МРНТИ 29.05.41 https://doi.org/10.26577/RCPh.2020.v73.i2.01

В.Д. Джунушалиев[1], В. Фоломеев[2], В.В. Дядлева[1*]

[1]Казахский национальный университет им. аль-Фараби, НИИЭТФ, Казахстан, г. Алматы
[2]Институт физики им. Ж. Жеенбаева НАН Кыргызской Республики, Кыргызстан, г. Бишкек,
[*]e-mail: llxdlxdll@gmail.com.

УСЛОВИЯ ЭНЕРГОДОМИНАНТНОСТИ В ЦЕНТРЕ ТОРОИДАЛЬНОЙ T^2-ГОРЛОВИНЫ

Определены условия энергодоминантности материи, необходимые для существования тороидальной T^2 горловины. Рассмотрен центр горловины, который определен как сечение кротовой норы с минимальной площадью, и имеющий топологию T^2 2-тора. Используются условия положительности 2-ых производных некоторых компонент метрики, описывающих изменение линейных размеров метрики поперечного сечения горловины в ее центре. Получены соответствующие неравенства для плотности энергии, давления материи и метрики в центре горловины. Рассмотрены некоторые частные условия нарушения или не нарушения условий энергодоминантности для построения T^2 горловин. Были проанализированы энергетические условия, налагаемые на материю, которая образует кротовую нору: необходимы ли эти нарушения или нет. Были получены неравенства, которые описывают энергетические условия, необходимые для существования тороидальной T^2 горловины, при условии достижения минимумов всех метрических функций в точке $\chi = 0$ для всех значений угловой координаты βодновременно. Эти условия имеют сложный вид; поэтому, чтобы получить более конкретные результаты, уточняющие физическую ситуацию, были проанализировали производные неравенств в некоторых частных случаях. В одном из частных случаев было получено, что горло тороидальной T^2 горловины может существовать только при нарушении нулевого энергетического условия.

Ключевые слова: ОТО, кротовая нора, горловина, экзотическая материя, тороидальная горловина, энергетические условия, нарушение энергетических условий.

V.D. Dzhunushaliev[1], V. Folomeev[2], V.V. Dyadleva[1]

[1]Al-Farabi Kazakh National University, IETP, Kazakhstan, Almaty
[2]Zh. Zheenbayev physics institute of the NAS of the Kyrgyz Republic, Kyrgyzstan, Bishkek,
[*]e-mail: llxdlxdll@gmail.com

Energy dominance conditions in the center of toroidal T^2-wormhole

The conditions for the energy dominance of matter necessary for the existence of a toroidal-shapedT^2neck are identified. The center of the wormhole, which is defined as a section of a wormhole with a minimum area and having the topology of a T^2 2-torusis taken up. The positivity conditions of the 2nd derivatives of some components of the metric are used, which describe the change in the linear dimensions of the metric of the neck cross section at its center. The corresponding inequalities are obtained for the energy density, matter pressure and metric in the center of the neck. Some particular conditions of violation or non-violation of energy dominance conditions for constructing T^2 necks are examined. The energy conditions imposed on the matter forming the wormhole were analyzed and the need for these violations was considered.. Inequalities were obtained that describe the energy conditions necessary for the existence of a toroidal T^2 neck, provided that the minima of all metric functions at the point $\chi = 0$ are reached for all valuesof the angular coordinate β simultaneously. These conditions are complex; therefore, in order to obtain more specific results clarifying the physical situation, the derivatives of the inequalities were assessed in some special cases. In one particular case, it was found that the throat of a toroidal T^2 neck is able to exist only if there is a violation of a zero energy condition.

Key words: theory of general relativity, wormhole, filler, exotic matter, toroidal throat, energy conditions, violation of energy conditions.

В.Д. Джунушалиев[1], В. Фоломеев[2], В.В. Дядлева[1*]

[1]Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, ЭТФҒЗИ, Қазақстан, Алматы қ.
[2]Ж. Жеенбаев атындағы физика институты, Қырғызстан, Бішкек қ.
[*]e-mail: llxdlxdll@gmail.com

Тороидальды T^2 шұңқыр центріндегі энергодоминанттық шарттары

T^2 шұңқыр тороидальды болуы үшін қажетті заттардың энергетикалық үстемдігінің шарттары анықталған. Шұңқырдың ортасы қарастырылғанымен, ол минималды аумағымен қатар $T^2 2$ торусының топологиясы бар құрт шұңқырының бөлімі ретінде анықталады. Метриканың кейбір компоненттерінің екінші туындыларының позитивті шарттары қолданылады, олар оның орталығындағы мойын қимасының метрикалық сызықтық өлшемдерінің өзгеруін сипаттайды. Шұңқырдың ортасындағы энергия тығыздығы, зат қысымы және метрика үшін тиісті теңсіздіктер алынады. T^2 мойындарын орындау үшін энергияның үстемдік шарттарын бұзудың немесе бұзбаудың кейбір нақты шарттары қарастырылады. Оның құрамына кіретін материяның энергетикалық жағдайлары зерттелді: бұл бұзылулардың қажеттілігі туралы анықталған. T^2 тороидалды шұңқырдың болуы үшін қажетті энергетикалық шарттарды сипаттайтын теңсіздіктер алынған, барлық метрикалық функциялардың минимумы $\chi = 0$ нүктесінде бұрыштық координаттардың барлық мәндері үшін жеткізілген жағдайында қарастырылады. Бұл шарттар күрделі болып табылады, сондықтан физикалық жағдайды нақтылайтын дұрыс нәтижелерге қол жеткізу үшін ерекше шарттарда теңсіздіктердің туындылары талданды. Ерекше жағдайлардың бірінде, тороидальды T^2шұңқырдың жұлдыруы нөлдік энергетикалық шарттың бұзылған жағдайда ғана болудың алатындығы анықталды.

Түйін сөздер: салыстырмалылықтың жалпы теориясы, құрт шұңқыры, шұңқыр, экзотикалық материя, тороидты шұңқыр, энергетикалық шарттар, энергия жағдайларының бұзылуы.

Введение

Горловинами в общей теории относительности (ОТО) называются соответствующие решения в ОТО, соединяющие две асимптотически плоские области. История этих решений берет свое начало с получения Шварцшильдом решения, называемое теперь черной дырой, для которой существует нестатичная горловина [1, 2].

Ключевой пункт получения решений для горловин в ОТО заключается в использовании нарушений слабого и/или нулевого энергетических условий для материи, образующей горловину (при данных условиях материя начинает себя вести как экзотическая материя). Присутствие подобных нарушений дает возможность получить конфигурации с нетривиальной топологией пространства-времени – проходимые горловины. Нетривиальная топология решений для горловин, где различные области пространства-времени связаны «горловиной» (горловина – центр горловины), требует присутствия экзотической материи в ОТО.

Экзотическая материя – понятие физики элементарных частиц, описывающее любое (как правило, гипотетическое) вещество, которое нарушает одно или несколько классических условий, либо не состоит из известных барионов. Подобные вещества могут обладать такими качествами, как отрицательная плотность энергии или отталкиваться, а не притягиваться вследствие гравитации. Эзотическая материя используется в теории о строении кротовых нор. Наиболее известным представителем экзотической материи является вакуум в области с отрицательным давлением, производимым эффектом Казимира [3-11].

Получение решений в ОТО для тороидальной T^2 кротовой норы является сложной задачей, так как дифференциальные уравнения, описывающие тороидальную горловину, являются уравнениями в частных производных [12, 18].

В этой работе будут проанализированы условия, налагаемые на материю, которая образует тороидальную T^2 кротовую нору. Этими условиями являются условия положительности 2-ых производных некоторых компонент метрики, которые описывают увеличение линейных размеров (или площади) поперечного сечения горловины при удалении от центра кротовой норы.

Энергетические условия для горловины T^2 кротовой норы

Мы будем рассматривать центр горловины, который определен как сечение кротовой норы с минимальной площадью, и имеющий топологию T^2 2-тора. Мы будем искать решение уравнений Эйнштейна в тороидальных координатах.

Тороидальные координаты в плоском пространстве вводятся следующим способом:

$$x = a\frac{\sinh\alpha\cos\varphi}{\cosh\alpha - \cos\beta},$$

$$y = a\frac{\sinh\alpha\sin\varphi}{\cosh\alpha - \cos\beta},$$

$$z = a\frac{\sin\beta}{\cosh\alpha - \cos\beta},$$

где $0 \le \alpha < \infty$, $-\pi \le \beta \le \pi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$. Тор с $\alpha = 0$ – вырожденный тор, т.е. окружность. Центр тора с $\alpha = 0$ расположен на бесконечности.

В тороидальных координатах плоская метрика Минковского выглядит следующим образом

$$ds^2 = -dt^2 + \left(\frac{a}{\cosh\alpha - \cos\beta}\right)^2 \times$$
$$\times \left(d\alpha^2 + d\beta^2 + \sinh^2\alpha d\varphi^2\right), \tag{1}$$

где a – некоторый параметр.

Уравнения Эйнштейна

$$R^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\nu}R = \kappa T^{\mu}_{\nu}, \tag{2}$$

где $\kappa = 8\pi G$, а тензор энергии-импульса для макроскопической матери выбирается в виде

$$T^{\mu}_{\nu} = diag\left(\varepsilon, p_{\chi}, p_{\beta}, p_{\varphi}\right). \tag{3}$$

Для тороидальной T^2 горловины используем следующую метрику

$$ds^2 = f(\chi,\beta)dt^2 - l(\chi,\beta)d\chi^2 -$$
$$- g(\chi,\beta)d\beta^2 - \omega(\chi,\beta)d\varphi^2. \tag{4}$$

Координаты t, χ, β, φ – тороидальные координаты, которые в плоском пространстве Минковского описывают метрику (1). Координата χ в (2) связана с координатой α из (1), как $\alpha = -\ln\chi$.Для метрики (4) имеются следующие ненулевые компоненты тензора Эйнштейна:

$$\binom{\beta}{\beta}, \binom{\varphi}{\varphi}, \binom{\chi}{\chi}, \binom{\chi}{\beta}.$$

Поэтому тензор энергии-импульса материи должен иметь следующий вид

$$T^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p_{\chi} & \frac{\sigma}{l} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma}{g} & -p_{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p_{\varphi} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где ε– представляет собой энергетическую плотность материи; p_{χ}, p_{β} и p_{φ} – компоненты давления плотности, а σ– это плотность импульса потока.

Все это приводит к следующим уравнениям, описывающим тороидальную T^2горловину:

$$-\frac{\omega_{,\chi,\chi}}{\omega} - \frac{l}{g}\frac{\omega_{,\chi,\chi}}{\omega} - \frac{g_{,\chi,\chi}}{g} - \frac{l_{,\beta,\beta}}{g} + \frac{g_{,\beta}l_{,\beta}}{2g^2} + \frac{l}{2}\frac{g_{,\beta}\omega_{,\beta}}{g^2\omega} + \frac{g_{,\chi}^2}{2g^2} + \frac{g_{,\chi}l_{,\chi}}{2lg} - \frac{g_{,\chi}\omega_{,\chi}}{2g\omega} +$$
$$+\frac{l_{,\beta}^2}{2lg} - \frac{l_{,\beta}\omega_{,\beta}}{2g\omega} + \frac{l_{,\chi}\omega_{,\chi}}{2l\omega} + \frac{l}{2g}\frac{\omega_{,\chi}^2}{2\omega^2} + \frac{\omega_{,\chi}^2}{2\omega^2} = 2\kappa l\varepsilon, \tag{6}$$

$$-\frac{\omega_{,\beta,\beta}}{\omega} - \frac{f_{,\beta,\beta}}{f} + \frac{g_{,\beta}f_{,\beta}}{2gf} + \frac{g_{,\beta}\omega_{,\beta}}{2g\omega} - \frac{g_{,\chi}f_{,\chi}}{2lf} - \frac{g_{,\chi}\omega_{,\chi}}{2l\omega} + \frac{f_{,\beta}^2}{2f^2} - \frac{f_{,\beta}\omega_{,\beta}}{2f\omega} - \frac{g}{2l}\frac{f_{,\chi}\omega_{,\chi}}{f\omega} +$$
$$+\frac{\omega_{,\beta}^2}{2\omega^2} = -2\kappa g p_{\chi}, \tag{7}$$

$$\frac{f_{,\beta,\chi}}{f}+\frac{\omega_{,\beta,\chi}}{\omega}-\frac{g_{,\chi}f_{,\beta}}{2gf}-\frac{g_{,\chi}\omega_{,\beta}}{2g\omega}-\frac{l_{,\beta}f_{,\chi}}{2lf}-\frac{l_{,\beta}\omega_{,\chi}}{2l\omega}-\frac{f_{,\chi}f_{,\beta}}{2f^2}-\frac{\omega_{,\chi}\omega_{,\beta}}{2\omega^2}=2\kappa\sigma, \tag{8}$$

$$-\frac{f_{,\chi,\chi}}{f}-\frac{\omega_{,\chi,\chi}}{\omega}-\frac{l_{,\beta}f_{,\beta}}{2gf}-\frac{l_{,\beta}\omega_{,\beta}}{2g\omega}-\frac{l}{2g}\frac{f_{,\beta}\omega_{,\beta}}{f\omega}+\frac{l_{,\chi}f_{,\chi}}{2lf}+\frac{l_{,\chi}\omega_{,\chi}}{2l\omega}+\frac{f_{,\chi}^2}{2f^2}-\frac{f_{,\chi}\omega_{,\chi}}{2f\omega}+ \\ +\frac{\omega_{,\chi}^2}{2\omega^2}=-2\kappa l p_\beta, \tag{9}$$

$$-\frac{f_{,\chi,\chi}}{f}-\frac{g_{,\chi,\chi}}{g}-\frac{l}{g}\frac{f_{,\beta,\beta}}{f}-\frac{l_{,\beta,\beta}}{g}+\frac{g_{,\beta}l_{,\beta}}{2g^2}+\frac{l}{2}\frac{g_{,\beta}f_{,\beta}}{gf}+\frac{g_{,\chi}^2}{2g^2}+\frac{g_{,\chi}l_{,\chi}}{2gl}-\frac{g_{,\chi}f_{,\chi}}{2gf}+ \\ +\frac{l_{,\chi}^2}{2lg}-\frac{l_{,\beta}f_{,\beta}}{2gf}+\frac{l}{2g}\frac{f_{,\beta}^2}{f^2}+\frac{l_{,\chi}f_{,\chi}}{2lf}+\frac{f_{,\chi}^2}{2f^2}=-2\kappa l p_\varphi. \tag{10}$$

Чтобы определить энергетические условия, которые необходимо наложить на тензор энергии-импульса материи, создающий кротовую нору, запишем уравнения Эйнштейна: $\binom{t}{t}$, $\binom{\beta}{\beta}$, $\binom{\varphi}{\varphi}$ в центре горловины, т.е. при ($\chi=0$), разрешив их относительно старших производных $f_{,\chi,\chi}, g_{,\chi,\chi}, \omega_{,\chi,\chi}$.

$$(f_{,\chi,\chi})_0=\kappa f_0 l_0\left[\varepsilon_0+(p_\beta)_0+(p_\varphi)_0\right]+\frac{f_0 l_0}{2\omega_0 g_0}(\omega_{,\beta,\beta})_0-\frac{f_0 l_0}{4g_0}\frac{(\omega_{,\beta}^2)_0}{\omega_0^2}- \\ -\frac{f_0 l_0}{4g_0}\frac{(\omega_{,\beta})_0(g_{,\beta})_0}{\omega_0 g_0}-l_0\frac{(f_{,\beta})_0(\omega_{,\beta})_0}{4\omega_0 g_0}+l_0\frac{(g_{,\beta})_0(f_{,\beta})_0}{4g_0^2}- \\ -\frac{(l_{,\beta})_0(f_{,\beta})_0}{2g_0}-l_0\frac{(f_{,\beta,\beta})_0}{2g_0}+l_0\frac{(f_{,\beta}^2)_0}{4f_0 g_0}, \tag{11}$$

$$(g_{,\chi,\chi})_0=\kappa g_0 l_0\left[-\varepsilon_0+(p_\beta)_0+(p_\varphi)_0\right]-(l_{,\beta,\beta})_0-l_0\frac{(\omega_{,\beta,\beta})_0}{2\omega_0}+l_0\frac{(\omega_{,\beta}^2)_0}{4\omega_0^2}+ \\ +l_0\frac{(\omega_{,\beta})_0(g_{,\beta})_0}{4g_0\omega_0}+\frac{(g_{,\beta})_0(l_{,\beta})_0}{2g_0}+\frac{(l_{,\beta}^2)_0}{2l_0}+l_0\frac{(f_{,\beta})_0(\omega_{,\beta})_0}{4\omega_0 f_0}+ \\ +l_0\frac{(g_{,\beta})_0(f_{,\beta})_0}{4g_0 f_0}-l_0\frac{(f_{,\beta,\beta})_0}{2f_0}+l_0\frac{(f_{,\beta}^2)_0}{4f_0^2}, \tag{12}$$

$$(\omega_{,\chi,\chi})_0=\kappa\omega_0 l_0\left[-\varepsilon_0+(p_\beta)_0-(p_\varphi)_0\right]-\frac{l_0}{2g_0}(\omega_{,\beta,\beta})_0+\frac{l_0}{4g_0\omega_0}(\omega_{,\beta}^2)_0+ \\ +\frac{l_0}{4g_0^2}(\omega_{,\beta})_0(g_{,\beta})_0-\frac{(\omega_{,\beta})_0(l_{,\beta})_0}{2g_0}-\frac{l_0}{4f_0 g_0}(f_{,\beta})_0(\omega_{,\beta})_0- \\ -\frac{\omega_0 l_0}{4f_{0}g_0^2}(g_{,\beta})_0(f_{,\beta})_0+\frac{\omega_0 l_0}{2f_0 g_0}(f_{,\beta,\beta})_0-\frac{\omega_0 l_0}{4f_0^2 g_0}(f_{,\beta}^2)_0. \tag{13}$$

Мы ищем симметричные решения, что означает, что все функции четные,

$$\frac{\partial}{\partial\chi}\left[f(\chi,\beta), l(\chi,\beta), g(\chi,\beta), \omega(\chi,\beta)\right]\Big|_{\chi=0}=0.$$

Компонента $\binom{\chi}{\chi}$ в уравнении Эйнштейна будет иметь следующий вид

$$\frac{1}{2g_0}\left[\frac{(f_{,\beta,\beta})_0}{f_0}+\frac{(\omega_{,\beta,\beta})_0}{\omega_0}-\frac{(\omega_{,\beta}^2)_0}{2\omega_0^2}-\frac{(\omega_{,\beta})_0(g_{,\beta})_0}{2g_0\omega_0}\right]+ \\ +\frac{1}{2g_0}\left[\frac{(\omega_{,\beta})_0(f_{,\beta})_0}{2\omega_0 f_0}-\frac{(g_{,\beta})_0(f_{,\beta})_0}{2g_0 f_0}-\frac{(f_{,\beta}^2)_0}{2f_0^2}\right]=\kappa(p_\chi)_0. \quad (14)$$

При условии

$$\sigma_0(\beta)=\sigma(\chi=0,\beta)=0 \quad (15)$$

уравнение

$$T^{\mu}_{\nu;\mu}=0 \quad (16)$$

и компонента $\binom{\chi}{\beta}$ уравнений Эйнштейна удовлетворяются.

Уравнение (16) удовлетворяется при $\nu=t,\varphi$,и, когда $\nu=\beta$,принимает следующий вид:

$$\frac{(l_{,\beta})_0}{l_0}(p_\chi)_0+\left[\frac{(f_{,\beta})_0}{f_0}-\frac{(l_{,\beta})_0}{l_0}-\frac{(\omega_{,\beta})_0}{\omega_0}\right](p_\beta)_0-2(p_{\chi,\beta})_0-\frac{(f_{,\beta})_0}{f_0}\varepsilon_0+\frac{(\omega_{,\beta})_0}{\omega_0}(p_\varphi)_0=0. \quad (17)$$

Для существования тороидальной T^2 горловины необходимое условие существования – это либо условие минимума метрических функций $g(\chi,\beta)=g_{\beta\beta}$и $\omega(\chi,\beta)=g_{\varphi\varphi}$:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial\chi^2}|_{\chi=0}>0,\frac{\partial^2\omega}{\partial\chi^2}|_{\chi=0}>0. \quad (18)$$

Либо минимум произведения $g\times\omega$:

$$\left(\frac{1}{g}\frac{\partial^2 g}{\partial\chi^2}\right)|_{\chi=0}+\left(\frac{1}{g}\frac{\partial^2\omega}{\partial\chi^2}\right)|_{\chi=0}>0. \quad (19)$$

Из этого выражения следует условие, что площадь горловины имеет минимум, т.е $\frac{\partial(g\omega)}{\partial\chi}=0$.

Далее будут рассмотрены условия (18), которые являются более строгими, чем условия (19).

Условия (18) отвечают за увеличение поперечных размеров T^2 горловины вдоль обоих радиусов поперечного сечения горловины при удалении от центра. При удалении от центра длины окружностей $2\pi\sqrt{g}$ и $2\pi\sqrt{\omega}$ будут увеличиваться. С другой же стороны, если условие (19) выполняется, площадь поперечного сечения будет увеличиваться, но длины окружностей могут изменяться в противоположные стороны, т.е. длина одной окружности будет увеличиваться, а длина другой окружности будет уменьшаться.

Из условия (18) и уравнений (12), (13), с учетом (14), вытекают следующие условия, налагаемые на плотность энергии и давление материи, которые необходимые для создания тороидальной T^2 горловины

$$\kappa\left[\varepsilon_0+(p_\chi)_0+(p_\beta)_0-(p_\varphi)_0\right]<\frac{1}{g_0}\left[-\frac{(l_{,\beta,\beta})_0}{l_0}+\frac{(l_{,\beta}^2)_0}{2l_0^2}+\frac{(g_{,\beta})_0(l_{,\beta})_0}{2g_0 l_0}+\frac{(f_{,\beta})_0(\omega_{,\beta})_0}{2\omega_0 f_0}\right], \quad (20)$$

$$\kappa\left[\varepsilon_0+(p_\chi)_0-(p_\beta)_0+(p_\varphi)_0\right]<\frac{1}{g_0}\left[\frac{(f_{,\beta,\beta})_0}{f_0}-\frac{(f_{,\beta}^2)_0}{2f_0^2}-\frac{(g_{,\beta})_0(f_{,\beta})_0}{2g_0 f_0}-\frac{(\omega_{,\beta})_0(l_{,\beta})_0}{2\omega_0 l_0}\right]. \quad (21)$$

Тогда неравенство (19), которое описывает минимум площади центральной части горловины, можно записать в следующем виде

$$\kappa\varepsilon_0 < \frac{1}{2g_0}\left[-\frac{(l_{,\beta,\beta})_0}{l_0} - \frac{(\omega_{,\beta,\beta})_0}{\omega_0} + \frac{(\omega^2_{,\beta})_0}{2\omega_0^2} + \frac{(l^2_{,\beta})_0}{2l_0^2} + \frac{(\omega_{,\beta})_0(g_{,\beta})_0}{2\omega_0 g_0} - \frac{(\omega_{,\beta})_0(l_{,\beta})_0}{2\omega_0 l_0} + \frac{(g_{,\beta})_0(l_{,\beta})_0}{2g_0 l_0}\right]. \quad (22)$$

Анализ условий энергодоминантности для тороидальной T^2горловины

Для построения любого рода кротовых нор необходимо нарушить энергетические условия в центре горловины. Необходимы ли подобные нарушения для построения данной горловины? В данном разделе будут рассмотрены некоторые частные условия нарушения или не нарушения условий энергодоминантности для построения T^2 горловин.

Введем новые функции для удобства вычислений

$$\begin{aligned} f(\chi,\beta) &= e^{F(\chi,\beta)},\\ g(\chi,\beta) &= e^{G(\chi,\beta)},\\ l(\chi,\beta) &= e^{L(\chi,\beta)},\\ \omega(\chi,\beta) &= e^{\Omega(\chi,\beta)}. \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь будут проанализированы условия (20) и (21), которые необходимы для существования компонент метрики $g_{\beta\beta}$ и $g_{\varphi\varphi}$.

Полагая, что

$$L_{,\beta}(\chi = 0, \beta) = 0, \quad (24)$$

мы приводим неравенства (20) и (21) к более симметричному виду.Тогда в неравенствах (20) и (21) первые слагаемые в левых и правых частях одинаковы, а вторые имеют противоположные знаки.

Рассмотрим следующий частный случай, чтобы проверить выполняются ли данные неравенства: вторые слагаемые в левых и правых частях равны

$$\kappa\left[(p_\beta)_0 - (p_\varphi)_0\right] = \frac{e^{-G}}{2}\left[-(F_{,\beta,\beta})_0 - \frac{(F^2_{,\beta})_0}{2} + \frac{(F_{,\beta})_0(\Omega_{,\beta})_0}{2} + \frac{(F_{,\beta})_0(G_{,\beta})_0}{2}\right]. \quad (25)$$

Тогда неравенства (20) и (21) тождественны и имеют следующий вид

$$\kappa\varepsilon_0 < \frac{e^{-G}}{2}\left[-(\Omega_{,\beta,\beta})_0 - \frac{(\Omega^2_{,\beta})_0}{2} + \frac{(\Omega_{,\beta})_0(G_{,\beta})_0}{2}\right]. \quad (26)$$

Разрешим уравнения (14), (17) и (25) относительно давлений$(p_\chi)_0$, $(p_\beta)_0$, $(p_\varphi)_0$:

$$(p_\chi)_0 = \frac{e^{-G_0}}{2\kappa}\times$$
$$\times\left[(F_{,\beta,\beta})_0 + \frac{(F^2_{,\beta})_0}{2} + (\Omega_{,\beta,\beta})_0 + \frac{(\Omega^2_{,\beta})_0}{2} + \frac{(F_{,\beta})_0(\Omega_{,\beta})_0}{2} - -\frac{(F_{,\beta})_0(G_{,\beta})_0}{2} + \frac{(G_{,\beta})_0(\Omega_{,\beta})_0}{2}\right] \quad (27)$$

$$(p_\beta)_0 = \varepsilon_0 + 2\frac{(p_{\chi,\beta})_0}{F_{,\beta}} + \frac{e^{-G_0}}{2\kappa}\left\{-\frac{(F_{,\beta,\beta})_0(\Omega_{,\beta})_0}{(F_{,\beta})_0} + \frac{(\Omega^2_{,\beta})_0}{2} + \frac{(\Omega_{,\beta})_0}{2}\left[-(F_{,\beta})_0 + (G_{,\beta})_0\right]\right\}, \quad (28)$$

$$(p_\varphi)_0 = \varepsilon_0 + 2\frac{(p_{\chi,\beta})_0}{F_{,\beta}} + \frac{e^{-G_0}}{2\kappa}\left\{(F_{,\beta,\beta})_0\left[1 - \frac{(\Omega_{,\beta})_0}{(F_{,\beta})_0}\right] + \frac{(F^2_{,\beta})_0}{2} - \frac{(F_{,\beta})_0(G_{,\beta})_0}{2} + \frac{(\Omega^2_{,\beta})_0}{2} + \right.$$
$$\left. + \frac{(\Omega_{,\beta})_0}{2}\left[-2(F_{,\beta})_0 + (G_{,\beta})_0\right]\right\}. \quad (29)$$

Проанализируем условия энергодоминантности.

Нулевое энергетическое условие

Нулевое энергетическое условие: для любого светоподобного вектора k_μ

$$T_{\mu\nu}k^\mu K^\nu \geq 0, \tag{30}$$

или, если записать через давление p_i

$$\varepsilon_0 + p_i \geq 0, i = \chi, \beta, \varphi. \tag{31}$$

Мы имеем следующие выражения для левой части неравенста (31):

$$\varepsilon_0 + (p_\chi)_0 = \varepsilon_0 + \frac{e^{-G_0}}{2\kappa} \times$$

$$\times \left[(F_{,\beta,\beta})_0 + \frac{(F_{,\beta}^2)_0}{2} + (\Omega_{,\beta,\beta})_0 + \frac{(\Omega_{,\beta}^2)_0}{2} + \frac{(F_{,\beta})_0(\Omega_{,\beta})_0}{2} - \frac{(F_{,\beta})_0(G_{,\beta})_0}{2} - \frac{(G_{,\beta})_0(\Omega_{,\beta})_0}{2}\right]. \tag{32}$$

$$\varepsilon_0 + (p_\beta)_0 = 2\varepsilon_0 + \frac{(p_{\chi,\beta})_0}{F_{,\beta}} + \frac{e^{-G_0}}{2\kappa}\left\{-\frac{(F_{,\beta,\beta})_0(\Omega_{,\beta})_0}{(F_{,\beta})_0} + \frac{(\Omega_{,\beta}^2)_0}{2} + \frac{(\Omega_{,\beta})_0}{2}\left[-(F_{,\beta})_0 + (G_{,\beta})_0\right]\right\}, \tag{33}$$

$$\varepsilon_0 + (p_\varphi)_0 = 2\varepsilon_0 + \frac{(p_{\chi,\beta})_0}{F_{,\beta}} +$$

$$+\frac{e^{-G_0}}{2\kappa}\left\{(F_{,\beta,\beta})_0\left[1 - \frac{(\Omega_{,\beta})_0}{(F_{,\beta})_0}\right] + \frac{(F_{,\beta}^2)_0}{2} - \frac{(F_{,\beta})_0(G_{,\beta})_0}{2} + \frac{(\Omega_{,\beta}^2)_0}{2} + \frac{(\Omega_{,\beta})_0}{2}\left[-2(F_{,\beta})_0 + (G_{,\beta})_0\right]\right\}. \tag{34}$$

Слабое энергетическое условие

Слабое энергетическое условие утверждает, что для любого времениподобного вектора V_μ

$$T_{\mu\nu}V^\mu V^\nu \geq 0. \tag{35}$$

Для нашего случая мы имеем

$$\varepsilon_0 \geq 0, \tag{36}$$

$$\varepsilon_0 + p_i \geq 0, i = \chi, \beta, \varphi. \tag{37}$$

Энергетическая плотность ε_0 удовлетворяет неравенству (26) и будет положительной в том случае, если правая часть этого неравенства будет положительна на всем промежутке $-\pi \leq \beta \leq \pi$. Левая часть неравенства (37), в данном частном случае, будет иметь вид (38)-(42).

Сильное энергетическое условие

Сильное энергетическое условие утверждает, что для любого времениподобного вектора V_μ

$$\left(T_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right)V^\mu V^\nu \geq 0. \tag{38}$$

Тогда мы имеем

$$\varepsilon_0 + (p_i)_0 \geq 0, i = \chi, \beta, \varphi, \tag{39}$$

$$\varepsilon_0 + \textstyle\sum_i (p_i)_0 \geq 0. \tag{40}$$

Энергетическая плотность удовлетворяет неравенству (26) и будет положительна, если правая часть этого соотношения будет положительна на всем промежутке $-\pi \leq \beta \leq \pi$. В частном случае левая часть неравенства будет иметь следующий вид, если принять во внимание уравнения (32)-(34),

$$\varepsilon_0 + (p_\chi)_0 + (p_\beta)_0 + (p_\varphi)_0 = 3\varepsilon_0 + 4\frac{(p_{\chi,\beta})_0}{F_{,\beta}} +$$
$$+\frac{e^{-G_0}}{2\kappa}\left\{(\Omega_{,\beta,\beta})_0 + 2(F_{,\beta,\beta})_0\left[1 - \frac{(\Omega_{,\beta})_0}{(F_{,\beta})_0}\right] + \frac{3(\Omega_{,\beta}^2)_0}{2} + \frac{(\Omega_{,\beta})_0(G_{,\beta})_0}{2} - (\Omega_{,\beta})_0(F_{,\beta})_0 + (F_{,\beta})_0^2 - (F_{,\beta})_0(G_{,\beta})_0.\right\}. \quad (41)$$

В итоге мы видим, что существуют некоторые обязательные условия, которые налагаются на материю, поддерживающую горловину, чтобы тороидальная T^2 горловина существовала.

Частные случаи

Даже в случае, когда $L_{,\beta} = 0$, неравенство (26) и выражения (27)-(39) для анализа условий, налагаемых на материю, довольно громоздкие. Поэтому мы будем рассматривать некоторые частные случаи, которые позволят упростить вышеуказанные уравнения. Отметим, что все это не обеспечивает глобального существования кротовой норы. Для существования такой кротовой норы необходимо определить также асимптотические граничные условия, которые обеспечат глобальное существование такого пространства-времени.

Частный случай 1

Здесь мы будем рассматривать специальный случай, когда правая часть неравенства(26) будет положительной. Для получения положительной плотности энергии $(\varepsilon)_0 > 0$, возьмем

$$(\Omega(\beta))_0 = -\cos\beta, \quad (42)$$

$$(G(\beta))_0 = -3\cos\beta + \mathrm{log}\sin^2\beta. \quad (43)$$

Тогда неравенство (26) будет выглядеть следующим образом:

$$\kappa(\varepsilon)_0 < \frac{e^{3\cos\beta}}{2}. \quad (44)$$

Данное выражение позволяет нам выбрать плотность энергии положительной.

Выражения для давлений в этом случае выглядят следующим образом:

$$(p_\chi)_0 = \frac{e^{-G_0}}{2\kappa}\left\{(F_{,\beta,\beta})_0 + \frac{(F_{,\beta}^2)_0}{2} + (F_{,\beta})_0\left[(\Omega_{,\beta})_0 - (G_{,\beta})_0\right]\right\} - \frac{e^{3\cos\beta}}{2\kappa}, \quad (45)$$

$$(p_\beta)_0 = \varepsilon_0 + 2\frac{(p_{\chi,\beta})_0}{F_{,\beta}} + \frac{e^{-G_0}}{2\kappa}\left\{-\frac{(F_{,\beta,\beta})_0(\Omega_{,\beta})_0}{(F_{,\beta})_0} + \frac{(\Omega_{,\beta}^2)_0}{2} + \frac{(\Omega_{,\beta})_0}{2}\left[-(F_{,\beta})_0 + (G_{,\beta})_0\right]\right\}, \quad (46)$$

$$(p_\varphi)_0 = \varepsilon_0 + 2\frac{(p_{\chi,\beta})_0}{F_{,\beta}} +$$
$$+\frac{e^{-G_0}}{2\kappa}\left\{(F_{,\beta,\beta})_0\left[1 - \frac{(\Omega_{,\beta})_0}{(F_{,\beta})_0}\right] + \frac{(F_{,\beta}^2)_0}{2} - \frac{(F_{,\beta})_0(G_{,\beta})_0}{2} + \frac{(\Omega_{,\beta}^2)_0}{2} + \frac{(\Omega_{,\beta})_0}{2}\left[-2(F_{,\beta})_0 + +(G_{,\beta})_0\right]\right\}. \quad (47)$$

Частный случай 2

Рассмотрим случай, когда$L_{,\beta} = F_{,\beta} = 0$. Как видно из уравнения (25), это предполагает под собой равенство линейных давлений в центре горловины,

$$(p_\beta)_0 = (p_\varphi)_0, \quad (48)$$

Тогда, давление $(p_\chi)_0$

$$(p_\chi)_0 = \frac{e^{-G_0}}{2\kappa}\left[(\Omega_{,\beta,\beta})_0 + \frac{(\Omega_{,\beta}^2)_0}{2} + \frac{(G_{,\beta})_0(\Omega_{,\beta})_0}{2}\right]. \quad (49)$$

Сравнивая это уравнение с неравенством (26), получим следующее соотношение между плотностью энергии ε_0и давлением $(p_\chi)_0$:

$$\varepsilon_0 + (p_\chi)_0 < 0. \qquad (50)$$

Это является нарушением нулевого энергетического условия (соотношение (31)). В то же время, давления $(p_\beta)_0$ и $(p_\varphi)_0$ остаются произвольными, подчиняясь только условию (48).

Обсуждение и заключение

В данной работе мы проанализировали энергетические условия, налагаемые на материю, которая образует кротовую нору: необходимы ли эти нарушения или нет.

Мы получили неравенства, которые описывают энергетические условия, необходимые для существования тороидальной T^2 горловины, при условии достижения минимумов всех метрических функций в точке $\chi = 0$ для всех значений угловой координаты β одновременно. Эти условия являются геометрическими и они определяют требования к плотности энергии, давлениям и метрике, которые обеспечивают минимальный линейный размер поперечного сечения в центре тороидальной горловины. Физический смысл этих неравенств заключается в описании энергетических условий для материи, образующей тороидальную T^2 горловину. В данной работе были получены эти условия в общем виде. Эти условия имеют сложный вид; поэтому, чтобы получить более конкретные результаты, уточняющие физическую ситуацию, мы проанализировали производные неравенств в некоторых частных случаях. В одном из частных случаев было получено, что горло тороидальной T^2 горловины может существовать только при нарушении нулевого энергетического условия.

Литература

1 Visser M. Lorentzian wormholes: From Einstein to Hawking. – Woodbury, New York,1995. – 412 p.

2 Wormholes, Warp Drives and Energy Conditions. (Fundam. Theories of Physics (189)). By LoboF.S.N. (Ed).– Springer, 2017. – 317 p.

3 Ellis H.G. Ether flow through a drainhole – a particle model in general relativity //J. Math. Phys. – 1973. – Vol.14. – P.104-118.

4 Bronnikov K.A. Scalar-tensor theory and scalar charge //Acta Phys. Polon. B. – 1973. – Vol.4. – P.251-266.

5 Kodama T. General Relativistic Nonlinear Field: A Kink Solution in a Generalized Geometry //Phys. Rev. D. – 1978. – Vol.18. – P.3529-3534.

6 Ellis H.G. The evolving, flowlessdrainhole: A nongravitating-particle model in general relativity theory //Gen Rel.Grav. – 1979. – Vol.10. – P.105-123.

7 Morris M.S., Thorne K.S. Wormholes in space-time and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity //Am. J. Phys. – 1988. – Vol.56. – P.395-412.

8 Morris M.S., Thorne K.S., and Yurtsever U. Wormholes, Time Machines, and the Weak Energy Condition //Phys. Rev. Lett. – 1988. – Vol.61. – P.1446-1449.

9 Lobo F.S.N. Phantom energy traversable wormholes //Phys. Rev. D. – 2005. – Vol. 71. –Art#084011.

10 Hochberg D. Lorentzian wormholes in higher order gravity theories //Phys. Lett. B. – 1991 – Vol. 251, Iss.3 – P. 349-354.

11 Fukutaka H., Tanaka K. and Ghoroku K. Wormhole Solutions in Higher Derivative Gravity //Phys. Lett. B. – 1989. – Vol. 222. – P.191-194.

12 Dzhunushaliev V. Folomeev V., Kleihaus B., and Kunz J. Energy conditions for a T^2 wormhole at the center //Phys. Rev. D. – 2019 – Vol.100(8). – Art# 084008.

13 Thibeault M., Simeone C., and Eiroa E.F. Thin-shell wormholes in Einstein-Maxwell theory with a Gauss-Bonnet term //General Relativity and Gravitation. – 2006 – Vol.38. – P.1593-1608.

14 Richarte M.G. and Simeone C. Thin-shell wormholes supported by ordinary matter in Einstein-Gauss-Bonnet gravity //Phys. Rev. D. – 2007 – Vol.76. – Art#087502.

15 Lemos J.P.S. and Lobo F.S.N. Plane symmetric thin-shell wormholes: Solutions and stability //Phys. Rev. D. – 2008 – Vol. 78. – Art# 044030.

16 Rahaman, F. and Kalam, M. and Chakraborty, S. Thin shell wormholes in higher dimensional Einstein-Maxwell theory//General Relativity and Gravitation. – 2006. – Vol. 38 – P.1687-1695.

17 Hawking, S.W. The Chronology protection conjecture // Phys. Rev. D. – 1992. – Vol. 46. – P. 603-611.

18 Dzhunushaliev V., Folomeev V., Kleihaus B., and Kunz J. Thin-shell toroidal wormhole //Phys. Rev. D. – 2019 – Vol. 99. – Art# 044031.

References

1 M. Visser, Lorentzian wormholes: From Einstein to Hawking (Woodbury, New York, 1996), 412p..
2 Wormholes, Warp Drives and Energy Conditions. (Fundam. Theories of Physics (189)), By Lobo F.S.N. (Ed), (Springer, 2017), 317 p.
3 H.G. Ellis, J. Math. Phys. 14, 104 (1973).
4 K.A. Bronnikov, Acta Phys. Polon. B4, 251 (1973).
5 T. Kodama, Phys. Rev. D18, 3529 (1978).
6 H. G. Ellis, Gen. Rel. Grav. 10, 105 (1979).
7 M.S. Morris, K. S. Thorne, Am. J. Phys. 56, 395 (1988).
8 M.S. Morris, K. S. Thorne, and U. Yurtsever, Phys. Rev. Lett. 61, 1446 (1988).
9 F.S.N. Lobo, Phys. Rev. D 71, 084011 (2005).
10 D. Hochberg, Phys. Lett. B251, 349 (1990).
11 H. Fukutaka, K. Tanaka, and K. Ghoroku, Phys. Lett. B222, 191 (1989).
12 V. Dzhunushaliev, V. Folomeev, B. Kleihaus, and J. Kunz, Phys. Rev. D 100, 084008 (2019).
13 Thibeault, Marc and Simeone, Claudio and Eiroa, Ernesto F. Gen. Rel. Grav. D83,1593-1608 (2006).
14 Richarte, Martin G. and Simeone, Claudio. Phys. Rev. D76, 087502 (2007).
15 Lemos, Jose P.S. and Lobo, Francisco S.N. Phys. Rev. D78, 044030 (2008).
16 Rahaman, F. and Kalam, M. and Chakraborty, S. Gen. Rel. Grav.D38,1687-1695 (2006).
17 Hawking, S.W. Phys. Rev. D46,603-611 (1992).
18 V. Dzhunushaliev, V. Folomeev, B. Kleihaus, and J. Kunz, Phys. Rev. D 99, 044031 (2019).