phi_r\vartheta^0\wedge\vartheta^2, \quad (15)$$

$$\Omega^0_3 = -\frac{1}{r}\Phi_r\vartheta^0\wedge\vartheta^3, \ \ \Omega^2_3 = -\frac{2}{r}\Phi_r\vartheta^2\wedge\vartheta^3, \quad (16)$$

$$\Omega^3_1 = \left(\Phi_{rr} + \frac{1}{r}\Phi_r\right)\vartheta^2\wedge\vartheta^3, \quad \Omega^1_2 = \left(\Phi_{rr} + \frac{1}{r}\Phi_r\right)\vartheta^1\wedge\vartheta^2, \quad (17)$$

Из этого следует, что единственными ненулевыми компонентами тензора кривизны являются

$$R_{0101} = \boldsymbol{R}_{11} = \Phi_{rr}, \quad R_{0202} = \boldsymbol{R}_{22} = R_{0303} = \boldsymbol{R}_{33} = \frac{1}{r}\Phi_r \quad (18)$$

$$R_{2323} = \boldsymbol{R}_{44} = \frac{2}{r}\Phi_r, \quad R_{3131} = \boldsymbol{R}_{55} = R_{1212} = \boldsymbol{R}_{66} = \Phi_{rr} + \frac{1}{r}\Phi_r \quad (19)$$

Следовательно, матрица кривизны R_{AB} диагональна с собственными значениями

$$\lambda_1 = \Phi_{rr}, \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{r}\Phi_r \quad (20)$$

$$\lambda_4 = \frac{2}{r}\Phi_r, \lambda_5 = \lambda_6 = \Phi_{rr} + \frac{1}{r}\Phi_r \quad (21)$$

которые удовлетворяют отношения

$$\sum_{i=1}^{6} \lambda_i = 3\left(\Phi_{rr} + \frac{2}{r}\Phi_r\right) = 3\nabla^2\Phi. \qquad (22)$$

Затем мы приходим к выводу, что в ньютоновской гравитации собственное значение эквивалентно уравнению Пуассона, т.е.

$$\sum_{i=1}^{6} \lambda_i = \frac{3k}{2}\rho \leftrightarrow \nabla^2\Phi = \frac{k}{2}\rho. \qquad (23)$$

Заключение

В этой работе предложен новый метод сопоставления двух пространств-времен в общей теории относительности. Предполагается, чтобы собственные значения кривизны внутренних и внешних решений были непрерывными по согласованной поверхности.

Мы протестировали процедуру согласования C^3 в случае сферически-симметричных пространств-времен идеальной жидкости. Примечательно, что наш метод приводит к совершенно общим результатам, независимо от какого-либо конкретного решения уравнений поля. В случае Ньютоновской гравитации мы получаем, что плотность вещества гравитационного источника должна исчезать на согласующей поверхности. Этот результат в целом действителен, поскольку для его получения мы использовали, с одной стороны, уравнение Пуассона для внутреннего потенциала без указания какой-либо конкретной формы для плотности вещества. Следовательно, этот результат не зависит от уравнения состояния распределения сферической массы. С другой стороны, для сопоставления с внешней метрикой мы использовали Ньютоновской потенциал сферы, который описывается уникальным решением уравнения Лапласа. Это означает, что условие соответствия $C^3c = 0$ на поверхности соответствия справедливо для любого сферический-симметричного поля в Ньютоновской гравитации. В этой работе мы ограничились изучением сферический-симметричных решений, так что согласующая поверхность легко идентифицируется как сфера. Тем не менее, можно применить метод согласования C^3 к случаю осесимметричных пространств-времен, которые являются более реалистичными в качестве моделей для описания гравитационного поля астрофизических компактных объектов.

Литература

1 Bičák J. Selected solutions of Einstein’s field equations: their role in general relativity and astrophysics //Einstein’s field equations and their physical implications. – Springer, Berlin, Heidelberg, 1999. – С. 1-126.

2 Chakraborty S., Parattu K., Padmanabhan T. Gravitational field equations near an arbitrary null surface expressed as a thermodynamic identity //Journal of High Energy Physics. – 2015. – Vol. 2015. – No.10. – P.97.

3 Heinicke C., Hehl F.W. Schwarzschild and Kerr solutions of Einstein's field equation: An Introduction //International Journal of Modern Physics D. – 2015. – Vol.24. – No. 02. – P.1530006.

4 Moradpour H., Salako I.G. Thermodynamic analysis of the static spherically symmetric field equations in Rastall theory //Advances in High Energy Physics. – 2016. – Vol.2016. – 3492796 (5p).

5 Hernandez-Pastora J.L., Herrera L., Martin J. Axially symmetric static sources of gravitational field //Classical and Quantum Gravity. – 2016. – Vol.33. – No.23. – P.235005.

6 Luongo O., Quevedo H. Characterizing repulsive gravity with curvature eigenvalues //Physical Review D. – 2014. – Vol.90. – No.8. – P.084032.

7 Ge X. H., Wang B. Quantum computational complexity, Einstein's equations and accelerated expansion of the Universe //Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. – 2018. – Vol.2018. – No.02. – P. 047.

8 Bekenstein J.D. Relativistic gravitation theory for the modified Newtonian dynamics paradigm //Physical Review D. – 2004. – Vol.70. – No.8. – P.083509.

9 Bovy J. galpy: A python Library for Galactic Dynamics //The Astrophysical Journal Supplement Series. – 2015. – Vol.216. – No.2. – P.29.

10 Gödel K. An example of a new type of cosmological solutions of Einstein's field equations of gravitation //Reviews of modern physics. – 1949. – Vol.21. – No.3. – P.447.

11 Ovalle J., Linares F. Tolman IV solution in the Randall-Sundrumbraneworld //Physical Review D. – 2013. – Vol.88. – No.10. – P.104026.

12 Cianci R., Mauro Francaviglia, and I. Volovich. Variational calculus and Poincaré-Cartan formalism on supermanifolds // J of Physics A: Mathematical and General. – 1995. – Vol. 28.3. – P.723.

13 Gutiérrez-Piñeres A.C., Quevedo H. C 3 matching for asymptotically flat spacetimes //Classical and Quantum Gravity. – 2019. – Vol.36. – No.13. – P.135003.

14 Deser S., Ryzhov A.V. Curvature invariants of static spherically symmetric geometries //Classical and Quantum Gravity. – 2005. – Vol.22. – No.16. – P.3315.

15 Pugliese D., Quevedo H., Ruffini R. Circular motion of neutral test particles in Reissner-Nordströmspacetime //Physical Review D. – 2011. – Vol.83. – No.2. – P.024021.

References

1 Bičák, Jiří, Selected solutions of Einstein's field equations: their role in general relativity and astrophysics. Einstein's field equations and their physical implications,(Springer, Berlin, Heidelberg, 1999),p. 1-126.
2 S. Chakraborty, K. Parattu, and T. Padmanabhan, J of High Energy Phys, 2015 (10), 97(2015).
3 C. Heinicke and W.H. Friedrich, Intern J of Modern Physics D, 24 (02),1530006(2015).
4 H. Moradpourand G.S. Ines, Advances in High Energy Physics, 2016, 3492796 (2016).
5 J.L.Hernandez-Pastora, L. Herrera, and J. Martin, Classical and Quantum Gravity, 33 (23), 235005(2016).
6 O. Luongoand H. Quevedo, Phys. Rev. D, 90 (8), 084032 (2014).
7 Ge Xian-Hui, and Bin Wang,J of Cosmology and Astroparticle Phys., 2018 (02), 047 (2018).
8 J.D. Bekenstein, Phys. Rev. D, 70 (8), 083509 (2004).
9 Jo Bovy, The Astrophysical Journal Supplement Series, 216 (2), 29 (2015).
10 Gödel, Kurt, Reviews of modern physics, 21 (3), 447 (1949).
11 J.Ovalle and F. Linares, Phys. Rev. D, 88 (10), 104026 (2013).
12 R.Cianci, M. Francaviglia, and I. Volovich, J of Physics A: Mathematical and General, 28 (3), 723 (1995).
13 Gutiérrez-Piñeres, Antonio C., and H. Quevedo, Classical and Quantum Gravity, 36 (13), 135003 (2019).
14 Deser, Stanley, and A.V. Ryzhov, Classical and Quantum Gravity, 22(16), 3315(2005).
15 D. Pugliese, H.Quevedo, and R. Ruffini, Phys.l Rev. D, 83(2), 024021(2011).