

Д.М. Зазулин^{1,2*} , С.Е. Кемелжанова¹ , П.Д. Эзау¹, И. Сатышев¹

¹Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Казахстан, г. Алматы

²Институт ядерной физики, Казахстан, г. Алматы,

*e-mail: denis_zazulin@mail.ru

ПРИМЕНЕНИЕ ГЕОМЕТРОТЕРМОДИНАМИКИ К СИСТЕМЕ С КОНЕЧНОЙ БАРИОННОЙ ПЛОТНОСТЬЮ, ОПИСАННОЙ МЕТОДОМ ГОЛОГРАФИЧЕСКИХ ДУАЛЬНОСТЕЙ

В работе исследованы геометрические свойства равновесного многообразия термодинамической системы с конечной плотностью барионов, предсказанной методом голографических дуальностей. В качестве формализма исследования использовалась геометротермодинамика, позволяющая получать результаты инвариантные относительно преобразований Лежандра, т.е. независимые от выбора термодинамических потенциалов. Для рассматриваемых систем рассчитаны соответствующие метрики и скалярные кривизны, а также описаны их свойства. Для изучения термодинамических систем мы вычисляли метрические тензоры соответствующих равновесных многообразий, детерминанты метрических тензоров и соответствующие скалярные кривизны. С помощью голографического подхода были рассмотрены сильно взаимодействующие квантовые системы при конечной барионной плотности, т.е. системы, подобные квантовой хромодинамике. Получены трехмерные графики, на которых хорошо видно, при каких значениях термодинамических переменных скалярные кривизны стремятся к бесконечности или к нулю, что указывает на возможные фазовые переходы и на возможную компенсацию взаимодействий квантовыми эффектами соответственно.

Для установления надежной связи между полученными в настоящей работе линиями разрывов и фазовыми переходами в определенных в термодинамические системы, необходим, дополнительный анализ. Этот анализ можно провести, например, при построении геодезических кривых на рассматриваемых многообразиях.

Ключевые слова: голографические дуальности, геометротермодинамика, метрический тензор, скалярная кривизна, конечная барионная плотность, преобразования Лежандра.

D.M. Zazulin^{1,2*}, S.E. Kemelzhanova¹, P.D. Ezau¹, I. Satyshev¹

¹Al-Farabi Kazakh National University, Kazakhstan, Almaty

²Institute of Nuclear Physics, Kazakhstan, Almaty,

*e-mail: denis_zazulin@mail.ru

Application of geometrothermodynamics to the system with finite baryon density described by the method of holographic dualities

The geometric properties of the equilibrium manifolds of the thermodynamic system with finite baryon density predicted by the holographic dualities method have been studied in this work. Geometrothermodynamics was used as the formalism of the study, which allows to obtain results invariant with respect to the Legendre transformations, i.e. independently of the choice of thermodynamic potentials. For the considered system, the corresponding metrics and scalar curvatures are calculated, and their properties are also described. To study thermodynamic systems, we calculated the metric of the corresponding equilibrium manifolds, the determinants of the metric tensors, and the corresponding scalar curvatures. Using a holographic approach, strongly interacting quantum systems with a finite baryon density were considered, i.e. systems like quantum chromodynamics. 3D graphs are obtained, which clearly show at what values of thermodynamic variables the scalar curvatures tend to infinity or to zero, which indicates possible phase transitions and possible compensation of interactions by quantum effects, respectively.

To establish a reliable connection between the discontinuity lines obtained in this work and phase transitions in the thermodynamic systems defined in thermodynamic systems, additional analysis is

required. This analysis can be carried out, for example, when constructing geodesic curves on the considered manifolds.

Key words: holographic dualities, geometrothermodynamics, metric tensor, scalar curvature, finite baryon density, Legendre transformations.

Д.М. Зазулин^{1,2*}, С.Е. Кемелжанова¹, П.Д. Эзау¹, И. Сатышев¹

¹Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Қазақстан, Алматы қ.

²Ядролық Физика институты, Қазақстан, Алматы қ.,

*e-mail: denis_zazulin@mail.ru

Голографиялық екіжақтылық әдісімен сипаттау арқылы шектеулі жүйеде барионның тығыздына геометротермодинамиканы қолдану

Бұл жұмыста голографиялық екіжақтылық әдісі бойынша болжанған соңғы бариондардың тығыздығы бар термодинамикалық жүйенің тепе-теңдік алуының геометриялық қасиеттері зерттелген. Зерттеу формализмі ретінде термодинамикалық потенциалды таңдауға тәуелсіз Лежандр түрлендіруі бойынша нәтижелерді инвариантты алуға мүмкіндік беретін геометротермодинамика қолданылды. Қарастырылған жүйелер үшін тиісті метрикалар мен скалярлық қисықтар есептеледі, сондай-ақ олардың қасиеттері сипатталады. Термодинамикалық жүйелерді зерттеу үшін тиісті тепе-теңдіктің көптүрлілігінің метрикалық тензорларын, метрикалық тензорлардың детерминанттарын және сәйкес скалярлық қисықтарды есептедік. Голографиялық тәсілді қолдана отырып, шекті барион тығыздығы бар күшті өзара ірекеттесетін кванттық жүйелерді, яғни кванттық хромодинамика сияқты жүйелерді қарастырдық. Термодинамикалық айнымалылардың қандай шамалары скалярлық қисықтың шексіздікке немесе нөлге бейім болатындығын анықтайтын 3-өлшемді график алынған, бұл фазалардың ауысуы мен кванттық әсер арқылы өзара әрекеттесудің ықтимал өтелуін көрсетеді.

Осы жұмыста алынған үзік сызықтар мен термодинамикалық жүйелерде анықталған фазалық ауысулар арасында сенімді байланыс орнату үшін қосымша талдаулар қажет. Бұл талдауларды, мысалы көптүрлілік геодезиялық қисықтарды салу кезінде жүргізуге болады.

Түйін сөздер: голографиялық екіжақтылық, геометротермодинамика, метрикалық тензор, скалярлық қисықтық, соңғы барион тығыздығы, Лежандр түрлендіруі.

Введение

Метод голографических дуальностей позволяет описывать квантовые системы в режиме сильной связи [1]. Голографические модели приводят к множеству качественных предсказаний, которые хорошо согласуются с экспериментальными данными и в ряде случаев не имеют другого теоретического объяснения.

Также с помощью голографии предсказываются новые типы квантовых систем. Например, в работе [2] обнаружена система, у которой при низких температурах имеется нулевая звуковая мода как у Ферми жидкости, но у этой системы совершенно иная температурная зависимость теплоемкости. В работе [3], при голографическом описании теории с ненулевой барионной плотностью при нулевой температуре обнаружен фазовый переход второго рода, когда химический потенциал становится равным массе барионов. В обеих работах приведены соответствующие термодинамические соотношения.

В связи с вышеизложенным, становится актуальной задача исследования транспортных и термодинамических свойств новых квантовых систем, в том числе задача поиска фазовых переходов. В настоящей работе было проведено исследование термодинамики, полученной в работе [3] квантовой системы с конечной барионной плотностью. В качестве метода исследования мы использовали геометротермодинамику [4].

Геометротермодинамика

Дифференциальная геометрия является одним из важнейших инструментов математической физики со многими приложениями. В качестве примера можно упомянуть все четыре известные взаимодействия природы, которые могут быть описаны в геометрических терминах.

В геометротермодинамике (ГТД), предложенной Э. Кеведо [4], взаимодействия в термодинамических системах описываются с помощью кривизны Риманова равновесного много-

образа, инвариантного относительно преобразований Лежандра. Так и в термодинамике физические свойства системы не зависят от выбора термодинамических потенциалов, с помощью которых эта система описывается. Переход от одного набора термодинамических потенциалов к другому осуществляется при помощи преобразований Лежандра, и в этом смысле термодинамика инвариантна относительно преобразований Лежандра. В ГТД, например, как это было показано в [4], идеальный газ, частицы которого не взаимодействуют друг с другом, соответствует Риманову многообразию с нулевой кривизной. В случае взаимодействующих систем с нетривиальной структурой фазовых переходов, кривизна должна воспроизводить поведение системы вблизи точек, где происходят фазовые переходы. Это интуитивное требование выражается в конкретных математических условиях для метрических структур равновесных пространств. В частности, как было показано на примере газов Ван-дер-Ваальса, Бозе – Эйнштейна, термодинамик различных черных дыр и т.д. [5], вблизи фазовых переходов скалярная кривизна соответствующих равновесных многообразий стремится к бесконечности. Этот факт очень удобен для поисков неизвестных фазовых переходов в малоизученных термодинамических системах.

$$P_{abcd} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{ad}}{\partial E^b \partial E^c} + \frac{\partial^2 g_{bc}}{\partial E^a \partial E^d} - \frac{\partial^2 g_{ac}}{\partial E^b \partial E^d} - \frac{\partial^2 g_{bd}}{\partial E^a \partial E^c} \right) + g_{np} \left(\Gamma_{bc}^n \Gamma_{ad}^p - \Gamma_{bd}^n \Gamma_{ac}^p \right), \quad (3)$$

где $g^{nm}(g_{ad})$ – метрический тензор,

$$\Gamma_{bc}^n = \frac{1}{2} g^{nm} \left(\frac{\partial g_{mb}}{\partial E^c} + \frac{\partial g_{mc}}{\partial E^b} - \frac{\partial g_{bc}}{\partial E^m} \right) - \text{символы}$$

Кристоффеля. Далее, скалярная кривизна вычисляется по формуле $R = g^{ac} g^{bd} R_{abcd}$.

Поскольку в дальнейшем мы будем иметь дело с системами, зависящими только от двух термодинамических потенциалов, то выражение для скалярной кривизны упрощается до:

$$P = \frac{2P_{1212}}{\det(g)}, \quad (4)$$

где $\det(g)$ – детерминант двумерного метрического тензора. Все расчеты в настоящей

В настоящей работе для изучения термодинамических систем мы вычисляли метрические тензоры соответствующих равновесных многообразий, детерминанты метрических тензоров и соответствующие скалярные кривизны. В качестве формул для вычисления метрик и соответствующих метрических тензоров мы использовали [4]:

$$dl^2 = E_a \frac{\partial \Phi}{\partial E^a} \delta_{ab} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial E^b \partial E^c} dE^a E^c, \quad (1)$$

$$dl^2 = E_a \frac{\partial \Phi}{\partial E^a} \eta_{ab} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial E^b \partial E^c} dE^a E^c, \quad (2)$$

где l^2 – квадрат термодинамической длины, $\Phi \equiv \Phi(E^a)$ – термодинамический потенциал, который явно зависит от других термодинамических потенциалов – E^a , n – количество термодинамических потенциалов, от которых зависит Φ , $\delta_{ab} = \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$ и 2. Формула (1), предположительно, корректно описывает фазовые переходы 1-го рода, а формула (2) – фазовые переходы 2-го рода.

Выражение для тензора кривизны имеет вид:

работе были проведены с помощью системы MatLab.

Большой термодинамический потенциал для системы с конечной барионной плотностью, предсказанной методом голографических дуальностей

В работе [3] с помощью голографического подхода были рассмотрены сильновзаимодействующие квантовые системы при конечной барионной плотности, т.е. системы, подобные квантовой хромодинамике. Авторами [3] получены термодинамические соотношения для нескольких случаев. Рассмотрим сначала соотношение для большого термодинамического потенциала при нулевой температуре, зависящего от массы m частиц и химического потенциала μ [3]:

$$\Omega(\mu, m) = \frac{1}{4} \gamma N (2\pi\alpha')^4 \mu^3 (4m - \mu), \quad (5)$$

где N, γ, α' – некоторые параметры теории, которые в нашем анализе принимались за константы. Более того, мы приняли выражение $\frac{1}{4} \gamma N (2\pi\alpha')^4$ – за единицу. Поэтому

$$\Omega(\mu, m) = \mu^3 (4m - \mu). \quad (6)$$

На рисунке 1 представлен график (6). Используя (1-4) и термодинамический потенциал (6), нами были численно получены соответствующие геометрические величины в широком диапазоне массы и химического потенциала. Для каждой геометрической величины также были получены явные формулы но ввиду их громоздкости мы их в настоящей работе нигде не приводим. Вычисленные детерминант метрического тензора и скалярная кривизна показаны на рисунках 2 и 3.

Из рисунков 2 и 3 видно, что на графиках для скалярной кривизны имеются разрывы на линиях $m \equiv \mu = 4m$ и $\mu = 2m$ соответственно (функции в этих областях стремятся к бесконечности). Также на обоих графиках имеется особенность в области $\mu = 0$. Согласно представлениям ГТД перечисленные линии, возможно соответствуют линиям фазовых переходов в рассматриваемой квантовой системе. Для всех остальных значений параметров μ и m скалярная кривизна близка к нулю, что обусловлено, как это видно из рисунков 2 а) и 3 а), большими величинами детерминантов метрических тензоров, которые в свою очередь стоят в знаменателе формулы (4). В формализме ГТД маленькая величина скалярной кривизны соответствует маленькой величине термодинамического взаимодействия между частицами. Для рассматриваемой квантовой системы с сильным взаимодействием это может означать, что взаимодействие компенсируется квантовыми эффектами.

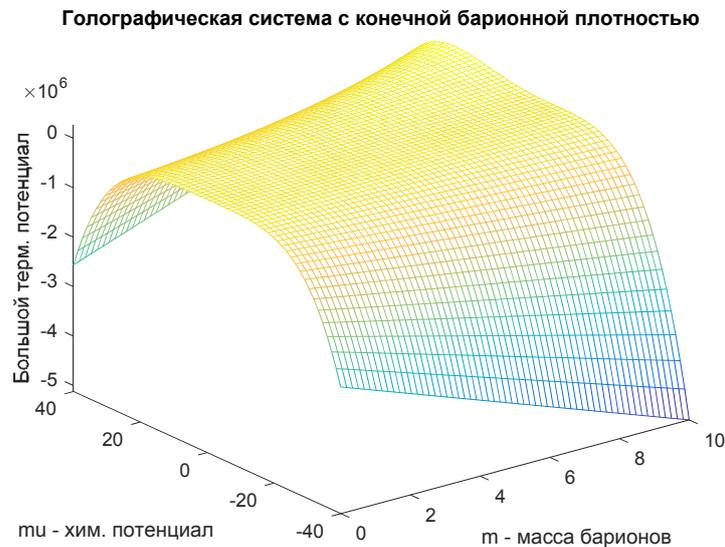


Рисунок 1 – Большой термодинамический потенциал (6) в зависимости от химического потенциала и массы барионов для голографической системы с конечной барионной плотностью [3]

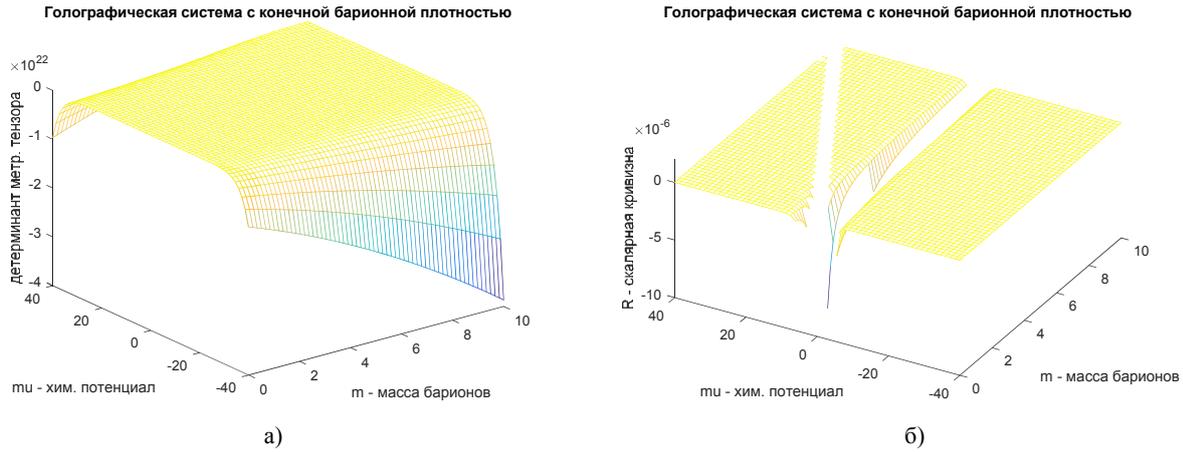


Рисунок 2 – а) – Зависимость детерминанта от химического потенциала и массы барионов, б) - зависимость скалярной кривизны от тех же параметров для (6). Метрика вычислялась по формуле (1)

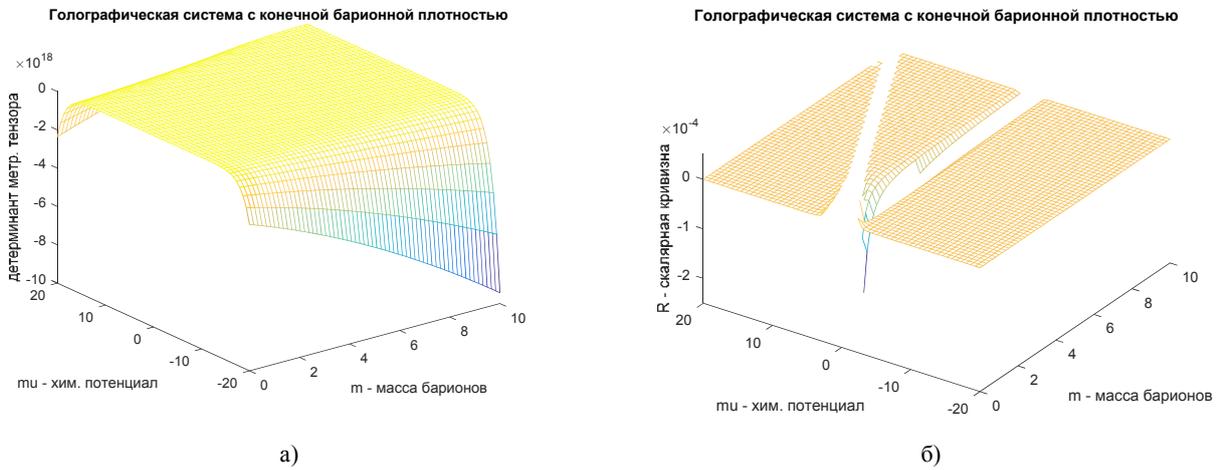


Рисунок 3 – а) – Зависимость детерминанта от химического потенциала и массы барионов, б) – зависимость скалярной кривизны от тех же параметров для (6). Метрика вычислялась по формуле (2)

Далее нами был сделан анализ следующего соотношения для большого термодинамического потенциала системы с сильным взаимодей-

ствием, выведенного в [3] тоже для температуры равной нулю:

$$\Omega(\mu, m) = \frac{1}{4} \gamma \mathcal{N} (2\pi\alpha')^4 \left(- \left[\mu^2 - \left(m - \frac{y_0}{2\pi\alpha'} \right)^2 \right]^2 + 4\mu \left[\mu^2 - \left(m - \frac{y_0}{2\pi\alpha'} \right)^2 \right] \frac{y_0}{2\pi\alpha'} \right). \quad (7)$$

Приняв для упрощения $\frac{1}{4} \gamma \mathcal{N} (2\pi\alpha')^4 = 1$ и $\frac{y_0}{2\pi\alpha'} = 1$ получим:

$$\Omega(\mu, m) = \left(- [\mu^2 - (m-1)^2]^2 + 4\mu [\mu^2 - (m-1)^2] \right). \quad (8)$$

Трехмерный график функции (8) приведен на рисунке 4. Также используя (1–4) и выражение (8) были численно получены соответствующие геометрические величины в широком диапазоне массы и химического потенциала. Вычисленные для (8) детерминант метрического тензора и скалярная кривизна показаны на рисунках 5 и 6.

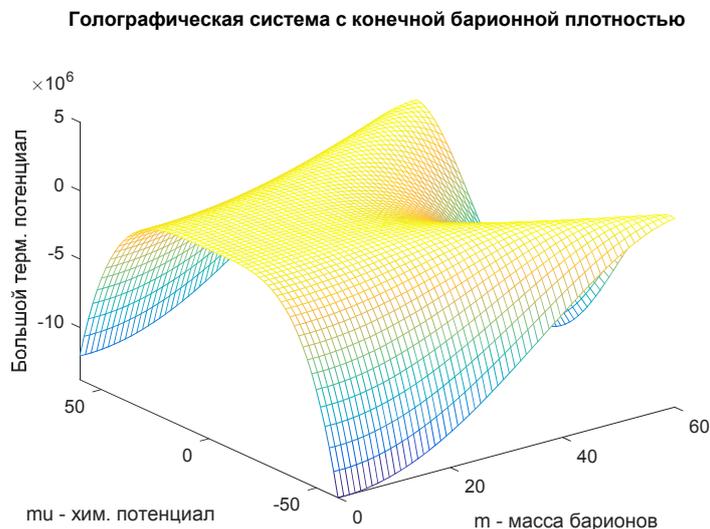


Рисунок 4 – Большой термодинамический потенциал (8) в зависимости от химического потенциала и массы барионов для голографической системы с конечной барионной плотностью [3]

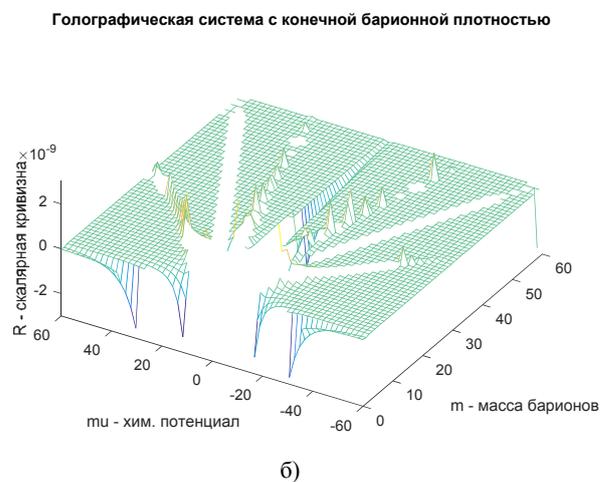
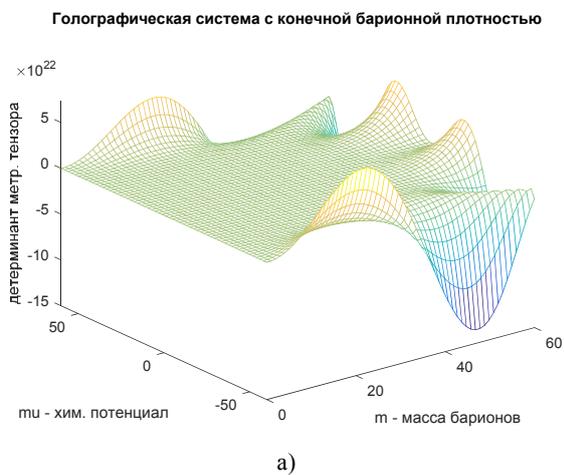


Рисунок 5 – а) – Зависимость детерминанта от химического потенциала и массы барионов, б) – зависимость скалярной кривизны от тех же параметров для (8). Метрика вычислялась по формуле (2)

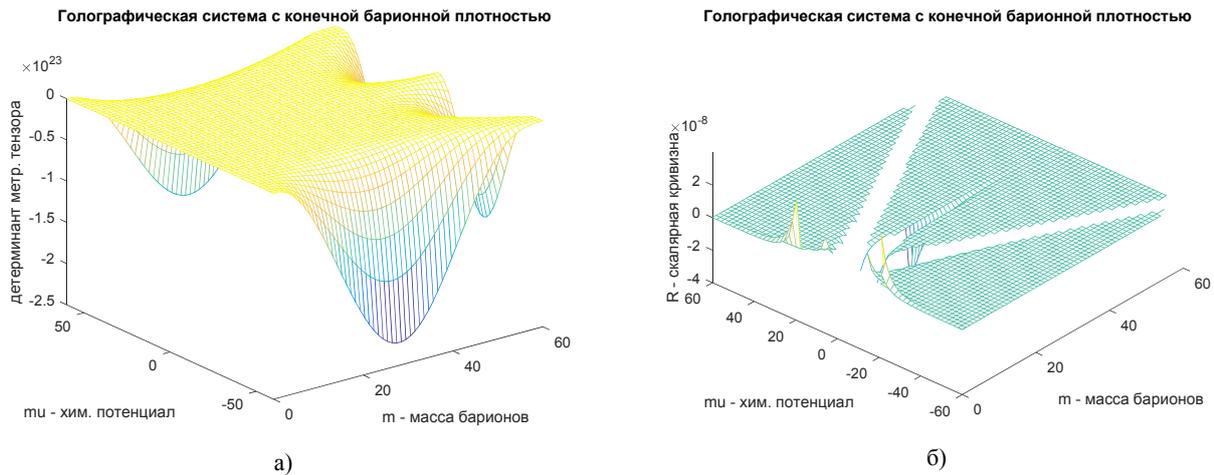


Рисунок 6 – а) – Зависимость детерминанта от химического потенциала и массы барионов, б) – зависимость скалярной кривизны от тех же параметров для (8). Метрика вычислялась по формуле (2)

Из рисунков 5 и 6 видно, что на обоих графиках для скалярной кривизны имеются разрывы на линиях $\mu \equiv \pm t$ (функции в этих областях стремятся к бесконечности). В работе [3] было показано, что на линии $\mu = t$ в рассматриваемой системе происходит фазовый переход второго рода. Также имеются разрывы на линиях $\mu \approx \pm 2t, \mu \approx \pm 0.5t, \mu \approx 0, t \approx 0$, как это видно из рисунка 5 б) (на рисунке 6 б) разрывы видны только на линиях $\mu \approx 0, t \approx 0$). Эти линии, возможно, соответствуют линиям фазовых переходов. При остальных значениях параметров μ и t скалярная кривизна пренебрежимо мала, что также как и в первом рассмотренном нами случае связано с большими величинами детерминантов метрических тензоров (см. рисунки 5 а) и 6 а)) и это соответствует маленькой величине термодинамического взаимодействия между частицами системы.

Свободная энергия Гельмгольца для системы с конечной барионной плотностью, предсказанной методом голографических дуальностей

Еще одним термодинамическим потенциалом из [3] по которому мы сделали анализ была свободная энергия Гельмгольца при нулевой температуре:

$$F = \frac{1}{4} N^{\frac{1}{3}} \gamma^{\frac{1}{3}} \left(\frac{d^2}{(2\pi\alpha')^2} - c^2 \right)^{\frac{1}{3}} \times \left(3 \frac{d^2}{(2\pi\alpha')^2} + c^2 \right) \tag{9}$$

где [3]

$$c = \gamma N (2\pi\alpha')^3 (\mu^2 - t^2) t, \tag{10}$$

$$\frac{d}{2\pi\alpha'} = \gamma N (2\pi\alpha')^3 (\mu^2 - t^2) \mu. \tag{11}$$

Выразив F через химический потенциал и массу, и для упрощения, положив все константы равными 1, получим:

$$F(\mu, t) = (\mu^2 - t^2) (3\mu^2 + t^2). \tag{12}$$

График функции (12) приведен на рисунке 7. Используя выражение (12) и геометрические соотношения (1-4) были численно получены соответствующие величины в широком диапазоне химического потенциала и массы. Рассчитанные для (12) детерминант метрического тензора и скалярная кривизна показаны на рисунках 8 и 9.

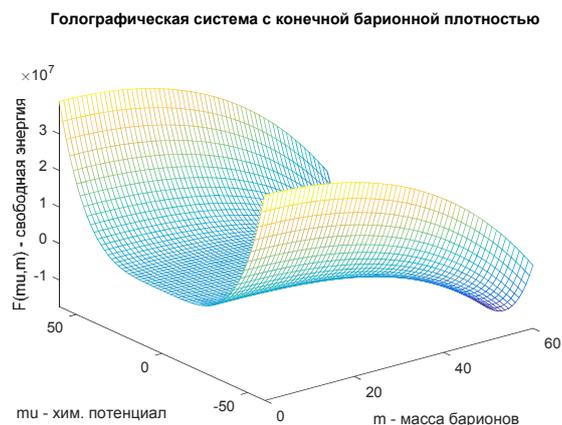


Рисунок 7 – Зависимость свободной энергии Гельмгольца (10) от химического потенциала и массы барионов для голографической системы с конечной барионной плотностью [3]

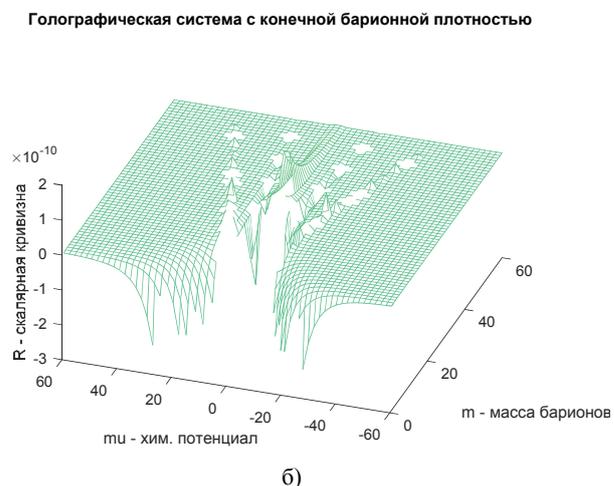
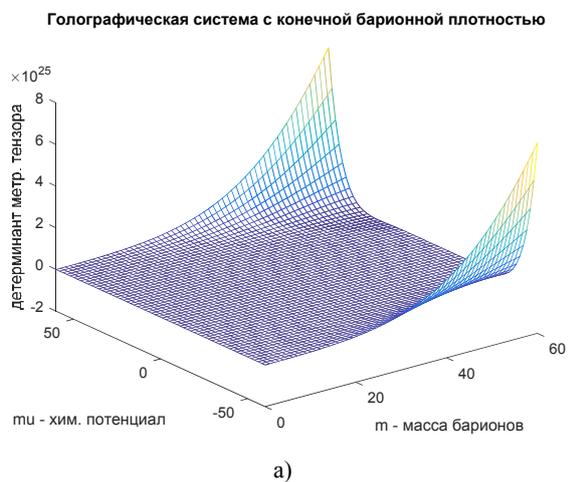


Рисунок 8 – а) - Зависимость детерминанта от химического потенциала и массы барионов, б) - зависимость скалярной кривизны от тех же параметров для (10). Метрика вычислялась по формуле (1)

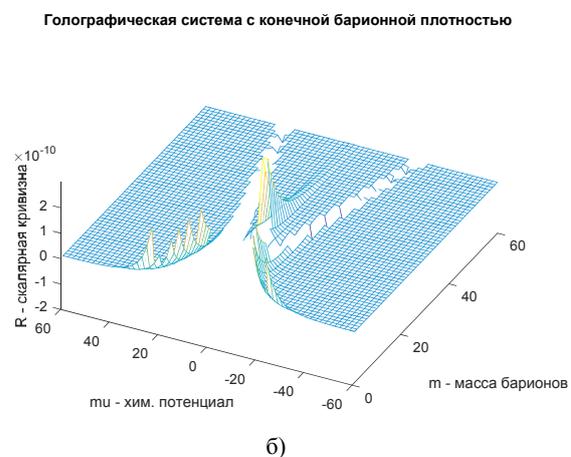


Рисунок 9 – а) – Зависимость детерминанта от химического потенциала и массы барионов, б) – зависимость скалярной кривизны от тех же параметров для (10). Метрика вычислялась по формуле (2).

Из рисунков 8 и 9 видно, что скалярная кривизна соответствующая метрике (1) имеет разрывы на линиях $tu \equiv \mu \approx 0.6t, \mu \approx 0.25t, \mu \approx 0$ и $t \approx 0$, а соответствующая метрике (2) на линиях $\mu \approx 0.5t, \mu \approx 0$ и $t \approx 0$. Для остальных значений параметров μ и t кривизны очень малы. Все рассуждения по поводу линий разрывов и малости величин скалярных кривизн для остальных значений параметров μ и t полностью аналогичны рассуждениям для предыдущих двух случаев.

Заключение

В настоящей работе в рамках ГТД для равновесных многообразий сильно взаимодействующих квантовых систем, предсказанных методами голографических дуальностей, вычислены метрические тензоры, их детерминанты и скалярные кривизны.

Были рассмотрены термодинамические системы с конечной барионной плотностью, для которых в качестве термодинамических потен-

циалов брались большие термодинамические потенциалы и свободная энергия Гельмгольца, зависящие от химического потенциала и массы частиц.

Получены 3-мерные графики, на которых хорошо видно, при каких значениях термодинамических переменных скалярные кривизны стремятся к бесконечности или к нулю, что указывает на возможные фазовые переходы и на возможную компенсацию взаимодействий квантовыми эффектами соответственно.

Фазовый переход второго рода, определенный в работе [3] для рассмотренной нами системы в нашем подходе, тоже был воспроизведен.

Для установления надежной связи между полученными в настоящей работе линиями разрывов и фазовыми переходами в определенными в [3] термодинамическими системами необходим дополнительный анализ. Этот анализ можно провести, например, при построении геодезических кривых на рассматриваемых многообразиях.

Литература

- 1 Maldacena J. The large N limit of super conformal field theories and supergravity // *Adv.Theor. Math. Phys.* – 1998. – P.231–252.
- 2 Karch A., Son D.T., and Starinets A.O. Zero sound from holography // *Phys. Rev. Lett.* – 2009. – Vol.102. – Ar.#051602.
- 3 Karch A., O'Bannon A. Holographic thermodynamics at finite baryon density: some exact results // *JHEP.* – 2007. – Vol. 0711. – Ar.#074.
- 4 Quevedo H. Geometrothermodynamics // *J. Math. Phys.* – 2007. – Vol. 48. – Ar.#013506.
- 5 Quevedo H., Sanchez A., Taj S., Vazquez A., Phase transitions in Geometrothermodynamics // *Gen. Rel. Grav.* – 2011. – Vol. 43. – P.1153-1165.
- 6 Engelhardt N. and Horowitz G.T. Recovering the spacetime metric from a holographic dual // *Adv. Theoretical Math. Phys.* – 2017. – Vol. 21, No.7. – P.1635-1653.
- 7 Czech B., Lamprou L., McCandlish S. and Sully J. Integral geometry and holography // *J. High Energy Phys.* – 2015. – No.175. – P.7-33.
- 8 Bhattacharya J., Veronika E. Hubeny, Rangamani M., Takayanagi T. Entanglement density and gravitational thermodynamics // *Phys. Rev. D.* – 2015. – Vol.91. – P.106009.
- 9 Quevedo H., Sasha A. Zaldivar. A geometrothermodynamic approach to ideal quantum gases and Bose-Einstein condensates // *General Relativity and Quantum Cosmology.* – 2015. arXiv:1512.08755v3. – 17 p.
- 10 Mansoori, Seyed Ali Hosseini and et.al. Extrinsic and intrinsic curvatures in thermodynamic geometry // *Phys. Rev. B.* – 2016. – Vol.759. – P.298-305.
- 11 Ming Zhang, Xin-Yang Wang, Wen-Biao Liu. Extrinsic curvature in geometrothermodynamics // *Physics Letters B.* – 2018. – Vol.783. – P.169-174.
- 12 Ming Zhang Corrected thermodynamics and geometrothermodynamics for anti-de Sitter black hole // *Nuclear Physics B.* – 2018. – Vol.935. – P.170-182.
- 13 Karch A., O'Bannon A. Holographic Thermodynamics at Finite Baryon Density: Some Exact Results // *J. High Energy Physics.* – 2007. – Vol.11. – Ar.#074.
- 14 Yunseok S., Sang-Jin Sin, Jonathan Shock, Dimitrios Zoakos Holographic hadrons in a confining finite density medium // *J. High Energy Physics.* – 2010. – Vol.3. – Ar.#115.
- 15 Xun Chen, Danning Li, Mei Huang Criticality of QCD in a holographic QCD model with critical end point // *Chinese Physics C.* – 2019. – Vol.43, No 2. – Ar.#023105.
- 16 Alsop, James et.al. Duality between zeroes and poles in holographic systems with massless fermions and a dipole coupling // *Phys. Rev. D*90. – 2014. – No.12. – Ar.#126013.
- 17 Pineda V., Quevedo H., Maria N. Quevedo, Sanchez A., Valdes E. The physical significance of geometrothermodynamic metrics // *J. of Geometric Methods in Modern Physics.* – 2019. – Vol.16, No. 11. – Ar.#1950168.

- 18 Quevedo H., Nettel F., Bravetti A. Representation invariant Geometrothermodynamics: applications to ordinary thermodynamic systems //J. Geom. and Physics. – 2014. –Vol.81. –P.1-9.
- 19 Maria N. Quevedo, Quevedo H. Geometrothermodynamics of the cosmological constant //International Journal of Management and Applied Science. – 2017. –Vol.3. –P.21-24.
- 20 Nikola I. Gushterov, Andy O'Bannon, Ronnie Rodgers Holographic zero sound from Spacetime – filling branes //J. of High Energy Physics. – 2018. – Vol.10. – Ar.#76.

References

- 1 J. Maldacena, Advances Theoretical Math. Phys, 2 (02), 231-252 (1998).
- 2 A. Karch, D.T. Son, Phys. Rev. Lett.102, 051602 (2009).
- 3 A. Karch, A. O'Bannon, Journal of high energy physics, 11, 074 (2007).
- 4 H. Quevedo, Journal Math. Phys., 48, 013506 (2007).
- 5 H. Quevedo, A. Sanchez, S. Taj, A. Vazquez, Gen. Rel. Gravity 43, 1153 (2011).
- 6 N. Engelhardt and G.T. Horowitz, Advances Theor. Math. Phys. 21(7), 1635-1653, (2017).
- 7 B. Czech, L. Lamprou, S. McCandlish and J. Sully, J. of High Energy Phys. 175, 7-33, (2015).
- 8 J. Bhattacharya, E. V. Hubeny, M. Rangamani, T. Takayanagi, Phys. Rev.D, 91, 106009(2015).
- 9 H. Quevedo, A. Sasha, S. Zaldivar, J. General Relativity and Quantum Cosmology(2015).
- 10 Mansoori, Seyed Ali Hosseini et.al. Phys. Rev. B, 759, 298-305 (2016).
- 11 Ming Zhang, Xin-Yang Wang, Wen-Biao Liu, Physics Letters B, 783, 169-174, (2018).
- 12 Ming Zhang, Nuclear Physics B. 935, 170-182, (2018).
- 13 Andreas Karch, Andy O'Bannon, J. of High Energy Physics, 11, 074 (2007).
- 14 S. Yunseok, S. Jin Sin, J. Shock, D.Zoakos, J. High Energy Physics, 3, 115 (2010).
- 15 Xun Chen, Danning Li, Mei Huang, Chinese Physics C.43(2), 023105 (2019).
- 16 Alsup, James et.al., Phys. Rev. D, 90(12), 126013 (2014).
- 17 V. Pineda, H. Quevedo, N. Maria Quevedo, A. Sanchez, E. Valdes, J. of Geometric Methods in Modern Physics, 16(11), 1950168 (2019).
- 18 H. Quevedo, F. Nettel, A. Bravetti, J. of Geometry and Physics, 81, 1-9 (2014).
- 19 N. Maria Quevedo, H. Quevedo, International Journal of Management and Applied Science,3, 21-24 (2017).
- 20 N.Gushterov, A. O'Bannon, R. Rodgers, J. of High Energy Physics, 10, 76 (2018).