ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА. ФИЗИКА ЯДРА И ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

МИР МИНКОВСКОГО В СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И 3-МЕРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ЛОБАЧЕВСКОГО

Т.А. Кожамкулов, А.Г. Мурзагалиева, П.Н. Ким
КазНУ им. аль-Фараби, г. Алматы

В данной работе показывается существование 3-мерной пространственно-подобной гиперповерхности с отрицательной кривизной в 4-мерном пространственно-временном мире Минковского даже в рамках СТО. Такой же метрикой обладает пространство относительной релятивистской скорости, где роль масштабного фактора “a” играет $c/2$. Устремление их в бесконечность, в первом случае ($a = inv = \infty$) приводит к евклидовости, во втором - к обычной относительной скорости в механике Ньютона.

Инвариантное выражение относительно преобразований Лоренца

$$\pm\left(x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2\right) = I_1 \tag{1}$$

по одному представлению Г. Минковского можно представить как

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = I_1 \tag{2}$$

где $x_1 = x; x_2 = y; x_3 = z; x_4 = ict$. В этом случае преобразования Лоренца – 4-мерные линейные ортогональные.
Тогда, поскольку $v \prec c$

$$-c^2t^2\left(1 - v^2/c^2\right) = I_1 \prec 0 \tag{3}$$

Рассмотрим 4-мерную квадратичную форму в этом мире Минковского

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 \tag{4}$$

совместно с (2), откуда

$$dx_4^2 = \frac{\left(x_1dx_1 + x_2dx_2 + x_3dx_3\right)^2}{\left(I_1 - \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)\right)}$$

поэтому (4) будет равно

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + \frac{\left(x_1dx_1 + x_2dx_2 + x_3dx_3\right)^2}{\left(I_1 - \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)\right)} \tag{5}$$

(5) удобно представить в сферических пространственных координатах

$$\begin{cases} x_1 = r\sin\theta\cos\alpha \\ x_2 = r\sin\theta\sin\alpha \\ x_3 = r\cos\theta \end{cases} \tag{6}$$

откуда

$$ds^2 = dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\alpha^2 + \frac{r^2dr^2}{\left(I_1 - r^2\right)} = \frac{dr^2}{\left(1 + \dfrac{r^2}{|I_1|}\right)} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\alpha^2\right) \tag{7}$$

где $|I_1| > 0$ - модуль инварианта.
Обозначим

$$|I_1| \equiv a^2 > 0$$

следовательно, a - вещественная величина.
Тогда

$$ds^2 = \frac{dr^2}{\left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right)} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\alpha^2\right) \tag{8}$$

Согласно (2)

$$r^2 + x_4^2 = -a^2$$

следовательно,

$$\begin{cases} r = ash\chi \\ x_4 = iach\chi \end{cases} \tag{9}$$

где χ - радиальная координата, a - масштабный фактор.
Теперь (8) запишется

$$ds^2 = a^2\left[d\chi^2 + sh^2\chi\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\alpha^2\right)\right] \tag{10}$$

(2) – уравнение 3-мерной гиперповерхности в мире Минковского. Уравнения (8) или (10) есть уравнение (4), рассматриваемое совместно с (2), где исключена времениподобная координата x_4.

Аналогичное выражение получится и при втором представлении Минковского

$$x^{0^2} - x^{1^2} - x^{2^2} - x^{3^2} = I_2 \tag{11}$$

где $x^0 = ct; x^1 = x; x^2 = y; x^3 = z$. Преобразования Лоренца линейные, но неортогональные.

Теперь рассмотрим относительную релятивистскую скорость двух частиц. Согласно 4-мерному вектору скорости

$$U^\mu = \begin{Bmatrix} \chi \\ \frac{1}{c}\chi\vec{u} \end{Bmatrix} \tag{12}$$

где $\vec{U}\left(U_x, U_y, U_z\right)$- 3-мерный вектор скорости; $\chi = \dfrac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$

Пусть 3-мерный вектор скорости первой частицы - $\vec{a}_1$, второй частицы - $\vec{a}_2$. Тогда

$$\begin{cases} U_1^\mu = \begin{Bmatrix} \chi_1 \\ \frac{1}{c}\chi_1\vec{a}_1 \end{Bmatrix} \\ U_2^\mu = \begin{Bmatrix} \chi_2 \\ \frac{1}{c}\chi_2\vec{a}_2 \end{Bmatrix} \end{cases} \tag{13}$$

где $\begin{cases} \chi_1 = \dfrac{1}{\sqrt{1-a_1^2/c^2}} \\ \chi_2 = \dfrac{1}{\sqrt{1-a_2^2/c^2}} \end{cases}$.

Относительную скорость двух инерциальных систем отсчета (ИСО) обозначим $\vec{v}$, тогда матрица, составленная из коэффициентов лоренцовых преобразований в представлении (11), имеет вид

$$\Lambda^{\alpha}_{\cdot\beta} = \begin{pmatrix} \chi & \pm\frac{v}{c}\chi & 0 & 0 \\ \pm\frac{v}{c}\chi & \chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{14}$$

где $\chi = \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, т.е. выберем знак (+).

В рамках специальной теории относительности (СТО)

$$g_{00} = 1; g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$$
$$U_{\mu} = g_{\mu\nu}U^{\nu}$$

Образуем инвариант относительно преобразований Лоренца.

$$\overset{0}{U}_{\mu}\overset{0}{U}{}^{\mu} = U_{\mu}U^{\mu}$$

Знак "0" относится к ИСО ($\overset{0}{\Sigma}$).

Если считать, что относительно $\overset{0}{\Sigma}$ первая частица покоится, а вторая движется со скоростью $\vec{a} = \vec{v}$, то

$$\overset{0}{U}_{\mu} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \overset{0}{U}{}^{\mu} = \begin{Bmatrix} \chi_2 \\ \frac{1}{c}\chi_2\vec{v} \end{Bmatrix} \tag{15}$$

следовательно, в $\overset{0}{\Sigma}$

$$\overset{0}{U}_{\mu}\overset{0}{U}{}^{\mu} = \chi_2 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = inv$$

В Σ

$$U_{\mu}U^{\mu} = \chi_1\chi_2\left[1 - \frac{1}{c^2}(\vec{a}_1\vec{a}_2)\right]$$

Из равенства

$$\overset{0}{U}_{\mu}\overset{0}{U}{}^{\mu}=U_{\mu}U^{\mu}=inv$$

получим

$$\vec{v}^{2}=c^{2}\left\{\frac{\left[1-2\frac{(\vec{a}_1\vec{a}_2)}{c^2}+\frac{(\vec{a}_1\vec{a}_2)^2}{c^4}-1+\frac{\vec{a}_1^{\,2}}{c^2}+\frac{\vec{a}_2^{\,2}}{c^2}-\frac{(\vec{a}_1^{\,2}\vec{a}_2^{\,2})}{c^4}\right]}{\left[1-\frac{(\vec{a}_1\vec{a}_2)}{c^2}\right]^2}\right\} \tag{16}$$

Учитывая, что

$$\frac{a_1^{\,2}a_2^{\,2}}{c^4}-\frac{(\vec{a}_1\vec{a}_2)^2}{c^4}=\frac{[\vec{a}_1\times\vec{a}_2]}{c^4}$$

$$-2\frac{(\vec{a}_1\vec{a}_2)}{c^2}+\frac{\vec{a}_1^{\,2}}{c^2}+\frac{\vec{a}_2^{\,2}}{c^2}=\frac{(\vec{a}_2-\vec{a}_1)^2}{c^2}$$

(16) запишется

$$\vec{v}^{2}=\left\{\frac{\left[(\vec{a}_2-\vec{a}_1)^2-\frac{[\vec{a}_1\times\vec{a}_2]^2}{c^2}\right]}{\left[1-\frac{(\vec{a}_1\vec{a}_2)}{c^2}\right]^2}\right\} \tag{17}$$

Как видим из (17), при $c\to\infty$ получается известное выражение для относительной скорости в классической физике.

Во-вторых, $\vec{v}^{2}$- квадратичная форма в пространстве скоростей. В (17) представим $\vec{a}_1=\vec{a};\ \vec{a}_2=\vec{a}+d\vec{a};\ \vec{v}^{2}=ds^2$, тогда получим:

$$\vec{v}^{2}=ds^2=\frac{(da)^2+a^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta d\alpha^2\right)}{\left(1-\frac{a^2}{c^2}\right)^2} \tag{18}$$

(18) можно представить

$$ds^2=c^2\left\{\frac{d\left(\frac{a}{c}\right)^2+\frac{a^2}{c^2}\left(d\theta^2+\sin^2\theta d\alpha^2\right)}{\left(1-\frac{a^2}{c^2}\right)^2}\right\} \tag{19}$$

Если введём $th\chi=\frac{a}{c}$, тогда (19) запишется

$$ds^2=\left(\frac{c}{2}\right)^2\left\{d\overline{\chi}^2+sh^2\overline{\chi}\left(d\theta^2+\sin^2\theta d\alpha^2\right)\right\} \tag{20}$$

Уравнения (10) и (20) совершенно одинаковы. В последнем роль “a” из (10) играет $\left(\frac{c}{2}\right)$ из (20). Поэтому вычислим гауссову кривизну (10), затем аналогично запишем для (20).

В (10) $x^1 = \chi; x^2 = \theta; x^3 = \alpha$ и соответственно ковариантные составляющие метрического тензора равны

$$\begin{cases} \gamma_{11} = a^2; \\ \gamma_{22} = a^2 sh^2 \chi; \\ \gamma_{33} = a^2 \sin^2 \theta \cdot sh^2 \chi \end{cases} \tag{21}$$

Из скобок Кристоффеля отличные от нуля:

- $\lambda_{ii}^i = \frac{1}{2}\gamma^{ii}\frac{\partial \gamma_{ii}}{\partial x^i}$

$\lambda_{11}^1 = \lambda_{22}^2 = \lambda_{33}^3 = 0$

- $\lambda_{mm}^i = -\frac{1}{2}\gamma^{ii}\frac{\partial \gamma_{mm}}{\partial x^i} \quad i \neq m$

$\lambda_{22}^1 = -sh\chi \cdot ch\chi; \lambda_{33}^1 = -\sin^2\theta \sin\chi \cdot ch\chi; \lambda_{33}^2 = -\sin\theta\cos\theta$

- $\lambda_{mi}^i = \frac{1}{2}\gamma^{ii}\frac{\partial \gamma_{ii}}{\partial x^m} \quad i \neq m$

$\lambda_{12}^2 = cth\chi; \lambda_{13}^3 = cth\chi; \lambda_{23}^3 = cth\theta$

- $\lambda_{mk}^i = 0 \quad i \neq m \neq k$ (22)

Согласно формулам, получаемым на основе теоремы Шура, гауссовы кривизны Г равны:

$$\Gamma_1 = \frac{P_{2323}}{\gamma_{22}\gamma_{33} - \gamma_{23}^2}; \Gamma_2 = \frac{P_{3131}}{\gamma_{33}\gamma_{11} - \gamma_{31}^2}; \Gamma_3 = \frac{P_{1212}}{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2} \tag{23}$$

где Γ_1-гауссова кривизна проекции рассматриваемой 3-мерной гиперповерхности на координатную ось x^1, Γ_2-гауссова кривизна проекции 3-мерной гиперповерхности на координатную ось x^2, Γ_3- гауссова кривизна проекции 3-мерной гиперповерхности на координатную ось x^3.

3-мерный тензор Римана (кривизны)

$$P_{klm}^i = \lambda_{km,l}^i - \lambda_{kl,m}^i + \lambda_{km}^q \lambda_{ql}^i - \lambda_{kl}^q \lambda_{qm}^i \tag{24}$$

откуда

$$P_{iklm} = \gamma_{it} P_{klm}^t$$

Согласно (22) отличные от нуля компоненты:

$$P_{2323} = -a^2 sh^4 \chi \sin^2\theta; P_{3131} = -a^2 sh^2 \chi \sin^2\theta; P_{1212} = -a^2 sh^2 \chi \tag{25}$$

В результате по (23)

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = -\frac{1}{a^2} \prec 0 \qquad (26)$$

(10) является 3-мерной гиперсферой с отрицательной гауссовой кривизной, т.е. 3-мерным пространством Лобачевского.

Аналогичные вычисления для (20):

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = -\frac{4}{c^4} \prec 0 \qquad (27)$$

(27) позволяет сделать заключение о том, что пространство относительных релятивистских скоростей есть тоже 3-мерное пространство Лобачевского.

В классическом нерелятивистском приближении, что равносильно $c \to \infty$, из (27) получим

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = 0 \qquad (28)$$

т.е. пространство является евклидовым.

Литература

1 Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля – М., 1988.

2. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ М.,1967.

3. Мурзагалиев Г.Ж., Мурзагалиева А.Г. Вторые фесенковские чтения. - Алматы, 2007. - С.73-75.

АРНАЙЫ САЛЫСТЫРМАЛЫ ТЕОРИЯСЫНДА МИНКОВСКИЙДІҢ ӘЛЕМІ ЖӘНЕ 3-ӨЛШЕМДІ ЛОБАЧЕВСКИЙДІҢ ГЕОМЕТРИЯСЫ

Т.Ә. Қожамқұлов, Ә.Ғ. Мырзағалиева, П.Н. Ким

Дербес салыстырмалық теориясы аумағының өзінде Минковскийдің кеңілтік – уақыт әлемінде қисықтылығы теріс 3-өлшемді кеңістік тәріздес гипебет барлығы көрсетіледі. Релятивті салыстырмалы жылдамдық кеңістігінің де метрикасы дәл сондай болып шығады да, масштабтық факторы $c/2$ тең. Егерде оларды шексіздікке умытылдырсақ, бірінші жағдайда евклид кеңістігін алсақ, бекінші жаңғдайда Ньютон механикасындағы салыстырмалы жылдамдықты аламыз.

MINKOWSKI WORLD IN SPECIAL THEORY OF RELATIVITY AND 3-DIMENTIONAL GEOMETRY OF LOBACHEWSKI

T.A. Kozhamkulov, A.G. Murzagalieva,, P.N. Kim

Existence of 3-dimentinal spacelike hypersurface with negative curvature in 4-dimentional space-time Minkowski world even within the limits of special theory of relativity shows. The space of relative relativistic velocity where the role of the scale factor “ a ” plays $c/2$ has the same metric. Trending them to infinity in the first case ($a = inv = \infty$) leads to Euclidean space, in the second case - to usual relative velocity in the mechanic of Newton.