


Д.М. Зазулин^{1,2} , С.Е. Кемелжанова^{1*} ,И. Сатышев³, О. Ормантаев¹ ¹Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Казахстан, г. Алматы²Институт ядерной физики, Казахстан, г. Алматы³Алматинский институт ядерной физики, Казахстан, г. Алматы

*e-mail: kemelzhanova.sandugash@gmail.com

ПРИМЕНЕНИЕ ГЕОМЕТРОТЕРМОДИНАМИКИ К ДВУМЕРНЫМ СИСТЕМАМ: ИДЕАЛЬНОМУ БОЗЕ-ГАЗУ И СИСТЕМЕ С СИЛЬНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Методом геометротермодинамики в настоящей работе исследованы свойства равновесных многообразий следующих термодинамических систем: двумерного идеального Бозе-газа и системы Березинского-Костерлица-Таулеса. Получены результаты инвариантные относительно преобразований Лежандра, т.е. независимые от выбора термодинамического потенциала. Для рассматриваемых систем рассчитаны соответствующие метрики и скалярные кривизны, а также описаны их свойства. Изучение двумерных квантовых термодинамических систем в настоящее время является актуальным. Достаточно упомянуть, что к таким системам относятся, например, топологические изоляторы, графен, системы с квантовым эффектом Холла и т.д. Двумерные квантовые системы могут иметь статистическое распределение, отличное от распределений Ферми-Дирака и Бозе-Эйнштейна. Геометрические подходы в изучении этих термодинамических систем, безусловно, открывают новые перспективы.

В настоящей работе с помощью геометротермодинамики было проведено исследование термодинамических свойств идеального двумерного Бозе-газа и системы Березинского-Костерлица-Таулеса. Основной целью было воспроизведение конденсации Бозе-Эйнштейна для первой системы и поиск возможных новых фазовых переходов для второй. Для изучения вышеназванных термодинамических систем мы вычисляли последовательно ковариантные метрические тензоры соответствующих равновесных многообразий, их детерминанты, далее контравариантные метрические тензоры, символы Кристоффеля, тензоры кривизны и соответствующие скалярные кривизны.

Используя термодинамический потенциал нами были получены (с помощью системы MatLab) соответствующие геометрические величины в широком диапазоне температуры и площади. Для каждой геометрической величины также были получены явные формулы, но ввиду громоздкости в настоящей работе мы их не приводим. Примеры вычисленных скалярных кривизн для некоторого диапазона параметров T и S показаны на рисунках. Из рисунков также видно, что несмотря на существенно различное поведение кривизн в зависимости от параметров T и S обе метрики приводят к одному общему результату относительно расположения сингулярностей для соответствующих кривизн.

Ключевые слова: геометротермодинамика, преобразования Лежандра, метрический тензор, скалярная кривизна, двумерный Бозе-газ, система Березинского-Костерлица-Таулеса.

D.M. Zazulin^{1,2}, S.E. Kemelzhanova^{1*}, I. Satyshev³, O. Ormantaev¹¹Al-Farabi Kazakh National University, Physics and Technology Department, Kazakhstan, Almaty²Institute of Nuclear Physics, Kazakhstan, Almaty³Imaty Institute of Nuclear Physics, Kazakhstan, Almaty

*e-mail: kemelzhanova.sandugash@gmail.com

Application of geometrothermodynamics to the two-dimensional systems: ideal bose-gas and system with strong interaction

In the framework of the method of geometrothermodynamics we studied the properties of equilibrium manifolds of the following thermodynamic systems: a two-dimensional Bose gas, a Berezinsky-Kosterlitz-Thouless system. The results are invariant under the Legendre transformations, i.e. independent of the choice of thermodynamic potential. For the systems under consideration, the corresponding metrics and scalar curvatures are calculated, and their properties are also described. Research of two-dimensional quantum thermodynamic systems is becoming more urgent. It is

sufficiently to mention that such systems are related to, for example, topological insulators, graphene, systems with quantum Hall effect, etc. Two-dimensional quantum systems may have a statistical distribution different from distributions of Fermi-Dirac and Bose-Einstein. Geometric approaches in research of these thermodynamic systems certainly open the new perspective. In this paper, the thermodynamic properties of two-dimensional Bose-Gas and Berezinsky-Kosterlitz-Thouless system have been studied with the help of geometrothermodynamics. The main objective was to reproduce the Bose-Einstein condensation for the first system and find possible new phase transitions for the second.

In order to study the above mentioned thermodynamic systems, we have consequently calculated the covariant metric tensors of corresponding equilibrium manifolds and their determinants, then counter-variant metric tensors, Christoffel symbols, curvature tensors and corresponding scalar curvatures. Using the thermodynamic potential, we obtained (using the MatLab system) the corresponding geometric values in a wide range of temperature and area.

Explicit formulas were also obtained for each geometric quantity but due to their bulkiness we do not present them in this paper. Examples of calculated scalar curvatures for a certain range of parameters T and S are shown in the figures. The figures also show that despite the significantly different behavior of the curvatures depending on the parameters T and S , both metrics lead to the same General result regarding the location of singularities for the corresponding curvatures.

Key words: geometrothermodynamics, Legendre transformations, metric tensor, scalar curvature, two-dimensional Bose gas, Berezinsky-Kosterlitz-Thouless system.

Д.М. Зазулин^{1,2}, С.Е. Кемелжанова^{1*}, И. Сатышев³, О. Ормантаев¹

¹Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Қазақстан, Алматы қ.

²Ядролық физика институты, Қазақстан, Алматы қ.

³Алматы ядролық физика институты, Қазақстан, Алматы қ.

*e-mail: kemelzhanova.sandugash@gmail.com

Геометротермодинамика әдісін идеалды бозе газ және күшті өзара әсерлесу жүйесіне қолдану

Бұл жұмыста Березин-Костерлиц-Таулес жүйесі бойынша және екі өлшемді идеалды Бозе-газ термодинамикалық жүйесі бойынша тепе-теңдіктің көптүрлілік қасиеті геометротермодинамика әдісімен зерттелді. Термодинамикалық потенциалды есепке алмай Лежандр түрлендірулеріне қатысты инвариантты нәтижелер алынды. Қарастырып отырған жүйелер үшін сәйкес өлшемдер мен скалярлық қисықтық есептелінді және олардың қасиеттері сипатталынды. Екі өлшемді кванттық термодинамикалық жүйелерді зерттеу қазіргі кезде өзекті болып отыр. Мұндай жүйелерге мысалы, топологиялық оқшаулағыштар, графен, Холлдың кванттық эффектсі бар жүйелер және т.б. жүйелер жатады. Бозе-Эйнштейн және Ферми Дирак үлестірулерінен өзгеше екі өлшемді кванттық жүйеде статистикалық үлестірулер болуы мүмкін. Осы термодинамикалық жүйелерді геометротермодинамика әдісі арқылы зерттеу барысында жаңа нәтижелер алынды.

Зерттеу барысында біз геометротермодинамиканы қолдана отырып, екі өлшемді идеалды Бозе газының және Березин-Костерлиц-Таулес жүйесінің термодинамикалық қасиеттерін қарастырдық. Зерттеу барысындағы негізгі мақсатымыз – бірінші кезең үшін Бозе-Эйнштейн конденсациясын көбейту және екінші кезең үшін мүмкін болатын жаңа фазалық ауысуларды іздеу. Жоғарыда аталған термодинамикалық жүйелерді зерттеу үшін біз сәйкес тепе-теңдіктің көптүрлілігіне қатысты ковариантты метрикалық тензорды, детерминанттарын, Кристоффел символын, қисықтық тензоры және сәйкес скалярлық қисықтықты есептедік.

Термодинамикалық потенциалды пайдаланып, температура мен ауданның кең аумағына сәйкес геометриялық шамаларды MatLab жүйесін қолдана отырып есептедік. Әрбір геометриялық шамалар үшін нақты формулалар алынды. T және S параметрлерінің белгілі бір диапазонына есептелген скалярлық қисықтардың мысалдары суретте көрсетілді. Суреттен T және S параметрлеріне байланысты қисықтардың әртүрлі болуына қарамастан екі метрикаға сәйкес қисықтар үшін сингулярлардың орналасуына қатысты жалпы ортақ нәтиже беретінін көруге болады.

Түйін сөздер: геометротермодинамика, Лежандр түрлендірулері, метрикалық тензор, скалярлық қисық, екі өлшемді Бозе-газ, Березин-Костерлиц-Таулес жүйесі.

Введение

Взаимодействия в термодинамических системах в геометротермодинамике (ГТД), разработанной Э. Кеведо (и подробно описанной им и

его соавторами, например, в работах [1-8]) определяются с помощью скалярной кривизны равновесного многообразия. Эта кривизна, в свою очередь инвариантна относительно преобразований Лежандра. В термодинамике физические

свойства системы тоже не зависят от выбора термодинамических потенциалов, с помощью которых эта система описывается. Переход от одного набора термодинамических потенциалов к другому осуществляется при помощи преобразований Лежандра, и в этом смысле термодинамика инвариантна относительно преобразований Лежандра. В ГТД, например, как это было показано в [1], идеальный газ, частицы которого не взаимодействуют друг с другом, соответствует многообразию с нулевой кривизной. В случае взаимодействующих систем с нетривиальной структурой фазовых переходов, кривизна, как это показано в [2-5] воспроизводит поведение системы вблизи точек, где происходят фазовые переходы. Так, например, вблизи фазовых переходов в газах Ван-дер-Ваальса, Бозе – Эйнштейна и т.д., скалярная кривизна соответствующих равновесных многообразий стремится к бесконечности, т.е. становится сингулярной. Это обстоятельство можно использовать для поисков неизвестных фазовых переходов в малоизученных термодинамических системах.

Изучение двумерных квантовых термодинамических систем в настоящее время является актуальным. Достаточно упомянуть, что к таким системам относятся, например, топологические изоляторы, графен, системы с квантовым эффектом Холла и т.д. Двумерные квантовые системы могут иметь статистическое распределение, отличное от распределений Ферми-Дирака и Бозе-Эйнштейна. Геометрические подходы в изучении этих термодинамических систем, безусловно, открывают новые перспективы.

В настоящей работе с помощью ГТД было проведено исследование термодинамических свойств идеального двумерного Бозе-газа и системы Березинского-Костерлица-Таулеса (БКТ). Основной целью было воспроизведение конденсации Бозе-Эйнштейна для первой системы и поиск возможных новых фазовых переходов для второй.

Методы исследования

Формализм метода ГТД

Для изучения вышеназванных термодинамических систем мы вычисляли последовательно ковариантные метрические тензоры соответствующих равновесных многообразий, их детерминанты, далее контравариантные метрические тензоры, символы Кристоффеля, тензоры кривизны и соответствующие скалярные кривизны.

В качестве формул для вычисления метрик и соответствующих метрических тензоров мы использовали [1]:

$$dl^2 = E_a \frac{\partial \Phi}{\partial E^a} \delta_{ab} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial E^b \partial E^c} dE^a E^c, \quad (1)$$

$$dl^2 = E_a \frac{\partial \Phi}{\partial E^a} \eta_{ab} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial E^b \partial E^c} dE^a E^c, \quad (2)$$

где l^2 – квадрат термодинамической длины, $\Phi \equiv \Phi(E^a)$ – термодинамический потенциал, который явно зависит от других термодинамических потенциалов – E^a ($a = 1, \dots, n$), n – количество термодинамических потенциалов, от которых зависит Φ , $\delta_{ab} = \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$ и $\eta_{ab} = \text{diag}(1, -1, \dots, -1)$. Оба соотношения (1) и (2) инвариантны относительно преобразований Лежандра [1].

Выражение для тензора кривизны имеет обычный вид:

$$R_{abcd} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{ad}}{\partial E^b \partial E^c} + \frac{\partial^2 g_{bc}}{\partial E^a \partial E^d} - \frac{\partial^2 g_{ac}}{\partial E^b \partial E^d} - \frac{\partial^2 g_{bd}}{\partial E^a \partial E^c} \right) + g_{np} \left(\Gamma_{bc}^n \Gamma_{ad}^p - \Gamma_{bd}^n \Gamma_{ac}^p \right) \quad (3)$$

где g^{nm} (g_{ad}) – метрический тензор, $\Gamma_{bc}^n = \frac{1}{2} g^{nm} \left(\frac{\partial g_{mb}}{\partial E^c} + \frac{\partial g_{mc}}{\partial E^b} - \frac{\partial g_{bc}}{\partial E^m} \right)$ – символы Кристоффеля. Далее, скалярная кривизна вычисляется по формуле: $R = g^{ac} g^{bd} R_{abcd}$.

Поскольку в дальнейшем мы будем иметь дело с системами, зависящими только от двух термодинамических потенциалов, то выражение для скалярной кривизны упрощается до:

$$R = \frac{2P_{1212}}{\det(g)}, \quad (4)$$

где $\det(g)$ – детерминант двумерного метрического тензора.

Двумерный идеальный Бозе-газ

Рассмотрим сначала хорошо известную систему – двумерный, идеальный Бозе-газ частиц с массой m . В качестве термодинамического потенциала возьмем химический потенциал μ , зависящий от температуры T и площади S (двумерный объем) и с фиксированным числом частиц N (см., например, [9]):

$$\mu(T, S) = T \ln \left(1 - e^{-\frac{2\pi\hbar^2 N}{SmT}} \right). \quad (5)$$

Примем, для упрощения формулы, константу $\frac{2\pi\hbar^2 N}{m}$ за единицу перепишем выражение (5) в виде:

$$\mu(T, S) = T \ln \left(1 - e^{-\frac{1}{ST}} \right). \quad (6)$$

На рисунке 1 представлен график (6) для некоторого диапазона параметров T и S . Используя (1-4) и термодинамический потенциал (6) нами были получены (с помощью системы Matlab) соответствующие геометрические величины в широком диапазоне температуры и площади. Для

каждой геометрической величины также были получены явные формулы но ввиду громоздкости в настоящей работе мы их не приводим. Примеры вычисленных скалярных кривизн для некоторого диапазона параметров T и S показаны на рисунках 2а и 2б для метрик (1) и (2) соответственно.

Из вычислений и из рисунка 2а и (2б) видно, что кривизна стремится к плюс (минус) бесконечностям при стремлении к нулю температуры при конечном значении параметра площади, что как раз и соответствует Бозе конденсации для двумерного идеального Бозе-газа (см. например [10]). Также из этих вычислений и рисунка 2а и (2б) видно, что кривизна стремится к плюс (минус) бесконечностям при стремлении к бесконечности плотности при конечном значении температуры. При больших значениях параметров T и S кривизны близки к нулю – это соответствует классическому идеальному газу.

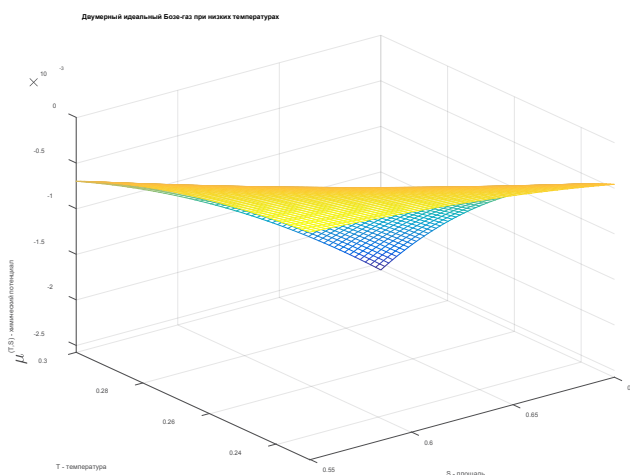
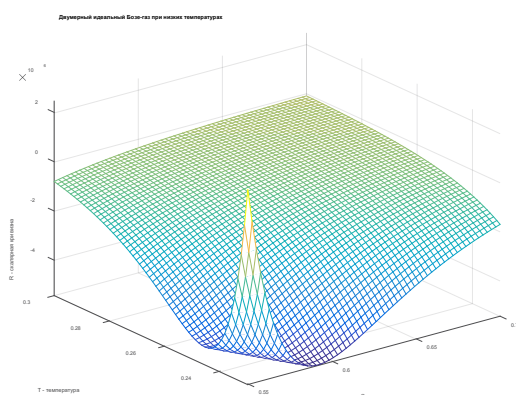
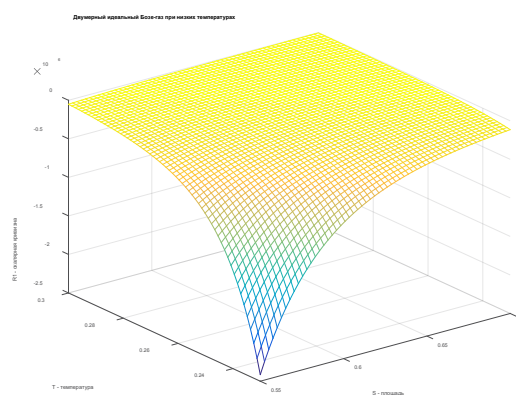


Рисунок 1 – Химический потенциал (6) в зависимости от температуры и площади двумерного идеального Бозе-газа при низких температурах [9]



а



б

Рисунок 2 – Зависимость скалярной кривизны от температуры и площади:
а) – метрика вычислялась по формуле (1), б) – метрика вычислялась по формуле (2).

Из рисунков 2а и 2б также видно, что несмотря на существенно различное поведение кривизн в зависимости от параметров T и S обе метрики (1) и (2) приводят к одному общему результату относительно расположения сингулярностей для соответствующих кривизн.

Система БКТ

Далее мы применили ГТД для системы БКТ (см. например [11-15]). Это двумерная система Бозе – частиц с сильным взаимодействием (сильным в том смысле что вклад в термодинамику системы вносят топологические дефекты – точечные вихри) со сложной, до конца не изученной системой фазовых переходов [16-20].

Рассмотрим в качестве термодинамического потенциала свободную энергию [20]:

$$F(T, L) = (J\pi - 2k_B T) \ln\left(\frac{L}{a}\right), \quad (7)$$

где T – температура, L – размер системы, a – размер вихря, k_B – постоянная Больцмана, J – некоторая константа. Формула (7) имеет смысл при $L > a$, и вблизи перехода БКТ при $T = T_c = \frac{J\pi}{2k_B}$ когда появление свободного вихря становится энергетически выгодно. При меньших температурах в системе имеется связанная пара вихрь-антивихрь, а сам фазовый переход интерпретируется как процесс диссоциации этой пары.

Положим для упрощения последующих вычислений $J\pi = k_B = a = 1$. Тогда

$$F(T, L) = (1 - 2T) \ln(L). \quad (8)$$

На рисунке 3 представлен график (8) для некоторого диапазона параметров T и L . Применяя к выражению (8) формулу для метрики (1) получим метрический тензор:

$$g(T, L) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2(T + T \ln(L) - 0.5)}{L} \\ \frac{2(T + T \ln(L) - 0.5)}{L} & -\frac{(2T - 1)^2}{L^2} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Далее детерминант этого тензора:

$$\det(g) = -\frac{4(T + T \ln(L) - 0.5)^2}{L^2}. \quad (10)$$

И скалярная кривизна (4):

$$R = \frac{L^2 \left(\frac{4(\ln(L) + 1)}{L^2} - \frac{12}{L^2} + \frac{(\ln(L) + 1) \left(\frac{8T - 4}{L^2} - \frac{T + T \ln(L) - 0.5}{L^2} + \frac{T}{L^2} \right)}{4(T + T \ln(L) - 0.5)} \right)}{4(T + T \ln(L) - 0.5)^2}. \quad (11)$$

Применяя же к выражению (6) формулу для метрики (2) получим:

$$g_1(T, L) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2(T \ln(L) - T + 0.5)}{L} \\ \frac{2(T \ln(L) - T + 0.5)}{L} & \frac{(2T - 1)^2}{L^2} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Детерминант этого тензора:

$$\det(g_1) = -\frac{4(T \ln(L) - T + 0.5)^2}{L^2}. \quad (13)$$

И скалярная кривизна:

$$R_1 = \frac{L^2 \left(\frac{4(\ln(L) - 1)}{L^2} + \frac{4}{L^2} - \frac{(\ln(L) - 1) \left(\frac{8T - 4}{L^2} - \frac{T - T \ln(L) - 0.5}{L^2} - \frac{T}{L^2} \right)}{4(T + T \ln(L) - 0.5)} \right)}{4(T \ln(L) - T + 0.5)^2}. \quad (14)$$

Примеры вычисленных скалярных кривизн показаны на рисунках 4а и 4б для метрик (1) и (2) соответственно для некоторого диапазона параметров T и L.

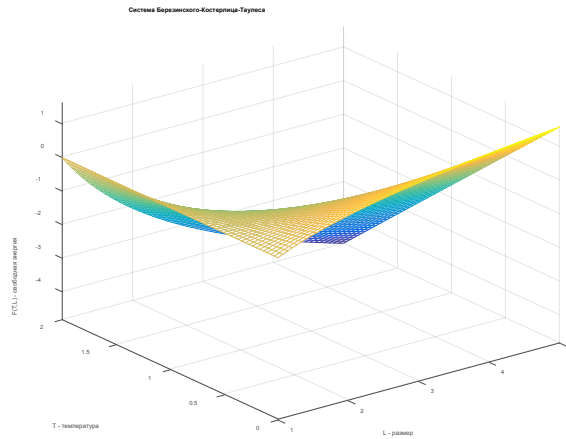


Рисунок 3 – Свободная энергия (8) в зависимости от температуры и размера системы [20].

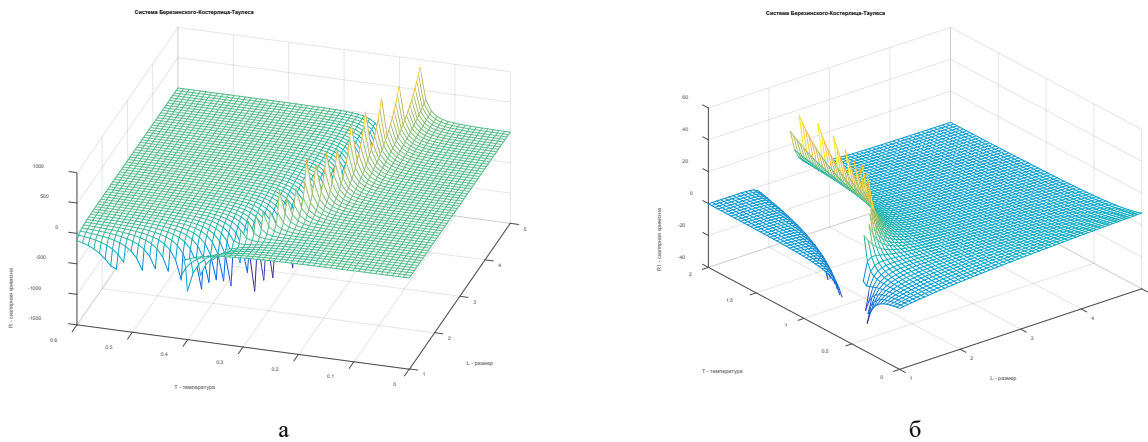


Рисунок 4 – Зависимость скалярной кривизны от температуры и размера системы: а) – метрика вычислялась по формуле (1), б) – метрика вычислялась по формуле (2).

Из формул (11) и (14), а также из рисунков 4а и 4б видно, что скалярные кривизны для метрик (1) и (2) становятся сингулярными при $T_1(L) = \frac{1}{2(1+\ln(L))}$ и $T_2(L) = \frac{1}{2(1-\ln(L))}$ соответственно. При этих значениях параметров T и L ГТД предсказывает возможные фазовые переходы. Причем если использовать метрику (1) то фазовый переход расположен ниже перехода БКТ (в представленных единицах $T_c = \frac{1}{2}$), а если использовать (2) то выше. При больших значениях параметра T кривизны, а значит и интенсивность взаимодействия между частицами системы (как для метрики (1), так и для (2)) близки к нулю.

Заключение

Используя метод ГТД, в настоящей работе для равновесных многообразий двумерных квантовых систем, вычислены метрические тензоры и скалярные кривизны.

Рассмотрены идеальный двумерный Бозе-газ с конечным числом частиц и система БКТ. В качестве термодинамических потенциалов для этих термодинамических систем брались, соответственно, химический потенциал, зависящий от температуры и площади и Свободная энергия, зависящая от температуры и размера системы.

В работе также приведены 3-мерные рисунки, на которых хорошо видно, при каких значениях термодинамических переменных скалярные кривизны стремятся к бесконечности или к нулю, что указывает на возможные фазовые переходы и на возможную компенсацию взаимодействий квантовыми эффектами соответственно.

Показано, что оба варианта метрик (1) и (2) для идеального двумерного Бозе-газа приводят к одному и тому же расположению линий, где скалярные кривизны становятся сингулярными. Это расположение линий согласуется с областью, в которой происходит фазовый переход – Бозе конденсация в двумерном Бозе-газе. Также показано, что при больших значениях параметров температуры и площади кривизны близки к нулю и это соответствует классическому идеальному двумерному газу.

При рассмотрении системы БКТ методом ГТД были обнаружены возможные новые фазовые переходы (расчеты по метрикам (1) и (2) соответственно). Расчет по метрике (1) приводит к возможному фазовому переходу расположенному ниже перехода БКТ, а расчет по (2) приводит к возможному фазовому переходу расположенному выше. При больших значениях температуры кривизны, а значит и взаимодействия между частицами системы (как для метрики (1), так и для (2)) малы.

Литература

- 1 Quevedo H. Geometrothermodynamics // J. Math. Phys. – 2007. – Vol. 48. – P.013506.
- 2 Quevedo H., Sanchez A., Taj S., Vazquez A. Phase transitions in Geometrothermodynamics // Gen. Rel. Grav. – Vol. 43. – 2011. – P. 1153-1165.
- 3 Quevedo H., Sasha A., Zaldivar. A geometrothermodynamic approach to ideal quantum gases and Bose-Einstein condensates // J. General Relativity and Quantum Cosmology. arXiv:1512.08755v3. – 2015.
- 4 Quevedo H., Ramirez A. A geometric approach to the thermodynamics of the van der Waals system // arXiv:1205.3544. – 2012.
- 5 Bravetti, D., Momeni R., Myrzakulov R. and Quevedo H. Geometrothermodynamics of higher dimensional black holes // arXiv:1211.7134.-2013.
- 6 Quevedo H., Sánchez A., Vázquez A. Relativistic like structure of classical thermodynamics // Gen. Rel. Grav. – 2015. – Vol. 47. – Art. 36, 18 p.
- 7 Quevedo H., Nettel F., Cesar S. Lopez-Monsalvo, Bravetti A. Representation invariant Geometrothermodynamics: applications to ordinary thermodynamic systems // J.Geom.Phys. – 2014. – Vol.81. – P. 1-9.
- 8 Vazquez A., Quevedo H., Sanchez A. Thermodynamic systems as extremal hypersurfaces // J. Geom. Phys. – 2010. – Vol. 60. – P.1942-1949.
- 9 https://mipt.ru/education/chair/theoretical_physics/php. Горелкин В.Н. Лекции по статистической физике. – 2010.
- 10 Lifshitz E.M., Pitaevskii L.P. Statistical Physics: Theory of the Condensed State. – Elsevier, 2013. – Vol. 9.
- 11 Berezinskii V.L. Destruction of long-range order in one-dimensional and two-dimensional systems having a continuous symmetry group. I. Classical systems // JETP – 1971. – Vol.32. –P.493-500.
- 12 Berezinskii V.L. Destruction of long-range order in one-dimensional and two-dimensional systems possessing a continuous symmetry group. II. Quantum systems // JETP. – 1972. – Vol.59. – P.907-920.
- 13 Kosterlitz J.M., Thouless D.J. Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems // J. Phys.: Solid State Physics. -1973. – Vol. 6. – P.1181.

- 14 Kosterlitz J.M. The critical properties of the two-dimensional xy model // *J. Phys.: Solid State Physics*. – 1974. – Vol. 7. – P.1046.
- 15 Kosterlitz J.M. Kosterlitz-Thouless physics: a review of key issues // *Rep. Prog. Phys.* -2016. – Vol.79. – Art.No 026001.
- 16 Hebard A.F. and Paalanen M.A. Pair-breaking model for disorder in two-dimensional superconductors // *Phys. Rev. B* 30. – 1984. – P.4063.
- 17 Marković N., Christiansen C., Goldman A.M. Thickness-magnetic field phase diagram at the superconductor-insulator transition in 2d // *Phys. Rev. Lett.* 81. – 1998. – Vol.23. – P.5217.
- 18 Fisher M.P.A. Quantum phase transitions in disordered two-dimensional superconductors // *Phys. Rev. Lett.* -1990. – Vol.65. – P.923.
- 19 Hebard A.F. and Paalanen M.A. Magnetic-field-tuned superconductor-insulator transition in two-dimensional films // *Phys. Rev. Lett.* – 1990. – Vol.65. – P.927.
- 20 Ryzhov V.N., Tareyeva E.E., Fomin Yu.D., Tsiok E.N. Berezinskii-Kosterlitz-Thouless transition and two-dimensional melting // *Phys. Usp.* 60. – 2017. – P. 857.

References

- 1 H. Quevedo, *Journal Math. Phys.* 48, 013506 (2007).
- 2 H. Quevedo, A. Sanchez, S. Taj, A. Vazquez, *Gen. Rel. Gravity* 43, 1153 (2011).
- 3 H. Quevedo, A. Sasha, S. Zaldivar, *J. General Relativity and Quantum Cosmology* (2015).
- 4 H. Quevedo, A.A. Ramirez, arXiv:1205.3544 (2012).
- 5 D. Bravetti, R. Momeni, R. Myrzakulov and H. Quevedo, arXiv:1211.7134 (2013).
- 6 H. Quevedo, A. Sánchez, A. Vázquez, *Gen. Rel. Grav.* 47, 36 (2015).
- 7 H. Quevedo, F. Nettel, S. Cesar Lopez-Monsalvo, A. Bravetti, *J.Geom.Phys.* 81, 1-9 (2014).
- 8 A. Vazquez, H. Quevedo, A. Sanchez, *J. Geom. Phys.* 60, 1942-1949 (2010).
- 9 В.Н. Горелкин https://mipt.ru/education/chair/theoretical_physics/php (2010).
- 10 E.M. Lifshitz, L.P. Pitaevskii, *Statistical Physics: Theory of the Condensed State*, (Elsevier, 9, 2013).
- 11 V.L. Berezinskii, *JETP* 32, 493-500 (1971).
- 12 V.L. Berezinskii, *JETP* 34, 1144-1156 (1972).
- 13 J.M. Kosterlitz, D.J. Thouless *J.Phys.* 6, 1181 (1973).
- 14 J.M. Kosterlitz, *J. of Phys. C: Solid State Physics* 7, 1046. (1974).
- 15 J.M. Kosterlitz, *Rep. Prog. Phys.* 79, 026001 (2016).
- 16 A.F. Hebard and M.A. Paalanen, *Phys. Rev. B* 30, 4063 (1984).
- 17 N. Marković, C. Christiansen, A.M. Goldman, *Phys. Rev. Lett.* 81, 23, P.5217 (1998).
- 18 M.P.A. Fisher *Phys. Rev. Lett.* 65, 923 (1990).
- 19 A.F. Hebard and M.A. Paalanen, *Phys. Rev. Lett.* 65, 927 (1990).
- 20 V.N. Ryzhov, E.E. Tareyeva, Yu.D. Fomin, E.N. Tsiok *Phys. Usp.* 60, 857 (2017).