

А.Б. Алтайбаева\* , К.К. Ержанов , Г.Б. Бауыржан 

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Казахстан, г. Нур-Султан

\*e-mail: aziza.ltaibayeva@gmail.com

## ТЕРМОДИНАМИКА И ГЕОМЕТРОТЕРМОДИНАМИКА ЧЕРНЫХ ДЫР РЕЙССНЕРА-НОРДСТРЕМА В МНОГОМЕРНЫХ МОДЕЛЯХ СО СТЕПЕННОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ

В данной статье проанализированы геометрические свойства равновесного многообразия черных дыр на фоне модели более высоких измерений. Как частный случай рассматриваются модели со степенной зависимостью многомерных моделей черных дыр. В этой работе дан общий обзор работ по данной теме. Рассмотрены основные составляющие формализма геометротермодинамики и представлена термодинамика для данной метрики, которая здесь использована для анализа равновесного многообразия конфигураций черных дыр. Основной частью данного исследования является рассмотрение частного случая для изучения термодинамики и геометротермодинамики пятимерной черной дыры Рейснера-Нордстрема в гравитационном поле. Для пятимерной черной дыры Рейснера-Нордстрема определяются точки сингулярности, при которых происходят фазовые переходы второго рода, которые показывают взаимодействия в гравитационном поле. Показано что проявление кривизны рассматриваемой черной дыры с происходящими в ней фазовыми переходами демонстрирует ее поведение в гравитационном поле. Следует отметить, что структура фазового перехода черной дыры может зависеть от выбранного данной модели ансамбля. Следовательно, единственными особенностями во всех рассматриваемых вариантах скаляра кривизны в представлении энтропии, массы и энтальпии в зависимости от термодинамических параметров возникают из-за границы применимости термодинамического подхода к черной дыре, где, как предполагается, невозможно применение обычных подходов общей теории относительности.

**Ключевые слова:** черная дыра Рейснера-Нордстрема, фазовый переход, гравитационное поле, скаляр кривизны.

A.B. Altaybaeva\*, K.K. Yerzhanov, G.B. Bauyrzhan

L.N. Gumilyov Eurasian National University, Kazakhstan, Nur-Sultan

\*e-mail: aziza.ltaibayeva@gmail.com

### Thermodynamics and geometrothermodynamics of Reissner-Nordström black holes in multidimensional power-law models

This article analyzes the geometric properties of the equilibrium variety of black holes on the background of a higher-dimensional model. Models with power-law dependence of multidimensional black hole models are considered as a special case. This work provides a general overview of the work on this topic. The main components of the formalism of geometric thermodynamics are considered and thermodynamics for this metric is presented, which is used here to analyze the equilibrium variety of configurations of black holes. The main part of this study is the consideration of a particular case for the study of thermodynamics and geometrothermodynamics of the Reissner-Nordstrom five-dimensional black hole in a gravitational field. For the five-dimensional Reissner-Nordström black hole, singularity points are determined at which second-order phase transitions occur, which show interactions in a gravitational field. It is shown that the manifestation of the curvature of the considered black hole with phase transitions occurring in it demonstrates its behavior in a gravitational field. It should be noted that the structure of the phase transition of a black hole may depend on the chosen model of the ensemble. Consequently, the only features in all considered scalar versions of curvature in the representation of entropy, mass and enthalpy, depending on thermodynamic parameters, arise from beyond the limits of applicability of the thermodynamic approach to a black hole, where it is assumed that it is impossible to apply the usual approaches of general relativity.

**Key words:** Reissner-Nordstrom black hole, phase transition, gravitational field, curvature scalar.

А.Б. Алтайбаева\*, К.К. Ержанов, Г.Б. Бауыржан

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Қазақстан, Нұр-Сұлтан қ.  
\*e-mail: aziza.ltaibayeva@gmail.com

### Көп өлшемді дәрежеге тәуелді модельдердегі Рейсснер-Нордстром қара құрдымдарының термодинамикасы және геометротермодинамикасы

Бұл мақалада жоғары өлшемді модель аясында қара құрдымдардың тепе-теңдік алуан түрінің геометриялық қасиеттері талданады. Ерекше жағдай ретінде көп өлшемді қара құрдым модельдерінің дәрежеге тәуелділігі бар модельдер қарастырылады. Бұл жұмыста осы тақырып бойынша қарастырылған жұмыстарға жалпы шолу жасалынды. Геометриялық термодинамиканың формализмінің негізгі компоненттері қарастырылып, берілген метрика үшін термодинамика келтірілген болып, ол қара құрдымдардың конфигурацияларының тепе-теңдік алуан түрлілігін талдау үшін қолданылады. Зерттеудің негізгі бөлігі – гравитациялық өрістегі Рейсснер-Нордстром бес өлшемді қара құрдымдарының термодинамикасы мен геометротермодинамикасын зерттеуге арналған нақты жағдайды қарастыру. Бес өлшемді Рейсснер-Нордстром қара құрдымы үшін гравитациялық өрістегі өзара әрекеттесуді көрсететін екінші ретті фазалық ауысулар болатын сингулярлық нүктелер анықталады. Қарастырылған қара құрдымдардың қисаюының онда пайда болатын фазалық ауысулармен көрінісі оның гравитациялық өрістегі әрекетін көрсететіні көрсетілген. Қара құрдымдардың фазалық ауысуының құрылымы ансамбльдің таңдалған моделіне байланысты болуы мүмкін екенін ескеру қажет. Демек, термодинамикалық параметрлерге байланысты энтропияны, массаның және энтальпияны бейнелеудегі қисықтықтың барлық қарастырылған скалярлық нұсқаларындағы жалғыз ерекшеліктер термодинамикалық тәсілдің қара құрдымға қолданылу шегінен шығады, мұнда ол болжанған жалпы салыстырмалылықтың әдеттегі тәсілдерін қолдану мүмкін емес екендігін көрсетеді.

**Түйін сөздер:** Рейсснер-Нордстром қара құрдымдары, фазалық ауысулар, гравитациялық өріс, қисықтық скаляры.

#### Введение

В течение последнего столетия важным элементом теоретической физики стала – дифференциальная геометрия стала. Одним наиболее интересным примеров этого факта – применение римановой геометрии в общей теории относительности как теории гравитационного поля.

Первые попытки в этом направлении были предприняты в одних их первых работах Гиббса [2] и Каратеодори [3], в которых язык дифференциальных форм был введен в термодинамику. Риманова геометрия была впервые введена в статистическую физику и термодинамику Рао [4] в пятидесятых годах с помощью метрики, компоненты которой в локальных координатах совпадают с информационной матрицей Фишера. Оригинальная работа Рао была продолжена и расширена рядом авторов (Например, [5]). Для изучения геометрии термодинамики обычных систем и черных дыр интенсивно использовались метрики Гессе [6–14]. То, что она инвариантна относительно преобразований Лежандра [15] является дополнительным аспектом классической термодинамики, т.е. свойства данной термодинамической системы не зависят от выбора термодинамического потенциала. Это

свойство [16] учтено в контексте геометрического описания термодинамики.

Доказано, что для корректной обработки преобразований Лежандра и геометрической версии первого закона термодинамики необходимо ввести структуру контактной геометрии в термодинамическое фазовое пространство [17]. Формальный подход геометротермодинамики (ГТД) [16] был предложен для согласованного и лежандрово инвариантного объединения контактной структуры фазового пространства с римановой структурой равновесного пространства. В результате для равновесного пространства получаются римановы метрики, которые уже не являются гессеновскими и инвариантны относительно преобразований Лежандра. Одна из основных целей геометротермодинамики – интерпретировать кривизну равновесного пространства как проявление термодинамического взаимодействия. В случае взаимодействующих систем с нетривиальной структурой фазовых переходов можно было бы полагать, что кривизна не равна нулю и становится сингулярной вблизи точек, где происходят фазовые переходы. Это было показано для всех термодинамических систем, исследованных к настоящему времени [18]. В частности, были подробно исследованы

все конфигурации черных дыр теории Эйнштейна в четырех измерениях.

Предметом интенсивных исследований в последние годы являются решения описывающие черные дыры в больше чем четыре размерностях пространства-времени. Расширение общей теории относительности на более высокие римановы пространства-времени дает больше информации об основных свойствах черных дыр.

В самом деле, в таких многообразиях теорема единственности не может выполняться, так как в рассматриваемые модели появляется возможность включения дополнительных степеней свободы. Например, в пятимерном пространстве-времени вращательная симметрия добавляет еще один угловой момент на вращающемся объекте. [19].

Еще одна особенность многомерных черных объектов относится к топологии горизонта. В четырехмерной конфигурации, горизонт Килинга имеет тривиальную топологию  $S^2$ . Но в пятимерном пространстве-времени, для черных объектов с сингулярностью кольца, топология имеет вид  $S^2 \times S^1$ , а для черных струн в расширенной супергравитации многомерной ОТО топология принимает вид  $S^2 \times R$ . Кроме того, структура фазового перехода черных дыр выглядит совершенно иной. Таким образом, размерность пространства диктует выбор теории, задающей процесс фазовых переходов.

## Материалы и методы

Для описания термодинамической системы с  $n$  степенями свободы, т.е. многомерных черных дыр удобно ввести равновесное пространство  $\mathbf{E}$ , координаты которых могут быть идентичны расширенной термодинамике в переменных  $E^a$ , где  $a = 1, \dots, n$ . Здесь каждая точка  $\mathbf{E}$  представляет собой особое состояние равновесия, в котором может существовать система. Понятно, что не каждая точка  $\mathbf{E}$  может быть занята в данной системе. Множество точек  $\mathbf{E}$ , которые доступны для конкретной системы, определяются фундаментальным уравнением  $\Phi = \Phi(E^a)$ , где  $\Phi$  – термодинамический потенциал [20]. Как правило, термодинамический потенциал  $\Phi$  не идентичен ни с энтропией  $S$ , ни с внутренней энергией системы  $U$ . Тем не менее, можно задавать любой термодинамический потенциал, оставляя термодинамические свойства системы без изменений.

Подобную ситуацию можно объяснить выбором равновесного пространства с дифференциально-геометрической структурой в нескольких направлениях. Самый простой способ состоит в введении гессенской метрики в равновесное пространство  $\mathbf{E}$

$$g^H = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial E^a \partial E^b} dE^a dE^b, \quad (1)$$

что  $\mathbf{E}$  становится римановым многообразием. Метрика  $g^H$  ведет себя как скаляр при любых изменениях координат  $\mathbf{E}$ , т.е. при операции отображения координат (диффеоморфизм)  $E^a \rightarrow \tilde{E}^a = \tilde{E}^a(E^a)$  с участием только набора координат  $\{E^a\}$ . Здесь функция  $\Phi$  может рассматриваться как метод производящих функций гессенской метрики, оно не позволяет рассмотреть изменения термодинамического потенциала.

В данной статье будут анализированы фазовые переходы второго рода для различных конфигураций черной дыры и соответственно будет использована следующая формула

$$G^H = (d\Phi - \delta_{ab} I^a dE^b)^2 + (\delta_{ab} E^a I^b)(\eta_{cd} dE^c dI^d), \quad (2)$$

чей кодифференциал приводит к метрике

$$g^H = \left( E^a \frac{\partial \Phi}{\partial E^a} \right) \left( \eta_b^c \frac{\partial^2 \Phi}{\partial E^c \partial E^d} dE^b dE^d \right), \quad (3)$$

для равновесного многообразия.

Видно, что этот показатель может быть явно рассчитан только для основного уравнения  $\Phi = \Phi(E^a)$ . При этом геометрические свойства равновесного многообразия  $\mathbf{E}$ , описываемые метрикой  $g^H$ , должны быть связаны с термодинамическими свойствами системы, описываемый основным уравнением  $\Phi(E^a)$ . В частности, ожидается, что кривизна системы  $\mathbf{E}$  с термодинамическим взаимодействием и кривизна сингулярности  $\mathbf{E}$  находятся в соответствующих фазовых переходах соответствующей термодинамической системы.

## Результаты и обсуждение

Черная дыра Рейсснера-Нордстрёма размерности  $d = 5$

Решение для заряженной черной дыры Рейсснера-Нордстрёма (РН) без углового момента может быть применено для  $d = 5$  размерности. Соответствующая метрика в пятимерном пространстве-времени

$$ds^2 = -Vdt^2 + V^{-1}dr^2 + r^2d\Omega_{(3)}^2, \quad (4)$$

где  $d\Omega_{(3)}^2$  – является линейным элементом на 3 – мерной единичной сфере,  $d\Omega_{(3)}^2 = 2$ .

Соответственно для нашего частного случая объем определяется формулой

$$V = 1 - \frac{4\pi G}{3} \left( \frac{2M}{r^2} + \frac{Q^2}{r^4} \right). \quad (5)$$

Рассмотрим частный случай когда  $d = 5$  и используем эту размерность для нахождения необходимых уравнении термодинамики и геометротермодинамики [21]. Решая уравнение (9) при  $V = 0$ , можно найти горизонт событий любой размерности и область соответствующей энтропии.

На рисунке 1 приведена зависимость объема  $V$  пятимерной черной дыры РН от его радиуса  $r$ , при различных значениях массы и теплоты. Кривая 1 (верхняя) соответствует значениям  $M = 1$ ,  $Q = 0.5$ ; кривая 2 (средняя) соответствует значениям  $M = 2$ ,  $Q = 1.5$  и кривая 3 (нижняя) значениям  $M = 3$ ,  $Q = 2.5$ . Из рисунка видно, что с увеличением радиуса уменьшается объем черной дыры и при различных значениях массы и теплоты этот объем стремится к одному и тому же значению. Это говорит о том что черные дыры что объем черной дыры при увеличении радиуса уменьшается.

*Термодинамика черной дыры Рейсснера-Нордстрёма размерности  $d = 5$*

Далее рассмотрим термодинамику черной дыры Рейсснера-Нордстрёма для случая  $d=5$ . Основное уравнение для энтропии запишем в виде

$$S(M, Q) = \left( M + M \sqrt{1 - \frac{3Q^2}{4M^2}} \right)^2. \quad (6)$$

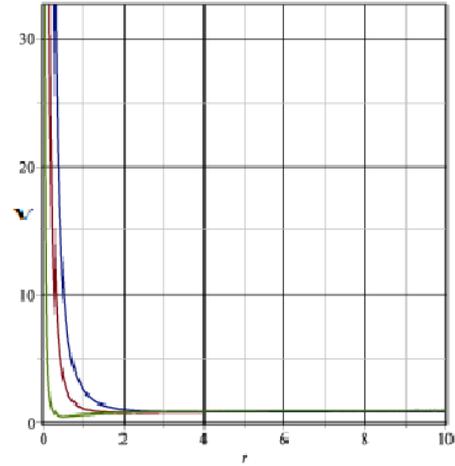


Рисунок 1 – Зависимость объема  $V$  четырехмерной черной дыры РН от его радиуса  $r$

Согласно приведенной формуле с увеличением массы энтропия растет, что можно доказать, для необратимого процесса выполняется второй закон термодинамики.

С помощью уравнения (5), получаем функцию массы [21] в виде

$$M(S, Q) = \frac{S^{\frac{2}{3}}}{2} + \frac{3Q^2}{8S^{\frac{2}{3}}}, \quad (7)$$

Данное уравнение удовлетворяет первому закону термодинамики, где  $Q$  подразумевается как электрический потенциал. Тогда температура и электрический потенциал [22] примет вид

$$T(S, Q) = \frac{2S - 3Q^2}{S^{\frac{5}{3}}}, \quad \phi(S, Q) = \frac{3}{4} \frac{Q}{S^{\frac{2}{3}}}. \quad (8)$$

Отношение электрического потенциала к массе в экстремальных пределах

$$\left. \frac{Q^2}{M^2} \right|_{\text{экстремал}} = \frac{4}{3} \quad \text{т.е.} \quad \left. \frac{Q^2}{S} \right|_{\text{экстремал}} = \frac{4}{3}, \quad (9)$$

где, электрический потенциал остается постоянным, а температура черной дыры становится равной нулю. Кстати, в экстремальном случае мы получаем соотношение  $M^2 = \phi^2 Q^2$ .

Вычисляя функцию, соответствующую потенциалу  $\phi$  для черной дыры РН, можно заметить наличие некоторых точек, в которых,

скорее всего, и происходят фазовые переходы. Теплоемкость при постоянной теплоте запишем как

$$C_Q = \frac{M_S}{M_{SS}} = -\frac{3S(3Q^2 - 4S^{\frac{4}{3}})}{15Q^2 - 4S^{\frac{4}{3}}}, \quad (10)$$

где  $M_S = \partial M / \partial S$  и т.д. При экстремальном значении теплоты появляются критические точки, которые показывают взаимодействия черной дыры со Вселенной.

При постоянной энтропии, в черной дыре РН, появляются две функции отклика:

- изоэнтропическая сжимаемость

$$k_S = \frac{M_{SQ}^{-1}}{Q} = \frac{4}{3} \frac{S^{\frac{2}{3}}}{Q}, \quad (11)$$

- изоэнтропическое расширение

$$\alpha_S = \frac{M_{SQ}^{-1}}{Q} = -2 \frac{S^{\frac{5}{3}}}{Q^2}. \quad (12)$$

Как видно из этой формулы, изоэнтропическое расширение имеет отрицательное значение, которая объясняет что, черные дыры не расширяются, а наоборот сжимаются [22]

Нужно отметить, что в термодинамике черной дыры РН возможно лишь расхождение теплоёмкости, в случае, когда знаменатель (9) равен нулю, т.е., тогда как:

$$\left. \frac{Q^2}{S^{\frac{4}{3}}} \right|_{\text{экстремал}} = \frac{4}{15}. \quad (13)$$

Можно также показать, что это значение находится внутри пространственной области,

занимаемой черной дырой, т.е., при выполнении условия

$$\frac{Q^2}{M^2} \leq \frac{7}{3}. \quad (14)$$

С помощью уравнения (5), перепишем уравнение (12) следующим образом

$$\frac{Q^2}{M^2} = \frac{7}{3}. \quad (15)$$

Следует отметить, что структура фазового перехода черной дыры может зависеть от выбранного ансамбля. Например, если использовать ансамбль соответствующий «энтальпии»,  $H = M - \phi Q$

$$H(S, \phi) = -S^{\frac{2}{3}} \frac{4\phi^2 - 3}{6}, \quad (16)$$

то получаем выражение

$$C_\phi = \frac{H_S}{H_{SS}} = -3S. \quad (17)$$

С, что теплоемкость при постоянном потенциале  $\phi$  имеет особенности, поэтому в этом ансамбле с точки зрения термодинамики не ожидаются фазовые переходы.

*Геометротермодинамика черной дыры Рейсснера-Нордстрёма размерности  $d = 5$*

Учитывая основные уравнения (7), (8) и общую метрику (3), можно, вычислить метрику и скаляр кривизны для черной дыры РН в представлении энтропии и энергетических представлении.

Таким образом, метрика  $\Phi = S$  и  $E^a = \{M, Q\}$  записывается следующим виде

$$g_s'' = \frac{M \left[ 2 + \sqrt{4 - 3 \frac{Q^2}{M^2}} \right]}{6(3Q^2 - 4M^2) \sqrt{4 - 3 \frac{Q^2}{M^2}}} \left\{ -4 \left[ (9Q^2 - 8M^2) \sqrt{4 - 3 \frac{Q^2}{M^2}} + 24Q^2 - 16M^2 \right] dM^2 - \right. \\ \left. - 3 \left[ (3Q^2 - 8M^2) \sqrt{4 - 3 \frac{Q^2}{M^2}} - 16M^2 \right] dQ^2 \right\}, \quad (18)$$

скаляр кривизны

$$R_s'' = \frac{3}{M^2} \frac{A_1(M, Q) + A_2(M, Q) + A_3(M, Q) + A_4(M, Q)}{\left[ 2 + \sqrt{4 - 3 \frac{Q^2}{M^2}} \right]^2 \left[ 24Q^2 + M^2 \left( -16 + \sqrt{4 - 3 \frac{Q^2}{M^2}} \right) \right]^2 B_1(M, Q)}, \quad (19)$$

где,

$$A_1(M, Q) = 169164M^{12} \left( 2 + \sqrt{4 - 3 \frac{Q^2}{M^2}} \right) + 729Q^{12} \left( 7 + 4 \sqrt{4 - 3 \frac{Q^2}{M^2}} \right), \\ A_2(M, Q) = 468M^2Q^{10} \left( 340 + 127 \sqrt{4 - 3 \frac{Q^2}{M^2}} \right) - 972M^4Q^8 \left( -79 + 161 \sqrt{4 - 3 \frac{Q^2}{M^2}} \right), \\ A_3(M, Q) = -215M^{10}Q^2 \left( 411 + 176 \sqrt{4 - 3 \frac{Q^2}{M^2}} \right) - 216M^6Q^6 \left( 16162 + 3565 \sqrt{4 - 3 \frac{Q^2}{M^2}} \right), \\ A_4(M, Q) = 288M^8Q^4 \left( 30872 + 10921 \sqrt{4 - 3 \frac{Q^2}{M^2}} \right). \quad (20)$$

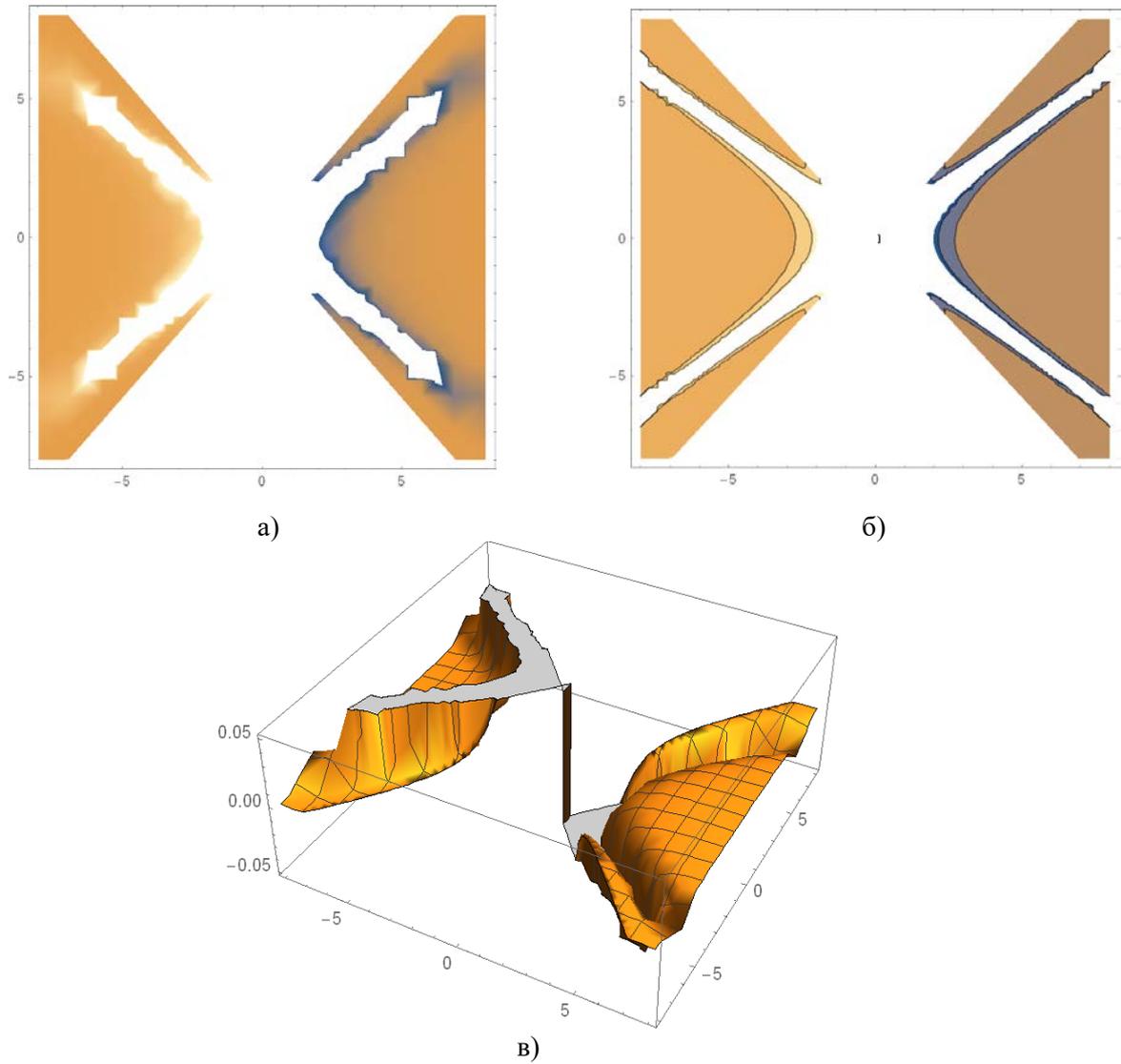
и

$$B_1(M, Q) = \left[ 9Q^4 + 32M^4 \left( 2 + \sqrt{4 - 3 \frac{Q^2}{M^2}} \right) - 6M^2Q^2 \left( 6 - \sqrt{4 - 3 \frac{Q^2}{M^2}} \right) \right]^2 \quad (21)$$

После алгебраических преобразований, находим, что единственный реальный положительный корень знаменателя скаляра кривизны (19) дается решением

$$\frac{M}{Q} \Big|_{\text{сингуляр}} = \frac{9}{2\sqrt{15}}, \quad (22)$$

Из уравнения (13) и (2), следует, что на самом деле скаляр кривизны расположен именно в тех точках, где происходят фазовые переходы. Графическое изображение скаляра кривизны представлено на рисунке 2, в котором явно выделены некоторые точки сингулярности.



**Рисунок 2** – Зависимость скаляра кривизны в представлении энтропии в зависимости от массы и теплоемкости

На рисунке 2 приведена зависимость скаляра кривизны в представлении энтропии в зависимости от массы и теплоемкости, при значении массы и теплоты соответственно  $M\{-8;8\}$  и  $Q\{-8;8\}$ . На рисунке 2.а вид сверху, 2.б вид с боку и 2.в общий вид в трехмерном представлении.

Чтобы показать инвариантность вышеприведенных результатов, в качестве термодинамического потенциала используем  $\Phi = M$  и  $E^a = \{S, Q\}$ , удовлетворяющие основному уравнению (16). Тогда из общей термодинамической метрики (3), получаем

$$g_M'' = -\frac{45Q^4 + 18Q^2S^{\frac{4}{3}} - 8S^{\frac{8}{3}}}{216S^2} \times \quad (23)$$

$$\times dS^2 + \frac{3Q^2 + 4S^{\frac{4}{3}}}{8} dQ^2,$$

с помощью которого вычислим скаляр кривизны

$$R_M'' =$$

$$= -\frac{32(18225Q^8 + 14580Q^6S^{\frac{4}{3}} + D_1 - D_2 + D_3)}{9(3Q^2 + 2S^{\frac{4}{3}})^3(15Q^2S - 4S^{\frac{7}{3}})^2}, \quad (24)$$

где,

$$D_1 = 4S^{\frac{16}{3}}(-32 + 729S^{\frac{4}{3}}),$$

$$D_2 = -6Q^2S^4(56 + 729S^{\frac{4}{3}}),$$

$$D_3 = 9Q^4(-628S^{\frac{8}{3}} + 364S^4),$$

Далее используя алгебраическое преобразование, отметим, что единственные точки расхождения задаются [4] в виде

$$\left. \frac{Q^2}{S^2} \right|_{\text{сингуляр}} = \frac{1}{3}, \quad (25)$$

что совпадает с условием фазовых переходов 2-го рода (13). Отсюда еще раз видна конкретная связь между кривизной метрики (23) и термодинамическим взаимодействием.

Графическое изображение скаляра кривизны, в зависимости от энтропии и теплоты представлено на рисунке 3, где выделены точки сингулярности при значениях энтропии  $S_{\{-8;8\}}$  и теплоты  $Q_{\{-8;8\}}$ . На рисунке 3.а вид сверху, 3.б вид с боку и 3.в общий вид в трехмерном представлении.

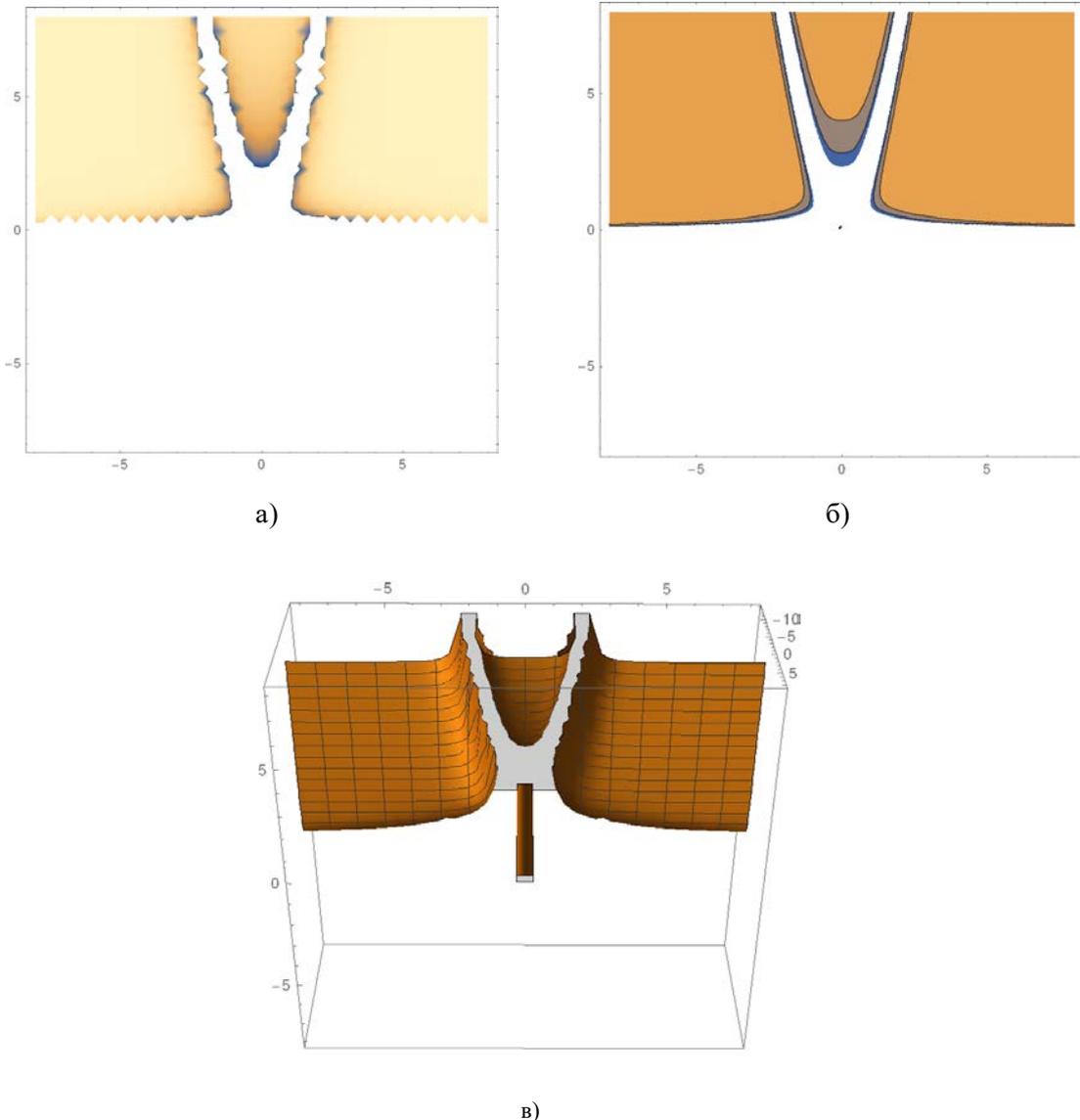


Рисунок 3 – Зависимость скаляра кривизны в представлении массы от энтропии и теплоты

На рисунке 3.а вид сверху, 3.б вид с боку и 3.в общий вид в трехмерном представлении.

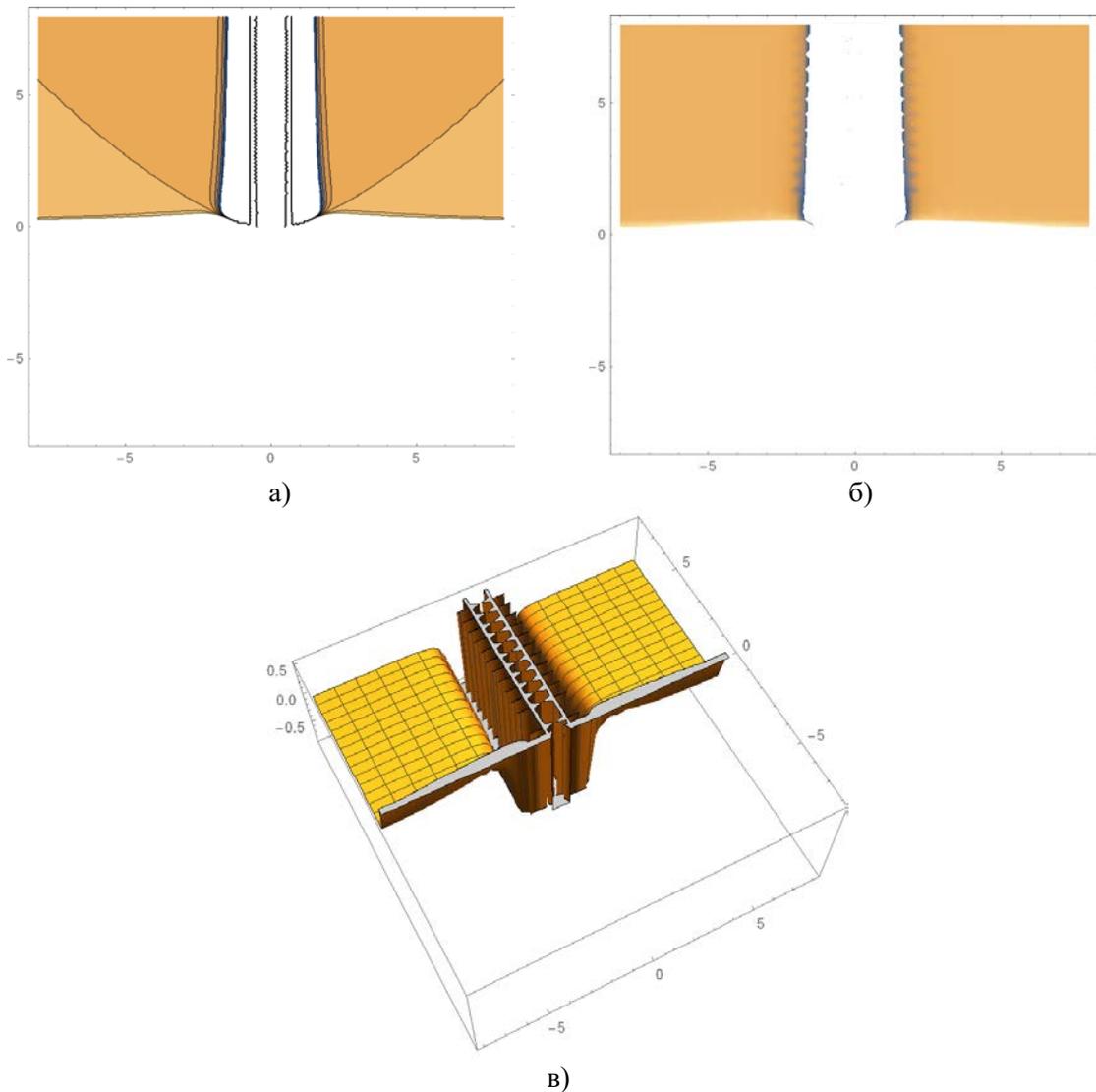
Чтобы провести геометродинамический анализ различных ансамблей, воспользуемся метри-

кой и запишем ее с помощью основного уравнения (16), имея в виду, что  $\Phi = H$  и  $E^a = \{S, \phi\}$ . В результате, метрика запишется в виде

$$g_H^H = \frac{64\phi^4 - 60\phi^2 + 9}{243S^{\frac{2}{3}}} dS^2 + \frac{(16\phi^2 - 3)S^{\frac{4}{3}}}{27} d\phi^2. \quad (26)$$

Следовательно, скаляр кривизны принимает вид

$$R_H^H = \frac{6(-7680\phi^6 + 4096\phi^8 + 81(1 + 144S^{\frac{8}{3}}) + 216\phi^2(-5 + 288S^{\frac{8}{3}}) - 432\phi^4(-11 + 384S^{\frac{8}{3}}))}{(3 - 4\phi^2)^2(-3 + 16\phi^2)^3 S^{\frac{10}{3}}}, \quad (27)$$



**Рисунок 4** – Зависимость скаляра кривизны в представлении энтропии от энтропии и термодинамического потенциала

Таким образом, первый фактор в знаменателе, будучи конформным фактором в метрике (26), равно  $SH_S + \phi H_\phi$ , который, согласно тождеству Эйлера, пропорционален энтальпии  $H$ . Первое слагаемое в знаменателе скаляра кривизны равно нулю только тогда, когда термодинамический потенциал равен нулю, следовательно  $H=0$ . Учитывая уравнение состояния  $\phi = \partial M / \partial Q$ , второй фактор оказывается равным нулю для  $S^2 = Q^4$ , который в точности соответствует экстремальному пределу черной дыры (8) с нулевой температурой. Это объясняется тем, метрика  $g_H''$  вырождается в экстремальных пределах. Следовательно, единственные особенности возникают из-за границы применимости термодинамического подхода к черной дыре, где также ожидается, что подход ОТО отрицается. Графическое изображение скаляра кривизны представлено на рисунке 4, где подробно показываются точки сингулярности. На рисунке 4.а вид сверху, 4.б вид с боку и 4.в общий вид в трехмерном представлении.

### Выводы

Таким образом в данной статье рассмотрена геометрическая структура пятимерной черной дыры Рейсснера-Нордстрёма. Использован метод формализма геометротермодинамики, который с точки зрения концепции дифференциальной геометрии представляет такие термодинамические свойства, как взаимодействие и фазовые переходы, кривизна и сингулярность. Получены критические точки, которые следуют из анализа расхождений термодинамических функций отклика. В термодинамике черных дыр, критические точки теплоемкости обычно связаны с возникновением фазовых переходов второго рода.

Сначала выведены все критические точки, вытекающие из анализа расхождений термодинамического отклика функции. В термодинамике черных дыр критическими точками теплоемкости обычно являются связанных с возникновением фазовых переходов второго рода. Здесь проанализировано расхождение всех функций отклика и показано, что геометротермодинамика воспроизводит поведение возле критических точек.

В случае пятимерной черной дыры Рейсснера-Нордстрёма обнаружено, что если использовать ансамбль связанный с массой черной дыры, существует только один фазовый переход второго рода. С другой стороны, если используем ансамбль, связанный с энтальпией, фазовые переходы существуют. Это соответствует хорошо известному результату о том, что структура фазовых переходов черных дыр может зависеть от ансамбля. Далее исследованы геометрические свойств соответствующего равновесного пространства с помощью геометротермодинамики с массой в качестве термодинамического потенциала и обнаружено, что сингулярность кривизны появляется именно в этой точке где происходит фазовый переход. В случае, когда использовали энтальпию в качестве термодинамического потенциала, геометротермодинамика обеспечивает равновесное многообразие без сингулярностей. Таким образом, можно сделать вывод, что геометротермодинамика правильно воспроизводит структуру термодинамического фазового перехода черной дыры Рейсснера-Нордстрёма.

### Благодарность

Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства образования и науки Республики Казахстан AP08957287.

### Литература

- 1 Frankel T., The geometry of physics: An introduction. – Cambridge University Press, 2011
- 2 Gibbs J. W., The collected works, Vol. 1, Thermodynamics. – New York: Dover Publications, 1961
- 3 Caratheodory C., Untersuchungen über die Grundlagen der Thermodynamik // *Mathematische Annalen*. – 1909. – Vol. 67. – P. 355–386.
- 4 Rao C.R. Information and the Accuracy Attainable in the Estimation of Statistical Parameters // *Bulletin of Calcutta Mathematical Society*. – 1945. – Vol. 37. – P. 81–91.
- 5 Amari S., Differential-Geometrical Methods in Statistics – Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- 6 Aman J.E., Bengtsson I. and Pidokrajt N., Geometry of black hole thermodynamics // *General Relativity and Gravitation* – 2003. – Vol. 35. – P.1733.
- 7 Aman J.E., Pidokrajt N. Geometry of higher-dimensional black hole thermodynamics // *Physical Review D*. – 2006. – Vol. 73. – P. 024017

- 8 Aman J.E., Pidokrajt N. Flat Information Geometries in Black Hole Thermodynamics // *General Relativity and Gravitation*. – 2006. – Vol. 38. – P. 1305-1315.
- 9 Shen J., Cai R.G., Wang B. and Su R.K., Thermodynamic Geometry and Critical Behavior of Black Holes // *International Journal of Modern Physics A* – 2007. – Vol. 22. – P.11-27.
- 10 Cai R.G. and Cho J. H., Thermodynamic curvature of the BTZ black hole // *Physical Review D* – 1999. – Vol. 60. – P. 067502.
- 11 Sarkar T., Sengupta G. and Tiwari B.N., On the thermodynamic geometry of BTZ black holes // *J. High Energy Phys.* – 2006. – Vol. 11. ArtNo 015.
- 12 Medved A.J.M., A commentary on ruppeiner metrics for black holes // *Modern Physics Letters A*– 2008. – Vol. 23. – P. 2149-2161.
- 13 Mirza B. and Zamaninasab M., Ruppeiner geometry of RN black holes: flat or curved? // *J. High Energy Phys.* – 2007. – Vol. 06. Article 059
- 14 Quevedo H., *Geometrothermodynamics of black holes* // *General Relativity and Gravitation*. – 2008. – Vol. 40. – P. 971-984.
- 15 Callen H.B. «*Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*». – New York: John Wiley and Sons, 1985.
- 16 Quevedo H. *Geometrothermodynamics* // *Journal of Mathematical Physics*. – 2007. – Vol. 48, №1.
- 17 Hermann R., *Geometry, physics and systems*. – New York: Marcel Dekker, 1973.
- 18 Quevedo H., S´anchez A., Taj S. and V´azquez A., Phase transitions in geometrothermodynamics // *General Relativity and Gravitation*. – 2011. – Vol. 43. – P. 1153-1165.
- 19 Hartnoll S.A., Herzog C.P., Horowitz G.T., Building a Holographic Superconductor // *Physical Review Letters* – 2008. – Vol. 101. – P. 031601.
- 20 Liu Y., Pan Q., Wang B. Holographic superconductor developed in BTZ black hole background with backreactions // *Physics Letters B* – 2011. – Vol. 702. – P. 94–99.
- 21 Bravetti A., Momeni D., Myrzakulov R., Quevedo H. Geometrothermodynamics of higher dimensional black holes // *General Relativity and Gravitation*. – 2013. – Vol. 45, №8. – P.1603-1617.
- 22 Алтайбаева А.Б. Геометродинамика некоторых топологических объектов: Монография. – Нур-Султан, 2019. – 147 с.

#### References

- 1 T. Frankel, *The geometry of physics: An introduction*, (Cambridge University Press, 2011).
- 2 J.W. Gibbs, *The collected works*, Vol. 1, *Thermodynamics*, (New York: Dover Publications, 1961).
- 3 C. Caratheodory, *Mathematische Annalen* 67, 355–386 (1909).
- 4 C.R. Rao, *Bulletin of Calcutta Mathematical Society* 37, 81–91 (1945).
- 5 S. Amari, *Differential-Geometrical Methods in Statistics*, (Springer-Verlag, Berlin, 1985).
- 6 J.E. Aman, Bengtsson I. and Pidokrajt N., *General Relativity and Gravitation*, 35, 1733 (2003).
- 7 J.E. Aman, N. Pidokrajt, *Physical Review D* 73, 024017 (2006).
- 8 J.E. Aman, N. Pidokrajt, *General Relativity and Gravitation*, 38, 1305-1315 (2006).
- 9 J. Shen, R.G. Cai, B. Wang and R.K. Su, *International Journal of Modern Physics A* 22, 11-27 (2007).
- 10 R.G. Cai and J.H. Cho., *Physical Review D* 60, 067502 (1999).
- 11 T. Sarkar, G. Sengupta and B.N. Tiwari, *J. High Energy Phys.*, 11, 015 (2006).
- 12 A.J.M. Medved, *Modern Physics Letters A* 23, 2149-2161 (2008).
- 13 B. Mirza and M. Zamaninasab, *J. High Energy Phys.*, 06, 059 (2007).
- 14 H. Quevedo, *General Relativity and Gravitation*, 40, 971-984 (2008).
- 15 H. B. Callen, *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*, (New York: John Wiley and Sons, 1985).
- 16 H. Quevedo, *Journal of Mathematical Physics*, 48 (1) (2007).
- 17 R. Hermann, *Geometry, physics and systems*, (New York: Marcel Dekker, 1973).
- 18 H. Quevedo, et al, *General Relativity and Gravitation*, 43, 1153-1165 (2011).
- 19 S.A. Hartnoll, C.P. Herzog, G.T. Horowitz, *Physical Review Letters*, 101, 031601 (2008).
- 20 Y. Liu, Q. Pan, B.Wang, *Physics Letters B*, 702, 94–99 (2011).
- 21 A. Bravetti, D. Momeni, R. Myrzakulov, H. Quevedo, *General Relativity and Gravitation*, 45 (8), 1603-1617 (2013).
- 22 A.B. Altaybaeva, *Geometrothermodynamics of some topological objects: Monograph*, (Nur-Sultan, 2019), 147 p.