

А.К. Иманбаева¹ , С.К. Турежанов^{1*} , Г.А. Сапарбекова²

¹Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Казахстан, г. Алматы, *e-mail: serikbay_t@mail.ru

²Международный казахско-турецкий университет им. Х.А. Яссауи, Казахстан, г. Туркестан

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДОВ ВЫЧИСЛЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННОЙ СИЛЫ ЧАСТИЦ ПРИ ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ЗАДАЧИ N-ТЕЛ

Одной из основных проблем современных кодов для решения задачи N-тел является их большое сходство. Непосредственным следствием этого является то, что обычный метод проверки результатов моделирования путём сравнения независимых подходов вряд ли возможен. Требование точного расчета гравитационной силы не подразумевает необходимость использовать уникального подхода. Можно использовать приблизительное вычисление гравитационных сил между N взаимодействующими частицами. Например, приближенным методом с высокой точностью является быстрый мультипольный метод (БММ), который требует только $O(N)$ операций вместо $O(N^2)$ для вычисления сил для всех N частиц. БММ группирует частицы в пространственно ограниченные ячейки и использует межклеточные взаимодействия для аппроксимации силы в любом положении в ячейке-приемнике с помощью расширения Тейлора, полученного из мультипольного расширения исходной ячейки. Используя оценку ошибок этого процесса, можно минимизировать вычисления и при этом получить относительную погрешность $N \gtrsim 10^5$. В статье проведён сравнительный анализ методов моделирования N-тел и показано, что БММ со столкновениями приближает вычисление взаимных сил между частицами и рассматриваемая задача формулируется гораздо проще, чем, например, для случая несмягченной гравитации.

Ключевые слова: приближенные вычисления, вычисление гравитационных сил, взаимодействующие ячейки, быстрый мультипольный метод, аппроксимация.

A.K. Imanbayeva¹, S.K. Turezhanov^{1*}, G.A. Saparbekova²

¹Al-Farabi Kazakh national university, Kazakhstan, Almaty, *e-mail: serikbay_t@mail.ru

²Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University, Kazakhstan, Turkestan

Comparative analysis of methods for calculating the gravitational force of particles in numerical simulation of the N-body problem

One of the main problems of modern codes for solving the N-body problem is their great similarity. The immediate consequence of this is that the usual method of checking the simulation results by comparing independent approaches is hardly possible. The requirement for accurate calculation of gravitational force does not imply the need to use a unique approach. An approximate calculation of gravitational forces between N interacting particles can be used. For example, an approximate method with high accuracy is the fast multipole method (FMM) that requires only $O(N)$ operations instead of $O(N^2)$ to calculate the forces all N particles.

FMM groups particles into spatially bounded cells and uses intercellular interactions to approximate forces at any position in the receiver cell using the Taylor extension obtained from the multipole extension of the original cell. Using the error estimate of this process it is possible to minimize the calculations while obtaining the relative errors $N \gtrsim 10^5$. The article provides a brief analysis of N-body modeling methods and shows that the FMM approximates the calculation of mutual forces between particles and the problem under consideration is formulated much easier than, for example, in the case of softened gravity.

Key words: approximate calculations, calculation of gravitational forces, interacting cells, fast multipole method, approximation.

А.К. Иманбаева¹, С.К. Төрежанов^{1*}, Г.А. Сапарбекова²¹Әл-Фараби ат. Қазақ ұлттық университеті, Қазақстан, Алматы қ., *e-mail: serikbay_t@mail.ru²Қожа Ахмет Ясауи ат. Халықаралық қазақ-түрік университеті, Қазақстан, Түркістан қ.

N-дененің есебін сандық модельдеу бөлшектердің тартылыс күшін есептеу әдістерін салыстырмалы талдау

N-денелік есепті шешудің заманауи кодтарының негізгі мәселелерінің бірі – олардың бір-біріне ұқсастығы. Мұның тікелей салдары – тәуелсіз тәсілдерді салыстыру арқылы модельдеу нәтижелерін тексерудің әдеттегі әдісін мүмкін емес. Гравитациялық күшті дәл есептеу қажеттілігі біртұтас тәсілді қолдану қажеттілігін білдірмейді. N өзара әрекеттесетін бөлшектер арасындағы гравитациялық күштердің шамаланған есебін қолдануға болады. Мысалы, барлығы N бөлшектері үшін күштерді есептеуге арналған дәлдігі жоғары жинақтау әдістердің бірі жылдам мультиполь әдісі (ЖМӨ), бұл әдіс $O(N^2)$ орнына тек $O(N)$ операцияларды қажет етеді. ЖМӨ бөлшектерді кеңістікте байланысқан жасушаларға бөледі және қабылдағыш ұяшықтағы кез-келген позициядағы күшті жуықтау үшін бастапқы жасушаның мультипольді кеңейтілуінен алынған. Тейлор кеңістігін қолдана отырып, жасушааралық өзара әрекеттесуді қолданады. Осы процестің қателіктерін есептеуді қолдана отырып, есептеулерді азайтуға және $N \geq 10^5$ қателіктерін алуға болады. Мақалада N-денені модельдеу әдістеріне қысқаша талдау жасалған және ЖМӨ бөлшектер арасындағы өзара күштерді есептеуге жақындағаны және қарастырылып отырған мәселе, мысалы, жұмсармаған гравитация жағдайында қарағанда оңайырақ тұжырымдалғаны көрсетілген.

Түйін сөздер: жуық есептеулер, гравитациялық күштерді есептеу, өзара әрекеттесетін жасушалар, жылдам мультиполь әдісі, жуықтау.

Введение

Гравитационное моделирование N-тел – широко используемый инструмент в астрофизике, с приложениями от небольшого числа систем или систем, подобных Солнечной системе и вплоть до галактических и космологических масштабов. Большинство гравитационных систем хорошо аппроксимируется ансамблем точечных масс, движущихся под их взаимным гравитационным притяжением и варьируются от планетных систем до звёздных скоплений, галактик, скоплений галактик и Вселенной в целом. Системы, в которых преобладают дальнедействующие силы, такие как гравитация, сложно рассчитывать статистическими методами: энергия невелика, канонические и микроканонические ансамбли не существуют, а теплоемкость отрицательна [1-2]. В [3] представлен обзор основных методов моделирования N-тел и астрофизический аспект, где применимы эти методы. При моделировании динамики звезд N-тел без столкновений моделью является просто представление гладкого распределения Монте-Карло в фазовом пространстве, а сила тел является только оценкой для гладкого силового поля моделируемой непрерывной системы [2]. В частности, сила N-тел неизбежно несёт погрешность оценки. Поэтому чаще всего в таких случаях используются при-

лиженные методы, такие как древовидный код Барнса и Хата (Barnes-Hutmethod (BH)) [4-5], если погрешности аппроксимации малы по сравнению с погрешностями оценки. В таком случае, постановка задачи состоит в вычислении взаимных гравитационных сил на каждом временном шаге, доминирующем над вычислительными затратами всех симуляций N-тел [6-8].

Моделирование звездной динамики с N-телами со столкновениями имеет совершенно иную природу. Так, частицы моделируют отдельные звезды, а сила N-тел не несёт погрешностей оценки. Тогда, отрицательный гравитационный потенциал, который представим в виде [9]

$$\psi(x_b) = \sum_{a \neq b} G \mu_a \psi(x_b - x_a), \quad (1)$$

где $\psi(r) = |r|^{-1}$ и его производная, ускорение должны быть вычислены с высокой точностью. Этого можно достичь прямым суммированием, когда (1) напрямую переводится в двоичный код и получаемые погрешности обусловлены точностью вычислений.

В [9] отмечено, что другое применение приближенных методов для такой модели не опробовано. Требования к такому подходу отличаются от требований к методам без столкновений N-тел в двух важных аспектах:

– отсутствует гравитационное смягчение;
 – погрешность аппроксимации должна быть намного меньше, чем в моделировании N -тел без столкновений. Это нужно для сохранения достоверности модели N -тел.

Для решения таких задач наиболее эффективным является применение метода быстрого мультипольного момента (БММ) [10, 11]. БММ значительно быстрее, чем древовидный код Денона [12, 13] при применении к неоднородным звёздным системам с низкой точностью силы, в модели динамики звёзд без столкновений. Наиболее подходящий метод для решения астрофизической задачи, в основном, зависит от конкретного контекста и, чаще всего, от масштаба времени и рассматриваемой проблемы.

Задачей данной работы является решение задачи адаптации метода быстрого мультипольного момента для большей эффективности, чем метод прямого суммирования при точных значениях силы и количестве частиц, требуемых при вычислении задач N -тел со столкновениями.

Сравнение быстрого метода мультиполей с древовидным кодом

Стандартные методы моделирования N -тел не используют тот факт, что соседние частицы будут подвергаться аналогичному ускорению от удаленных групп частиц, т.е., например, стандартный древовидный код аппроксимирует

сумму (1), сначала разделяя исходные на группы, ограниченные геометрическими ячейками, каждая из которых хорошо отделена от положения ячейки \mathbf{x}_b , а затем, вычисляя силы каждой исходной ячейки по их мультипольным моментам. Это соответствует расширению функции Грина $\psi(\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_a)$ до функции Тейлора на расстояние до соответствующего центра каждой исходной ячейки. Быстрый мультипольный момент использует эту идею и использует мультипольное расширение для вычисления силы от удаленной исходной ячейки внутри ячейки.

Суть БММ состоит в том, чтобы с помощью функции Тейлора расширить функцию Грина не только в исходных позициях \mathbf{x}_a , но также и в позициях \mathbf{x}_b . Последнее означает аппроксимацию гравитационного поля внутри каждой ячейки-поглотителя посредством её локального расширения Тейлора, относительно некоторого потенциально подходящего центра расширения \mathbf{s} . Этот подход выгоден только в том случае, если силы для большей части ячеек-поглотителей должны вычисляться одновременно.

Отношения БММ легче всего получить, используя декартовы координаты, однако для ньютоновской гравитации $\psi = |\mathbf{r}|^{-1}$ полученные соотношения неэффективны. Использование функции Грина вместо этого приводит к сферическим гармоникам. Пусть \mathbf{r} со сферическими координатами [7]

$$\Theta_n^m(\mathbf{r}) = (-1)^m \frac{(n-m)!}{r^{n+1}} P_n^m(\cos \Theta) e^{im\phi}, \quad (2)$$

$$\Upsilon_n^m(\mathbf{r}) = (-1)^m \frac{r^n}{(n+m)!} P_n^m(\cos \Theta) e^{im\phi}. \quad (3)$$

С такими определениями отношения БММ для вычисления потенциала, обусловленного всеми частицами в исходной ячейке A и в

любом положении \mathbf{x}_b в приёмной ячейке B мультиполями M_n^m , для тензоров F_n^m имеют вид [9]:

$$\Psi_{A \rightarrow B}(\mathbf{x}_b) = \sum_{n=0}^p \sum_{m=-n}^n \gamma_n^{m*}(\mathbf{s}_b - \mathbf{x}_b) F_n^m(\mathbf{s}_B) + \delta \Psi_{A \rightarrow B}, \quad (4a)$$

$$F_n^m(\mathbf{s}_b) = \sum_{k=0}^{p-n} \sum_{l=-k}^k M_k^{l*}(\mathbf{z}_A) \Theta_{n+k}^{m+l}(\mathbf{s}_B - \mathbf{z}_A), \quad (4b)$$

$$M_n^m(\mathbf{z}_A) = \sum_{a \in A} \mu_a \gamma_n^m(\mathbf{x}_a - \mathbf{z}_A), \quad (4c)$$

$$M_n^m(\mathbf{z}') = \sum_{k=0}^n \sum_{l=-k}^k \gamma_k^l(\mathbf{z} - \mathbf{z}') M_{n-k}^{m-l}(\mathbf{z}), \quad (4e)$$

$$F_n^m(\mathbf{s}') = \sum_{k=0}^{p-n} \sum_{l=-k}^k \gamma_k^{l*} (\mathbf{s} - \mathbf{s}') F_{n+k}^{m+l}(\mathbf{s}), \quad (4f)$$

$$\Psi_n^m(\mathbf{x}_b) = \sum_{k=0}^{p-n} \sum_{l=-k}^k \gamma_k^{l*} (\mathbf{s}_B - \mathbf{x}_b) F_{n+k}^{m+l}(\mathbf{s}_B) + \delta \Psi_n^m. \quad (4f)$$

$$\Psi_n^m(\mathbf{x}_b) = \sum_{k=0}^{p-n} \sum_{l=-k}^k M_k^{l*}(\mathbf{z}_A) \Theta_{n+k}^{m+l}(\mathbf{x}_b - \mathbf{z}_b) + \delta \Psi_n^m. \quad (4g)$$

Здесь p – порядок разложения, $\delta \Psi_{A \rightarrow B}$ – ошибка аппроксимированного потенциала. Уравнение (4f) вычисляет ускорения $\mathbf{a} = \nabla \Psi_0^0$ из локального выражения (4a). Уравнение (4g) определяет гравитацию, генерируемую из распределения источника с заданными мультиполями.

Код дерева, использует многополюсное разложение, но алгоритмически проще, чем БММ. Базовая структура данных представляет собой иерархическое дерево пространственных ячеек, которые либо кубические с восемью дочерними ячейками (октавное дерево), либо

кубоидальные с двумя дочерними ячейками (двоичное дерево). На первом этапе мультиполи М2Р должны быть рассчитаны для каждой ячейки из клеток их дочерних ячеек, используя ядро М2М уравнение 4d, или в случае конечных ячеек их частиц, используя ядро Р2М уравнение 4с (см. таблицу 1).

Код дерева заменяет прямое суммирование Р2Р на Р2М-М2М-М2Р (рис.1), в то время как БММ использует Р2М-М2М-М2L-L2L-L2Р.

Ядро Р2L соответствует (4b) с $z_A \rightarrow x_{ai}$ и $M_k^l \rightarrow m_a \delta_{k0}$. т.е. $F_n^m(s_b) = m_a \theta_n^m(s_b - s_a)$.

Таблица 1 – Ядра БММ

| Ядро | Смысл | Уравнение |
|------|----------------------------------------------|-----------|
| P2P | от частицы к частице | (1) |
| P2M | частица в мультиполе | (4c) |
| M2M | от мультиполя к мультиполю | (4d) |
| M2P | мультиполь к частице | (4g) |
| M2L | мультиполя к локальной экспансии | (4b) |
| L2L | локальное расширение к локальному расширению | (4e) |
| L2P | локальное расширение до частицы | (4f) |

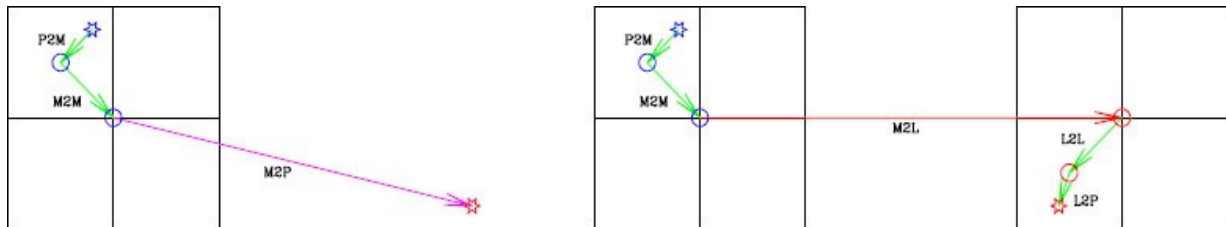


Рисунок 1 – Схематическое изображение кода дерева (слева) и БММ (справа)

Затем сила для каждой позиции стока вычисляется с использованием отдельного просмотра дерева, начиная с корневой ячейки. Сила, создаваемая ячейкой C , вычисляется с

помощью его мультипольного разложения с использованием ядра М2Р (ур.3g). Критерий приёмки по мультиполю удовлетворяется, если считается, что ячейка хорошо отделена от

положения приемника. В противном случае ячейка открывается, и сила вычисляется как сумма сил, создаваемых дочерними ячейками и при необходимости этот процесс повторяется. Таким образом, древовидный код заменяет ядро P2P прямого суммирования ядрами P2M, M2M и M2P так, как представлено на рисунке 1.

Адаптация алгоритма БММ

Адаптивный алгоритм БММ также использует древовидную структуру. Монополи M_n^m должны предварительно вычислены для каждой ячейки на первом этапе. Следующим шагом происходит аппроксимация с помощью одного двойного обхода дерева для всех положений ячеек и всеми исходными частицами [9, 13]. Этот алгоритм учитывает межклеточные взаимодействия и начинает с взаимодействия корень-корень. Если взаимодействующие ячейки хорошо разделены, то взаимодействие аппроксимируется с использованием ядра M2L (ур. 4b), которое вычисляет и накапливает тензоры локального поля $F_n^m(\mathbf{s}_b)$ для расширения силы тяжести внутри ячейки B и из-за всех источников в источнике ячейки A. При этом $A \rightarrow B$ и $B \rightarrow A$ считываются одновременно, иначе взаимодействие разделяется на отношения между дочерними между большей и меньшей из двух взаимодействующих клеток. После локальные тензоры поля передаются по дереву с использованием ядра L2L, а локальные расширения оцениваются в позициях приемника с использованием ядра L2P. Так БММ заменяет ядро M2P кода дерева на ядра M2L, L2L и L2P (рис. 1). Конечно, как в древовидном коде, так и в БММ при прямом суммировании ядро P2P используется всякий раз для взаимодействий с участием нескольких источников и приемников.

Древовидный код аппроксимирует силу от исходной частицы (голубая звезда на левой половине рисунка 1) в положении поглотителя (красная звезда), используя ядра P2M и M2M (зеленые стрелки) для вычисления мультиполей в клеточных центрах (синие круги) за которыми следует ядро M2P (розовая стрела). Ядра P2M и M2M вызываются один раз для исходной частицы и ячейки, соответственно, тогда как ядро M2P вызывается много раз для каждой позиции приемника.

БММ заменяет ядро M2P ядром M2L (красная стрелка), затем следуют ядра L2L и

L2P (зеленые стрелки). Ядра L2L и L2P вызываются всего один раз для каждой ячейки приемника и частицы, соответственно, но ядро M2L заменяет многие ядра M2P кода дерева, поскольку оно учитывает все положения в ячейке приемника.

Необходимо определить допустимую количественную меру значения для обеспечения точности, прежде чем оптимизировать этот метод.

При прямом суммировании точность ограничена только конечной точностью компьютерной арифметики. Если не используется двойная 64-битная точность, то для контроля качества используется сохранение полной энергии [14-16]. Однако, погрешность относительно энергии намного меньше, чем погрешность относительно силы, т.к. она является средней величиной по погрешностям силы. Вычисление полной энергии, необходимой для измерения погрешности, приводит к большей погрешности [15, 17].

При применении древовидного и БММ методов вычисленная потеря энергии фактически отражает среднюю амплитуду погрешности ускорения. Однако среднее значение влияния погрешности аппроксимации не отражается на точности моделирования. Например, одна большая погрешность силы не влияет на сохранение энергии, но может исказить достоверность моделирования [18-20]. Очевидно, что абсолютные ошибки не очень полезны сами по себе и должны быть нормализованы, чтобы иметь смысл. Одним из вариантов является деление δa на некоторую среднюю напряженность поля. Это имеет смысл для средней частицы, и не подходит для частиц, находящихся на окраине звездной системы, где напряженность поля ниже среднего значения $\delta a = |\mathbf{a}_{\text{числ}} - \mathbf{a}_{\text{реал}}|$. Для преодоления таких проблем естественным выбором является относительная погрешность, но она образует некоторые затруднения в центре звездной системы, где силы внешних частиц в значительной степени не учитываются. В такой ситуации \mathbf{a} может быть небольшим и, следовательно, большой относительной погрешностью, даже если каждая отдельная попарная сила была рассчитана с высокой точностью. Один из способов избежать этой проблемы, по аналогии с оценкой погрешности числовой квадратуры в случае, когда подынтегральное выражение

колеблется вокруг нуля – это нормализовать δa с помощью суммы

$$f_b = \sum_{a \neq b} \frac{G\mu_a}{|x_a - x_b|^2} \quad (5)$$

всех абсолютных значений парных ускорений. В общем случае, внешние частицы звездной системы таковы, что масштабированная ошибка приближается к относительной ошибке в центре.

Оценка ошибок при моделировании

Для оценки ошибок при моделировании N -тел со столкновениями метод прямого суммирования на основе графического процессора Sapporo [14] был применён к двум наборам $N = 10^5$ и $N = 10^6$ частицам равной массы,

взятыми случайным образом из сферы без внешнего усечения (модель Пламмера). Авторы [14] показали, что ошибка сильно зависит от достаточно малых ошибок интеграции η , тогда как зависимость от N довольно слабая. На рисунке 2 показаны результаты для $N = 32k$ и $N = 128k$.

Как и ожидалось, относительная погрешность $\sim 10^{-7}$, что сравнимо с относительной погрешностью округления в одинарной арифметической точности с плавающей запятой. И в доверок остается «четкий хвост» крупных относительных приращений. Это происходит из-за частиц с малым радиусом, ускорение которых мало, потому что парные силы с другими частицами не учитываются, а ошибки (округления) накапливаются.

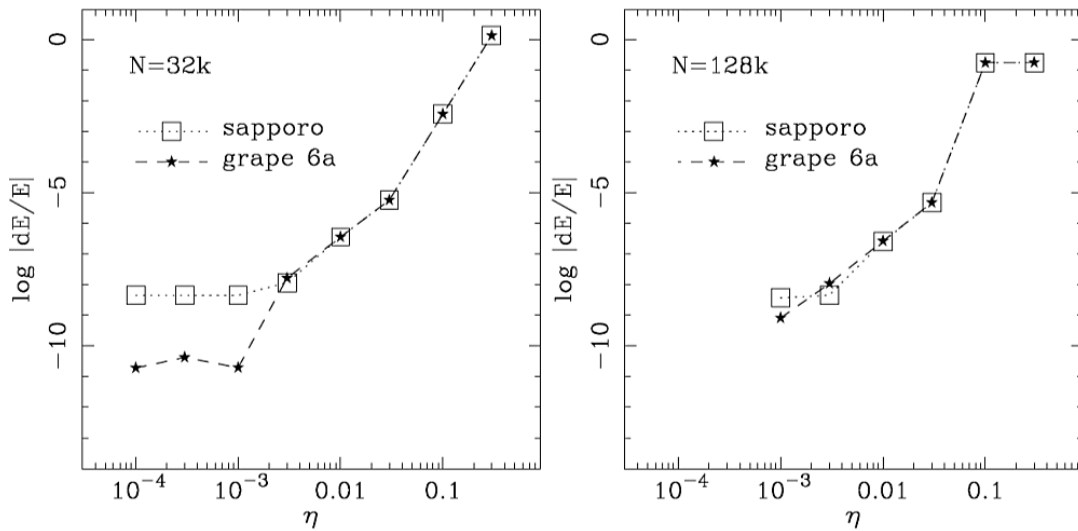


Рисунок 2 – Относительная ошибка в суммарной энергии как функция параметра точности шага по времени для модели Пламмера [14]

Таким образом, быстрый мультипольный метод (БММ) приближает вычисление взаимных сил между N частицами. Рассматриваемая математическая задача, формулируется гораздо проще, чем задачи для случая несмягченной гравитации.

Заключение

БММ использует иерархическое дерево пространственных ячеек, но в отличие от древовидного кода, использует взаимодействия ячейка-ячейка, которые учитывают все взаи-

действия между источниками и приемниками. Почти все взаимодействия между удаленными частицами «улавливаются» меньшим, чем 10^{-7} – взаимодействием между клетками, так что локальные взаимодействия, требующие вычислений $\mathcal{O}(N)$, доминируют в общей рабочей нагрузке [4]. С древовидным кодом ситуация меняется на противоположную: для удаленных взаимодействий требуется $\mathcal{O}(N)$ расчеты и доминируют в общей работе. Это подразумевает, что БММ имеет лучшее разрешение в отличие от удаленных взаимодействий, тем самым делая БММ идеально подходящим

для приложений на суперкомпьютерах, где связь с удаленными взаимодействиями более дорогостоящая, чем производимые вычисления.

В большинстве случаев традиционно используется простой критерий приемлемости мультиполя, основанный на угле раскрытия, и

центры клеток были равны либо геометрическому центру клетки, либо её центру масс, которые, были введены для упрощения вычислений, неизбежно приводят к большим относительным погрешностям силы с расхождением, достигающих ~ 1000 раз медианы.

Литература

- 1 Binney J.J., Tremaine S. Galactic dynamics. 2nd ed. – Princeton University Press, Princeton, 2008. – 920 p.
- 2 Dehnen W., Read J.I. N -Body simulations of gravitational dynamics //Eur. Phys. J. Plus. – 2011. – Vol.126. – Article ID 55.
- 3 Trenti M., Hut P. Gravitational N-body Simulations //arXiv:0806.3950v1 [astro-ph] 24 Jun 2008. – 13 p.
- 4 Barnes J., Hut P. A hierarchical O (N log N) force-calculation algorithm //Nature. – 1986. – Vol. 324. – P.446–449.
- 5 Barnes J.E. A modified tree code: don't laugh; it runs //Journal of Computational Physics. – 1990. – Vol.87, № 1. – P.161-170.
- 6 Вшиков В.А., Малышкин В.Э., Снытников А.В., Снытников В.Н. Численное моделирование гравитационной динамики многих тел методом частиц в ячейках: параллельная реализация //Сибирский журнал вычислительной математики. – 2003. – Том 6. – С.144-157.
- 7 Sasaki T., and Hosono N. Particle Number Dependence of the N-body Simulations of Moon Formation //The Astrophysical Journal. – 2018. – Vol. 856, N 2. – P.175.
- 8 Zhang T., Liao S., Li M., Gao L. The optimal gravitational softening length for cosmological N-body simulations //Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 2019. – Vol.487, Iss 1. – P.1227–1232.
- 9 Dehnen W. A fast multipole method for stellar dynamics //Computational Astrophysics and Cosmology. – 2014. – Vol.1. – Article No 1.
- 10 Greengard L., Rokhlin V. A fast algorithm for particle simulations. //J. Comput. Phys. – 1987. – Vol.73. – P.325–348.
- 11 Cheng H., Greengard L., Rokhlin V. A fast adaptive multipole algorithm in three dimensions //J. Comput. Phys. – 1999. – Vol.155. – P.468–498.
- 12 Dehnen W. A very fast and momentum-conserving tree code. //Astrophys. J. – 2000. – Vol.536. – L39-L42.
- 13 Dehnen W. A hierarchical O(NlogN) force calculation algorithm. //J. Comput. Phys. – 2002. – Vol.179. – P.27–42.
- 14 Gaburov E., Harfst S., PortegiesZwart S. SAPPORO: a way to turn your graphics cards into a GRAPE-6. // New Astron. – 2009. – Vol.14(7). – P.630–637.
- 15 Henden N.A., Puchwein E., Shen S., Sijacki D. The FABLE simulations: a feedback model for galaxies, groups, and clusters //MNRAS. – 2018. – Vol. 479. – P.5385-5412.
- 16 Nyland L., Harris M., Prins J. N-body simulations on a GPU //In: ACM Workshop on General-Purpose Computing on Graphics Processors. – 2004. – P.C37.
- 17 Anderson J.A., Lorenz C.D., Travesset A. General purpose molecular dynamics simulations fully implemented on graphics processing units //Journal of Computational Physics. – 2008. – Vol. 227 (10). – P.5342–5359.
- 18 Gualandris A., PortegiesZwart S., Tirado-Ramos A. Performance analysis of direct n-body algorithms for astrophysical simulations on distributed systems. //Parallel Computing. – 2007. – Vol.33 (3). – P.159–173.
- 19 Harfst S., Gualandris A., Merritt D., Spurzem R., PortegiesZwart S., Berczik P. Performance analysis of direct N-body algorithms on special-purpose supercomputers //New Astronomy. – Jul. 2007. – Vol.12. – P.357–377.
- 20 Harfst S., Gualandris A., Merritt D., Mikkola S. A hybrid N-body code incorporating algorithmic regularization and post-Newtonian forces //MNRAS. – Sep. 2008. – Vol.389. – P.2-12.

References

- 1 J.J. Binney, and S. Tremaine, Galactic dynamics. 2nd ed. (Princeton University Press, Princeton, 2008), 920 p.
- 2 W. Dehnen, J.I. Read, Eur. Phys. J. Plus., 126, Article ID 55 (2011).
- 3 M. Trenti, and P. Hut, arXiv:0806.3950v1 [astro-ph], 13, 24 Jun (2008).
- 4 J. Barnes, and P. Hut, Nature, 324, 446–449 (1986).
- 5 J.E. Barnes, J of Computational Physics, 87 (1), 161-170 (1990).
- 6 V.A. Vshikov, V.E. Malyshkin, A.V. Snytnikov, V.N. Snytnikov, Sibirskiyzhurnalvychislitel'noymatematiki, 6, 144-157 (2003). (in Russ)
- 7 T. Sasaki, and N. Hosono, The Astrophysical Journal, 856 (2), 175 (2018).
- 8 T. Zhang, S. Liao, M. Li, and L. Gao, MNRAS, 487 (1), P.1227–1232 (2019).

- 9 W. Dehnen, *Computational Astrophysics and Cosmology*, 1, Article No 1 (2014).
- 10 L. Greengard, and V. Rokhlin, *J. Comput. Phys.*, 73, 325–348 (1987).
- 11 H. Cheng, L. Greengard, and V. Rokhlin, *J. Comput. Phys.*, 155, 468–498 (1999).
- 12 W. Dehnen, *Astrophys. J.*, 536, L39-L42 (2000).
- 13 W. Dehnen, *J. Comput. Phys.*, 179, 27-42 (2002).
- 14 E. Gaburov, S. Harfst, and S. PortegiesZwart, *New Astron.*, 14(7), 630–637 (2009).
- 15 N.A. Henden, E. Puchwein, S. Shen, and D. Sijacki, *MNRAS*, 479, 5385-5412 (2018).
- 16 L. Nyland, M. Harris, and J. Prins, N-body simulations on a GPU, In: *ACM Workshop on General-Purpose Computing on Graphics Processors*, C37 (2004).
- 17 J.A. Anderson, C.D. Lorenz, and A. Travasset, *J of Computational Physics*, 227 (10), 5342 –5359 (2008).
- 18 A. Gualandris, S. PortegiesZwart, and A. Tirado-Ramos, *Parallel Computing*, 33 (3), 159–173 (2007).
- 19 S. Harfst, A. Gualandris, D. Merritt, R. Spurzem, S. PortegiesZwart, and P. Berczik, *New Astronomy*, 12, 357–377 (2007).
- 20 S. Harfst, A. Gualandris, D. Merritt, and S. Mikkola, *MNRAS*, 389, 2-12 (2008).