

Е.А. Малков<sup>1</sup>, А.А. Беков<sup>2,3</sup> , С.Б. Момынов<sup>2,3\*</sup> , И.Б. Бекмухамедов<sup>2</sup> ,  
Д.М. Курмангалиев<sup>2</sup> , А.М. Мукамеджан<sup>2</sup> , И.С. Орынкул<sup>4</sup> 

<sup>1</sup>Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Россия, г. Новосибирск

<sup>2</sup>Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Казахстан, г. Алматы

<sup>3</sup>Казахский национальный исследовательский технический университет им. К.И. Сатпаева, Казахстан, г. Алматы, \*e-mail: momynov\_serzhan@mail.ru

<sup>4</sup>КГКП «Алматинский колледж моды и дизайна», Казахстан, г. Алматы

## СЕЧЕНИЯ ПУАНКАРЕ ДЛЯ ЗАДАЧИ ДВУХ НЕПОДВИЖНЫХ ЦЕНТРОВ И ПОТЕНЦИАЛА ХЕНОНА-ХЕЙЛЕСА

В данной работе исследуется потенциал Хенона-Хейлеса и задача двух неподвижных центров. При исследовании нелинейных систем, для которых неизвестны точные решения, используется метод сечения Пуанкаре. Для потенциала Хенона-Хейлеса были получены сечения Пуанкаре. При малых энергиях система Хенона-Хейлеса выглядит интегрируемой, так как независимо от начальных условий, траектории, полученные с помощью численного интегрирования, лежат на двумерных поверхностях, т.е. так, как если бы существовал второй независимый интеграл. Далее был исследован потенциал задачи двух неподвижных центров. Было показано на основе сечения Пуанкаре, что в случае  $\mu_1 = \mu_2 = 1$  внутренняя структура сечений распадается со значений  $H = -1.7$ , но внутренняя структура сечений сохраняется в отрезке  $H \in [-0.5, -1.6]$ , в случае  $\mu_1 = 0.9$  и  $\mu_1 = 0.1$  внутренняя структура сечений распадается со значений  $H = -0.9$ , но внутренняя структура сечений сохраняется в отрезке  $H \in [-0.3, -0.8]$ , в случае  $\mu_1 = 0.7$  и  $\mu_1 = 0.3$  внутренняя структура сечений распадается со значений  $H = -0.8$ , но внутренняя структура сечений сохраняется в отрезке  $H \in [-0.2, -0.7]$ . С увеличением энергии многие из этих поверхностей распадаются. Предполагается, что полученные численные результаты послужат основой для сравнения с аналитическими решениями.

**Ключевые слова:** модель Хенона-Хейлеса, задача двух неподвижных центров, сечение Пуанкаре, численные решения.

E.A. Malkov<sup>1</sup>, A.A. Bekov<sup>2,3</sup>, S.B. Momynov<sup>2,3\*</sup>, I.B. Beckmuhamedov<sup>2</sup>,  
D.M. Kurmangaliyev<sup>2</sup>, A.M. Mukametzhan<sup>2</sup>, I.S. Orynqul<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Khristianovich institute of theoretical and applied mechanics Siberian Branch  
of Russian Academy of Sciences, Russia, Novosibirsk

<sup>2</sup>Al-Farabi Kazakh National University, Kazakhstan, Almaty

<sup>3</sup>Satbayev University, Kazakhstan, Almaty, \*e-mail: momynov\_serzhan@mail.ru

<sup>4</sup>MSOE «Almaty College of Fashion and Design», Kazakhstan, Almaty

### Poincare sections for two fixed centers problem and Henon-Heiles potential

In this paper, we study the Henon-Heiles potential and the problem of two fixed centers. In studies of nonlinear systems for which exact solutions are unknown, the Poincare section method is used. For the Henon-Heiles potential, Poincare sections were obtained. At low energies, the Henon-Heiles system looks integrable, since independently of the initial conditions, the trajectories obtained with the help of numerical integration lie on two-dimensional surfaces, i.e. as if there existed a second independent integral. Next, the potential of two fixed centers was investigated. It was shown on the basis of the Poincare section that, in the case  $\mu_1 = \mu_2 = 1$  the internal cross-sectional structure decomposes from the values  $H = -1.7$ , but the internal cross-sectional structure is preserved in the interval  $H \in [-0.5, -1.6]$ , in the case  $\mu_1 = 0.9$  and  $\mu_1 = 0.1$  the internal cross-sectional structure decomposes from the values  $H = -0.9$  but the internal cross-sectional structure is preserved in the

interval  $H \in [-0.3, -0.8]$ , in the case of  $\mu_1 = 0.7$  and  $\mu_1 = 0.3$  the internal cross-sectional structure decomposes from the values  $H = -0.8$ , but the internal cross-sectional structure is preserved in the interval  $H \in [-0.2, -0.7]$ . With increasing energy, many of these surfaces decay. It is assumed that the numerical results obtained will serve as the basis for comparison with analytical solutions.

**Key words:** Henon-Heiles model, the problem of two fixed centers, Poincaré section, numerical solutions.

Е.А. Малков<sup>1</sup>, А.А. Беков<sup>2,3</sup>, С.Б. Момынов<sup>2,3\*</sup>, И.Б. Бекмұхамедов<sup>2</sup>,  
Д.М. Құрманғалиев<sup>2</sup>, А.М. Мұқаметжан<sup>2</sup>, И.С. Орынқұл<sup>4</sup>

<sup>1</sup>С.А. Христианович атындағы теориялық және қолданбалы механика институты,  
Ресей Ғылым Академиясы Сібір Бөлімі, Ресей, Новосибирск қ.

<sup>2</sup>Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Қазақстан, Алматы қ.

<sup>3</sup>Қ.И. Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық зерттеу университеті,  
Қазақстан, Алматы қ., \*e-mail: momynov\_serzhan@mail.ru

<sup>4</sup>КМҚК «Алматы сән және дизайн колледжі», Қазақстан, Алматы қ.

### Қозғалмайтын екі центр есебі мен Хенон-Хейлес потенциалы үшін Пуанкаре қимасы

Берілген мақалада Хенон-Хейлес потенциалы мен қозғалмайтын екі центр есебі қарастырылады. Сызықты емес жүйелердің нақты шешімдері белгісіз болғанда Пуанкаре қима әдісі қолданылады. Хенон-Хейлес потенциалы үшін Пуанкаре қимасы алынды. Энергияның төмен деңгейлерінде Хенон-Хейлес жүйесі интегралданады, екінші белгісіз интегралы бар секілді бастапқы шарттардан тәуелсіз жүйенің траекториясы сандық интегралдық әдіспен шешіліп, екі өлшемді кеңістікте сипатталады. Сонымен қатар қозғалмайтын екі центр есебі зерттелді. Пуанкаре қимасының негізінде қозғалмайтын екі центр есебіне келесідей тұжырымдамалар алынды:  $\mu_1 = \mu_2 = 1$  кезінде  $H = -1.7$  мәнінен бастап ішкі қима ыдырайды, ал  $H \in [-0.5, -1.6]$  аралығында ішкі қима сақталады;  $\mu_1 = 0.9$  және  $\mu_1 = 0.1$  кезінде  $H = -0.9$  мәнінен бастап ішкі қима ыдырайды, ал  $H \in [-0.3, -0.8]$  аралығында ішкі қима сақталады;  $\mu_1 = 0.7$  және  $\mu_1 = 0.3$  кезінде  $H = -0.8$  мәнінен бастап ішкі қима ыдырайды, ал  $H \in [-0.2, -0.7]$  аралығында ішкі қима сақталады. Сонымен қатар, энергияның өсуімен, осы қималардың көпшілігі ыдырайды. Алынған сандық нәтижелер аналитикалық шешімдермен салыстыру үшін негіз болады деп болжануда.

**Түйін сөздер:** Хенон-Хейлес моделі, қозғалмайтын екі центр есебі, Пуанкаре қимасы, сандық шешімдер.

## Введение

Интерес к существованию третьего интеграла движения для звезд, движущихся в потенциале галактики, возродился еще в конце 50-х и начале 60-х годов прошлого столетия. Первоначально предполагалось, что потенциал имеет симметрию и не зависит от времени, поэтому в цилиндрических координатах  $(r, \theta, z)$  это будет только функция от  $r$  и  $z$ . Должны существовать пять интегралов движения, постоянных для шестимерного фазового пространства. Однако интегралы могут быть либо изолирующими, либо неизолирующими. Неизолирующие интегралы обычно заполняют все доступные фазовые пространства и не ограничивают орбиту.

Хенон и Хейлес попытались выяснить, могут ли они найти какое-либо реальное доказательство того, что должен существовать

третий изолирующий интеграл движения. Проводя численные вычисления, они не слишком усложняли астрономический смысл проблемы; они требовали только, чтобы исследованный ими потенциал был аксиально-симметричным. Авторы также предположили, что движение привязано к плоскости и перешло в декартово фазовое пространство  $(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ . После некоторых испытаний им удалось найти действительный потенциал. Этот потенциал аналитически прост, так что орбиты можно вычислить довольно легко, но он все еще достаточно сложный, так что типы орбит нетривиальны. Этот потенциал теперь известен как потенциал Хенона и Хейлеса [1-3].

Известны некоторые частные решения задачи трех тел, но общее решение еще не найдено. Одним из частных случаев задачи трех тел является задача двух неподвижных центров. Она была впервые рассмотрена Эйлером 1760 г

[4]. Якоби показал, что уравнения движения могут быть интегрированы в терминах эллиптических функций [5]. Данная задача может быть использована как некоторое первое приближение в астрономических задачах о движении малых планет и комет под действием гравитации Солнца и Юпитера. Период обращения Юпитера составляет около двенадцати лет, и в течение небольшого промежутка времени движение указанных небесных тел можно рассматривать в рамках задачи двух неподвижных центров. Также задачу о движении космического корабля к Луне можно рассматривать в рамках указанной задачи. Время полета космического корабля до Луны составляет около четырех суток. За это время Луна по круговой орбите Земли переместится незначительно. Исследование задачи двух неподвижных центров проводилось различных направлениях [6-21]. К примеру, В.В. Козлов и А.О. Харин рассмотрели модификацию задачи двух неподвижных центров на сфере [22].

**Методы и расчеты.** Потенциал Хенона-Хейлеса, несомненно, является одним из самых простых, классических и характерных примеров открытых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. На выше сказанную тему было посвящено большое количество исследований ученых [23-25].

Потенциал системы Хенона-Хейлеса определяется формулой:

$$U(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + 2x^2y - \frac{2}{3}y^3). \quad (1)$$

В уравнении (1) видно, что потенциал фактически состоит из двух гармонических осцилляторов, которые связаны возмущающими членами  $x^2y - \frac{1}{3}y^3$ .

Основными уравнениями движения для пробной частицы с единичной массой ( $m = 1$ ) являются:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x} = -x - 2xy, \\ \ddot{y} = -\frac{\partial U}{\partial y} = -y - x^2 + y^2. \end{cases} \quad (2)$$

Следовательно, гамильтониан системы (1) имеет вид:

$$H = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + x^2y - \frac{1}{3}y^3 = h, \quad (3)$$

где  $\dot{x}$  и  $\dot{y}$  – импульсы на единицу массы,  $x$  и  $y$  – координаты системы; численное значение гамильтониана, которое сохраняется. Видно, что гамильтониан  $h > 0$  симметричен относительно  $x \rightarrow -x$ , а  $H$  также проявляет симметрию вращения при  $2\pi / 3$ .

Ниже приведены зависимости координат от функций по времени для систем уравнений (2).

Для исследования системы Хенона-Хейлеса используется метод сечения Пуанкаре. Достоинства данного метода особенно проявляются, когда рассматриваются нелинейные системы, для которых точные решения неизвестны. В этом случае фазовые траектории рассчитываются численными методами.

Для решения систем уравнений (2) выбираются граничные условия так, чтобы они удовлетворяли уравнение (3). Далее системы уравнения (2) решаются на основе метода Рунге – Кутты. Ниже представлены сечения Пуанкаре для систем Хенона-Хейлеса при разных значениях энергии:  $E = 1/12$ ,  $E = 1/8$ . С увеличением энергии структура сечений разрушается. Полученные результаты согласуются с другими авторами [1,2].

Далее, исследуется задача двух неподвижных центров. Представим что на плоскости OXY расположены две неподвижные точки  $S_1$  и  $S_2$  с массами  $m_1$  и  $m_2$  под действием ньютоновского притяжения которых в этой же плоскости движется материальная точка  $S$  массой  $m$ . Таким образом, уравнения движения материальной точки можно написать в следующем виде [26]:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{\partial U}{\partial x} = -fm_1 \frac{x}{r_1^3} - fm_2 \frac{x}{r_2^3}, \\ \ddot{y} = \frac{\partial U}{\partial y} = -fm_1 \frac{y-c}{r_1^3} - fm_2 \frac{y+c}{r_2^3}, \end{cases} \quad (4)$$

где  $U = f(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2})$ ,  $f$  - гравитационная постоянная.

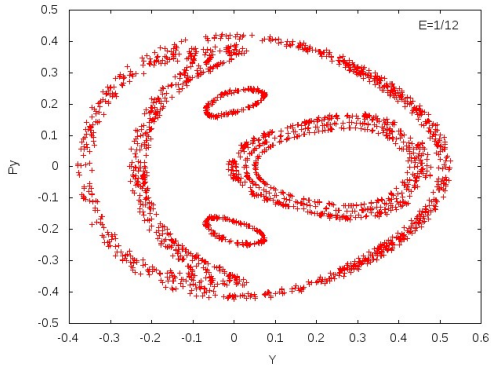


Рисунок 1 – Сечение Пуанкаре при  $E = 1/12$

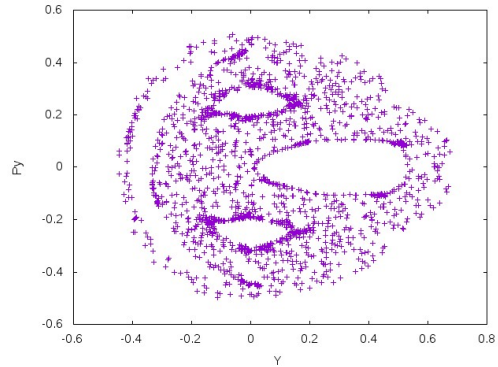


Рисунок 2 – Сечение Пуанкаре при  $E = 1/8$ .

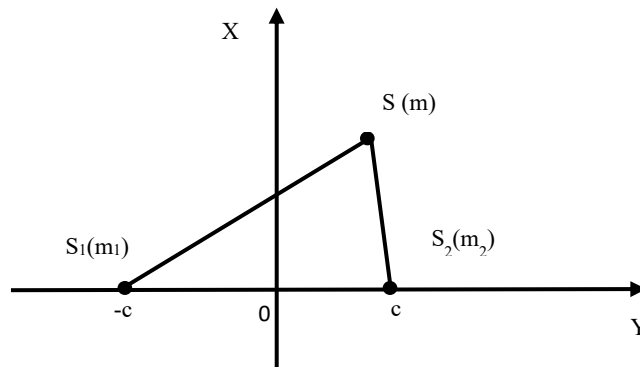


Рисунок 3 – Схема задачи

Радиус- вектора определяются следующим образом:

$$r_1 = \sqrt{x^2 + (y-c)^2}, \quad r_2 = \sqrt{x^2 + (y+c)^2} \quad (5)$$

Канонические уравнения задачи двух неподвижных центров будут иметь вид [27]:

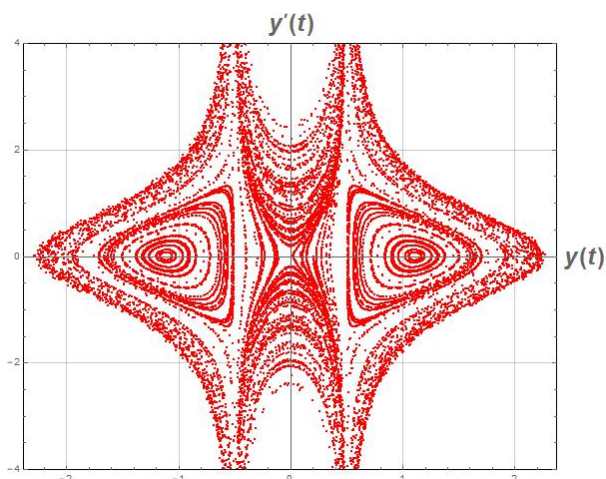
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = +\frac{\partial H}{\partial \dot{x}}, & \frac{dx}{dt} = +\frac{\partial H}{\partial \dot{y}} \\ \frac{d\dot{x}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}, & \frac{d\dot{y}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y} \end{cases} \quad (6)$$

где гамильтониан определяется формулой

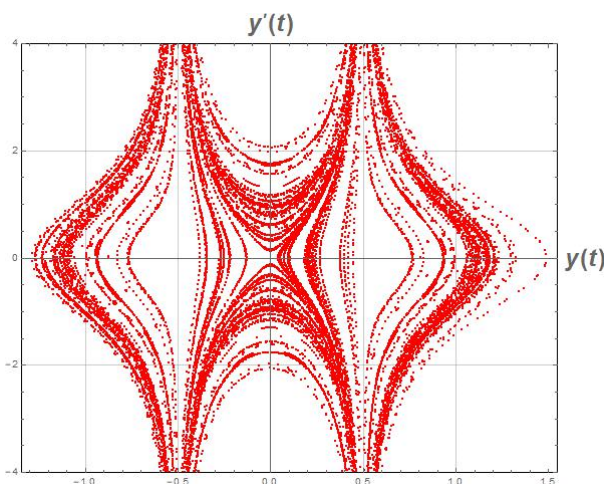
$$H = T - U = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - f\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}\right), \quad (7)$$

$$H = const.$$

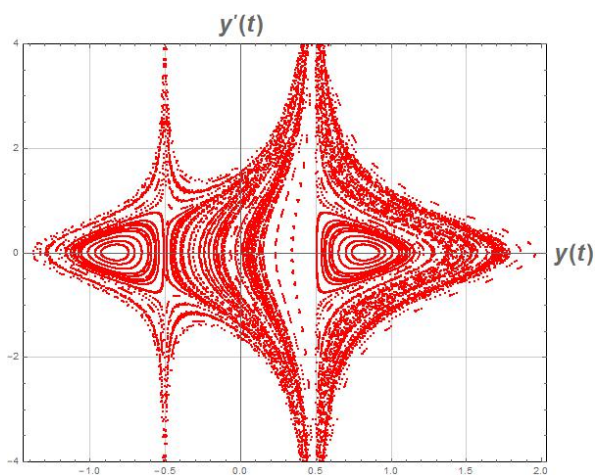
Введем обозначения:  $\mu_1 = fm_1$ ,  $\mu_2 = fm_2$ . Рассмотрим случай  $\mu_1 = \mu_2 = 1$ , второй случай  $\mu_1 = 0.9$  и  $\mu_2 = 0.1$ , третий случай  $\mu_1 = 0.7$  и  $\mu_2 = 0.3$ . Данные параметры показывают разные соотношения масс неподвижных центров. Теперь исследуется сечение Пуанкаре для указанной модели задачи и параметров. На основе полученных результатов можно сказать что, в случае  $\mu_1 = \mu_2 = 1$  внутренняя структура сечений распадается со значений  $H = -1.7$ , но внутренняя структура сечений сохраняется в отрезке  $H \in [-0.5, -1.6]$ , в случае  $\mu_1 = 0.9$  и  $\mu_2 = 0.1$  внутренняя структура сечений распадается со значений  $H = -0.9$ , но внутренняя структура сечений сохраняется в отрезке  $H \in [-0.3, -0.8]$ , в случае  $\mu_1 = 0.7$  и  $\mu_2 = 0.3$  внутренняя структура сечений распадается со значений  $H = -0.8$ , но внутренняя структура сечений сохраняется в отрезке  $H \in [-0.2, -0.7]$ .



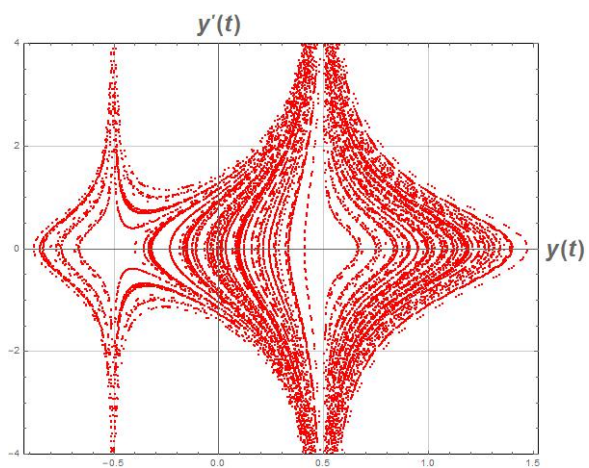
**Рисунок 4** – Сечение Пуанкаре при  $H = -0.9, c = 0.5, \mu_1 = 1.0, \mu_2 = 1.0$ .



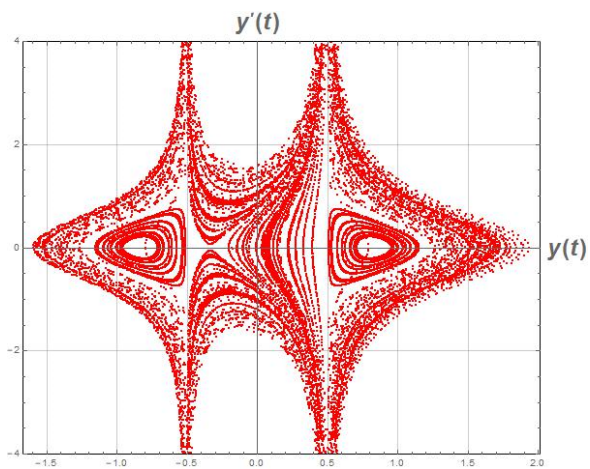
**Рисунок 5** – Сечение Пуанкаре при  $H = -1.7, c = 0.5, \mu_1 = 1.0, \mu_2 = 1.0$ .



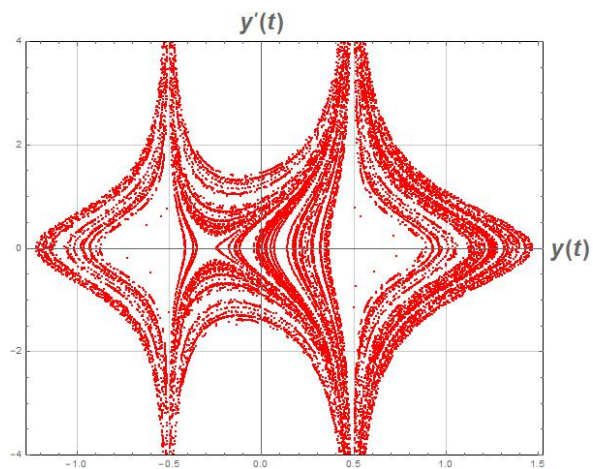
**Рисунок 6** – Сечение Пуанкаре при  $H = -0.6, c = 0.5, \mu_1 = 0.9, \mu_2 = 0.1$ .



**Рисунок 7** – Сечение Пуанкаре при  $H = -0.9, c = 0.5, \mu_1 = 0.9, \mu_2 = 0.1$ .



**Рисунок 8** – Сечение Пуанкаре при  $H = -0.6, c = 0.5, \mu_1 = 0.7, \mu_2 = 0.3$ .



**Рисунок 9** – Сечение Пуанкаре при  $H = -0.8, c = 0.5, \mu_1 = 0.7, \mu_2 = 0.3$ .



## Заключение

Таким образом, результаты, полученные численным методом, определяют структуру

сечений Пуанкаре для модели задачи двух неподвижных центров и служат основой для сравнительного анализа при определении аналитического отображения.

## Литература

- 1 Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. – М.: Мир, 1985. – С.59-71.
- 2 Euaggelos E. Zotos Classifying orbits in the classical Henon-Heiles Hamiltonian system // arXiv:1502.02510v1 [nlin.CD] 9 Feb 2015.
- 3 Вернов С.Ю. Построение решений обобщенной системы Хенона–Хейлеса с помощью теста Пенлеве// ТМФ. – 2003.– том 135(3).– С. 409–419.
- 4 Euler L. Historie de L'Academie // Royale des sciences et Belles-lettres. -1760, 1767-Vol. XVI. – P. 228–247.
- 5 Jacobi C. G. J. Vorlesungen uber Dynamik. –Chelsea Publ., New York, 1969. – 300 p.
- 6 Gonzalez Leon M.A., Mateos Guiltre J., de la Torre Mayado M. Orbits in the problem of two fixed centers on the sphere//Regular and Chaotic Dynamics –2017.– Vol. 22(5). – P. 520-542.
- 7 Borisov A.V. and Mamaev I.S. Generalized problem of two and four Newtonian centers//Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy – 2005.– Vol. 92. –P.371-380.
- 8 Borisov A.V. and Mamaev I.S. Relations between integrable systems in plane and curved spaces//Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy – 2007. – Vol. 99. – P. 253-260.
- 9 Seri M. The problem of two fixed centers: bifurcation diagram for positive energies//Journal of Mathematical Physics – 2015. – Vol. 56, 012902.
- 10 Vozmicheva T.G. Classification of motions for generalization of the two centers problem on sphere/ Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy–2000. –Vol. 77. –P.37–48.
- 11 Vozmicheva T.G, Oshemkov A. A. Topological analysis of the two-centre problem on the two-dimensional sphere//Mat. Sb.–2002. –Vol. 193(8).–P. 3–38.
- 12 Albouy A., The underlying geometry of the fixed centers problems //in Topological Methods, Variational Methods and Their Applications, Brezis, H., Chang, K.C., Li, S.J., Rabinowitz, P. (Eds.), Singapore: World Scientific.–2003.–P. 11-21.
- 13 Albouy A. and Stuchi T. Generalizing the classical fixed-centres problem in a non-Hamiltonian way//J. Phys. A. – 2004.– Vol. 37. –P. 9109-9123.
- 14 Waalkens H., R. Dullin H., and H. Richter P. The Problem of two fixed centers: Bifurcations, Actions, Monodromy//Physica D. –2004. –Vol. 196. –P. 265-310.
- 15 Demin V.G. Orbits in the problem of two fixed centers //Astronomicheskii Zhurnal.–1960.– Vol. 37. –P. 1068-1075.
- 16 O Mathuna D. Integrable Systems in Celestial Mechanics.–Boston: Birkhauser, 2008.–234 p.
- 17 Arathoon Ph. Singular reduction of the 2-body problem on the 3-sphere and the 4-dimensional spinning top //Regular and Chaotic Dynamics. – 2019. – Vol. 24(4).–P. 370-391.
- 18 Borisov A.V., Mamaev I.S. and Bizyaev I.A. The Spatial Problem of 2 Bodies on a Sphere. Reduction and Stochasticity //Regul. Chaotic Dyn. – 2016. – Vol. 21(5). –P. 556-580.
- 19 Borisov A.V., Mamaev I.S. The restricted two-body problem in constant curvature spaces//Celestial Mech Dyn Astr. – 2006. –Vol. 96. –P. 1–17.
- 20 Garcia-Naranjo L.C., Marrero J.C., Perez-Chavela E. and Rodriguez-Olmos M., Classification and stability of relative Equilibria for the two-body problem in the hyperbolic space of Dimension 2//J. Differential Equations. –2016. – Vol. 260(7). – P. 6375–6404.
- 21 Tremblay F., Turbiner A.V., and Winternitz P., Periodic orbits for an infinite family of classical superintegrable systems //J. Phys. A. –2010.– Vol. 43(1).–015202.–14 p.
- 22 Kozlov V.V. and Harin A.O. Kepler's Problem in Constant Curvature Spaces//Celest. Mech. Dyn. Astr. – 1992. –Vol. 54(4). –P. 393-399.
- 23 Omarov Ch.T. and Malkov E. A. Order and Chaos in Stellar and Planetary Systems //ASP Conference Series. – St. Petersburg, 17-24 August, 2003. – Vol.316. – P.371-373.
- 24 Euaggelos E. Zotos, A. Riaño-Doncel, F.L. Dubeibe. Basins of convergence of equilibrium points in the generalized Henon-Heiles system//arXiv:1803.07398v1 [nlin.CD] 20 Mar 2018.
- 25 Euaggelos E. Zotos An overview of the escape dynamics in the Henon-Heiles Hamiltonian system //arXiv:1709.04360v2 [nlin.CD] 14 Sep 2017
- 26 Герасимов И.А., Жуйко С.В. Исследование первых интегралов задачи двух неподвижных центров Л. Эйлера //Матем. моделирование и краев. задачи. Часть 3. – 2005. –С. 74–81.
- 27 Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основы задачи и методы. –М.: Наука. Глав. Ред. физ.-мат. лит., 1968, – С. 800.

### References

- 1 A.Lihtenberg and M.Lieberman, *Reguljarnaja i stohasticheskaja dinamika*, (M:Mir, 1985), 59-71. (in Russ).
- 2 Euaggelos E. Zotos. Classifying orbits in the classical Henon-Heiles Hamiltonian system, arXiv:1502.02510v1 [nlin.CD] 9 Feb 2015.
- 3 S.Ju.Vernov, TMF135(3), 409–419(2003). (in Russ).
- 4 L. Euler *Historie de L'Academie Royale des sciences et Belles-lettres*, 1767, XVI, 228–247(1760).
- 5 C.G.J. Jacobi *Vorlesungen uber Dynamik* (Chelsea Publ., New York, 1969), 300p.
- 6 M.A. Gonzalez Leon, J. Mateos Guilatre and M. de la Torre Mayado, *Regular and Chaotic Dynamics* 22(5), 520-542 (2017).
- 7 A.V. Borisov and I.S. Mamaev, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 92, 371-380 (2005).
- 8 A.V. Borisov and I.S. Mamaev, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 99, 253-260 (2007).
- 9 M. Seri, *J. of Mathematical Physics* 56, 012902 (2015).
- 10 T.G. Vozmicheva, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 77, 37–48 (2000).
- 11 T.G. Vozmicheva and A.A. Oshemkov, *Mat. Sb.* 193(8), 3–38 (2002).
- 12 A. Albouy, *Variational Methods and Their Applications*, 11-21 (2003).
- 13 A. Albouy and T. Stuchi, *J. Phys. A* 37, 9109-9123 (2004).
- 14 H. Waalkens, R. Dullin H., and H. Richter P., *Physica D* 196, 265-310 (2004).
- 15 V.G. Demin, *Astronomicheskii Zhurnal* 37, 1068-1075 (1960).
- 16 D. O Mathuna, *Integrable Systems in Celestial Mechanics*, (Boston: Birkhauser, 2008), 234p.
- 17 Ph. Arathoon, *Regular and Chaotic Dynamics* 24(4), 370-391 (2019).
- 18 A.V. Borisov, I.S. Mamaev and I.A. Bizyaev, *Regul. Chaotic Dyn.* 21(5), 556-580 (2016).
- 19 A.V. Borisov and I.S. Mamaev, *Celestial Mech Dyn Astr* 96, 1–17(2006).
- 20 L.C. Garcia-Naranjo, J.C. Marrero, E. Perez-Chavela and M. Rodriguez-Olmos, *J. Differential Equations* 260 (7), 6375–6404 (2016).
- 21 F. Tremblay, A.V. Turbiner and P. Winternitz, *J. Phys. A:Math Theor.* 43(1), 015202, 14 pp (2010).
- 22 V.V. Kozlov and A.O. Harin, *Celest. Mech. Dyn. Astr.* 54(4), 393-399 (1992).
- 23 Ch. T Omarov. and E. A. Malkov, *Order and Chaos in Stellar and Planetary Systems ASP Conference Series* (St. Petersburg, 17-24 August, 2003) 316, 371-373.
- 24 Euaggelos E. Zotos, and A. Riaño-Doncel, arXiv:1803.07398v1 [nlin.CD] 20 Mar 2018.
- 25 Euaggelos E. Zotos., arXiv:1709.04360v2 [nlin.CD] 14 Sep 2017.
- 26 I.A. Gerasimov., and S.V. Zhujko, *Matem. modelirovanie i kraev. Zadachi* 3, 74–81 (2005). (in Russ).
- 27 G.N. Duboshin *Nebesnaja mehanika. Osnovy zadachi i metody*, (Moscow: Nauka. Glav. Red. fiz.-mat. lit., 1968), 774-785. (in Russ).