АСИМПТОТИКА МУЛЬТИКЛАСТЕРНЫХ ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ В БИНАРНЫХ СИЛЬНО СВЯЗАННЫХ КАНАЛАХ. 1. ЭЛЕМЕНТЫ ФОРМАЛИЗМА

Н.В. Афанасьева, Н.А. Буркова, К.А. Жаксыбекова, Ч.З. Кабытаев
Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы

Представлен математический формализм расчета асимптотических констант для радиальных волновых функций в бинарных кластерных связанных каналах, построенных методом проектирования.

Ранее на основе потенциальных кластерных моделей легких ядер (бинарных и трехчастичных мультикластерных моделей с Паули проектированием) нами была разработана теория построения бинарных радиальных волновых функций (ВФ) в сильно связанных каналах фрагментации ядер с ярко выраженной кластерной структурой, отличной от конфигурации исходного ядра [1,2]. Предложенный метод (далее будем на него ссылаться как на *метод динамической кластеризации* – МДК) был апробирован в расчетах спектроскопических характеристик распадов ${}^7\mathrm{Li}\{\alpha\mathrm{t}\} \to \mathrm{n}^6\mathrm{Li}\{\alpha\mathrm{np}\}$, ${}^7\mathrm{Li}\{\alpha\mathrm{t}\} \to \mathrm{p}^6\mathrm{He}\{\alpha\mathrm{nn}\}$, ${}^7\mathrm{Be}\{\alpha\tau\} \to \mathrm{p}^6\mathrm{Li}\{\alpha\mathrm{np}\}$, ${}^7\mathrm{Be}\{\alpha\tau\} \to \mathrm{n}^6\mathrm{Be}\{\alpha\mathrm{pp}\}$, ${}^9\mathrm{Be}\{\alpha\alpha\mathrm{n}\} \to \mathrm{p}^8\mathrm{Li}\{\alpha\mathrm{tn}\}$, ${}^9\mathrm{Be}\{\alpha\alpha\mathrm{n}\} \to \mathrm{d}^7\mathrm{Li}\{\alpha\mathrm{t}\}$, ${}^9\mathrm{Be}\{\alpha\alpha\mathrm{n}\} \to \mathrm{t}^6\mathrm{Li}\{\alpha\mathrm{np}\}$ и ${}^9\mathrm{Be}\{\alpha\alpha\mathrm{n}\} \to \tau^6\mathrm{He}\{\alpha\mathrm{nn}\}$ (здесь в фигурных скобках указан тип кластерной функции) с образованием тяжелых фрагментов как в основном, так в низколежащих возбужденных состояниях. Сравнение с имеющимися экспериментальными данными и расчетами в многочастичной модели оболочек показывают хорошее согласие с результатами настоящего подхода [1,2].

Очевидно, что в рамках нашей теории в процессах фрагментации ядра задействованы различные довольно сложные волновые функции вторичных ядер, каждая из которых отражает свой определенный тип корреляций. Таким образом, открываются совершенно *новые возможности* исследования структуры легких ядер по сравнению с бинарными кластерными моделями.

Особый интерес представляет эффект сжатия двухнуклонной NN-пары в поле α-частицы. Дело в том, что в кластерных каналах ${}^9\mathrm{Be}\{2\alpha\mathrm{n}\} \to {}^8\mathrm{Li}\{\alpha\mathrm{tn}\}+\mathrm{p}$ и ${}^9\mathrm{Be}\{2\alpha\mathrm{n}\} \to {}^6\mathrm{Li}\{\alpha\mathrm{np}\}+\mathrm{t}$ можно выделить *виртуальный* кластер ”^{5}He” , который может быть сконструирован как ${}^5\mathrm{He}\{\alpha\mathrm{n}\}$ или ${}^5\mathrm{He}\{\mathrm{td}\}$. Хорошо известно, что для свободных частиц канал $\alpha+\mathrm{n} \to \mathrm{t}+\mathrm{d}$ сильно подавлен. Однако, если следовать гипотезе сжатия *виртуального* кластера ”^{5}He” в поле α-частицы, вероятность перекрывания каналов ${}^5\mathrm{He}\{\alpha\mathrm{n}\}$ и ${}^5\mathrm{He}\{\mathrm{td}\}$ должна значительно увеличиться. Исследование этого вопроса *актуально* с точки зрения дальнейшего развития теории, а именно возможности построения αtd-модели ядра ^{9}Be.

Следует заметить, что при построении трехчастичных волновых функций, которые задействованы в МДК, задача сводится к бесконечномерной системе связанных интегро-дифференциальных уравнений с парными кластер-кластерными потенциалами, которая реально решается на урезанном базисе. Такая аппроксимация, очевидно, влияет на асимптотику радиальных волновых функций, “корректность” которой определяется экспоненциальным спаданием на больших расстояниях. Требование “корректной” асимптотики является особенно жестким для гало-ядер, таких как ^{6}He, ^{6}Li, ^{6}Be, ^{8}Li, ^{9}Be, ^{9}Li, ^{11}Li и т.д. В настоящее время для этих ядерных систем имеются математические разработки расчета трехчастичных асимптотических нормировочных факторов (ТАНФ), которые позволяют оценить устойчивость решений для дискретного спектра на укороченном базисе [3-5].

В настоящей работе рассмотрен упрощенный вариант исследования асимптотического поведения радиальных функций, построенных в рамках МДК формализма, который фактически сводится к расчету асимптотической константы в двухтельной задаче.

Будем исходить из стандартного уравнения Шредингера для радиальных ВФ задачи на связанные состояния [6]

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{2\mu}{\hbar^2}\Big[E_{связи}-V(r)\Big]u=0\,, \tag{1}$$

где μ – приведенная масса в бинарном канале. Потенциал взаимодействия в выражении (1) состоит из ядерного, кулоновского и центробежного $V(r)=V_{яд}+V_{кул}+V_{цб}$ соответственно.

Далее, поскольку нас интересует только асимптотика функции $u(r)\big|_{r\to\infty}\equiv u_a$, пренебрегаем ядерным потенциалом взаимодействия. Перепишем уравнение (1) для асимптотической функции

$$\frac{d^2u_a}{dr^2}+\left(-k_0^2-\frac{2\gamma k_0}{r}-\frac{l(l+1)}{r^2}\right)u_a=0\,. \tag{2}$$

Здесь введены следующие обозначения: $k_0^2=-\dfrac{2\mu E_{связи}}{\hbar^2}$; $\gamma=z_1z_2\cdot\dfrac{e^2}{\hbar c}\cdot\dfrac{\mu c^2}{\hbar c}\cdot\dfrac{1}{k_0}$ – кулоновский параметр, при этом кулоновский потенциал записывается следующим образом $V_{кул}=\dfrac{2\gamma k_0}{r}$.

В (2) перейдем к новой переменной $z=2k_0r$, для чего достаточно просто разделить все слагаемые на фактор $4k_0^2$. Далее, с помощью элементарной замены $l(l+1)=(\mu-1/2)(\mu+1/2)=\mu^2-\dfrac{1}{4}$ уравнение (2) приводится к так называемому “*асимптотическому*” виду

$$\frac{d^2u_a}{dz^2}+\left(-\frac{1}{4}-\frac{\gamma}{z}+\frac{1/4-\mu^2}{z^2}\right)u_a=0\,. \tag{3}$$

Полученное уравнение (3) относится к классу *конфлюэнтных дифференциальных уравнений* (иногда их называют *вырожденными гипергеометрическими* уравнениями) [7-9], а именно сопоставляется частному случаю – уравнению *Уиттекера*:

$$\frac{d^2W_{k\mu}}{dz^2}+\left(-\frac{1}{4}+\frac{k}{z}+\frac{1/4-\mu^2}{z^2}\right)W_{k\mu}=0\,. \tag{4}$$

Для численных расчетов удобно использовать интегральное представление для функций Уиттекера $W_{k\mu}(z)$ (например, из [6])

$$W_{k\mu}(z)=\frac{z^ke^{-z/2}}{\Gamma\left(1/2-k+\mu\right)}\int_0^\infty t^{-k-1/2+\mu}\left(1+t/z\right)^{k-1/2+\mu}e^{-t}dt\,. \tag{5}$$

В выражении (5) используется *гамма-функция,* которая имеет следующее аналитическое представление

$$\Gamma(z)=\int_0^{\infty} e^{-u}u^{z-1}du\,. \tag{6}$$

Приведем некоторые хорошо известные соотношения для *гамма-функции* [9], которые удобно использовать в численных расчетах

$$\Gamma(z+1)=z\cdot\Gamma(z)\,;\ \Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}\,;\ \Gamma(1)=\Gamma(2)=1\,;\ \Gamma(n+1)=n!\ \text{при}\ n=0,1,2,... \tag{7}$$

Сравнивая уравнения (3) и (4), запишем решение радиального уравнения Шредингера для связанного состояния $R_{lj}(r)=\dfrac{u_{lj}(r)}{r}$ на асимптотике через функции Уиттекера

$$R_{lj}(r)=\frac{\sqrt{2k_0}}{r}\cdot C_0\cdot W_{\gamma l}(2k_0 r)\,, \tag{8}$$

где C_0 – асимптотическая константа. В численных расчетах используется формула (5) при условии, что параметры и аргумент функции Уиттекера переопределены следующим образом: $k=-\gamma$, $\mu=l+1/2$, $z=2k_0 r$. Итак, вместо (5) имеем рабочее выражение

$$W_{\gamma l}(z)=\frac{z^{-\gamma}e^{-z/2}}{\Gamma\left(\gamma+l+1\right)}\int_0^{\infty} t^{l+\gamma}\left(1+t/z\right)^{l-\gamma} e^{-t}dt\,. \tag{9}$$

Для расчетов функций $\Gamma(\gamma+l+1)$ и $W_{\gamma l}(2k_0 r)$ можно использовать различные алгоритмы, при этом следует иметь в виду, что соответствующие интегралы в (9) сходятся довольно медленно. Для того, чтобы проконтролировать точность численных расчетов, мы предлагаем использовать следующие частные выражения, которые получаются из формул (9) и (6), (7) при значении кулоновского параметра $\gamma=0$:

$$W_{0,l}(z)=\frac{e^{-z/2}}{\Gamma\left(l+1\right)}\int_0^{\infty} t^{l}\left(1+t/z\right)^{l} e^{-t}dt\,,\ \text{или} \tag{10а}$$

$$W_{0,l}(z)=\frac{e^{-z/2}}{\Gamma\left(l+1\right)}\sum_{n=0}^{l} z^{-n}\binom{l}{n}\cdot\Gamma(l+n+1)=e^{-z/2}\sum_{n=0}^{l} z^{-n}\,\frac{(l+n)!}{(l-n)!n!}\,. \tag{10б}$$

Очевидно, что формулы (10) следует использовать непосредсвенно для расчета асимптотической константы C_0 в однонуклонных нейтронных каналах. Кроме этого, сравнение расчетов по точным формулам (6), (9) и частным (10) позволяет проанализировать эффект кулоновского взаимодействия.

Следует отметить, что в работах [10, 11] представлено описание математических и численных методов, некоторых программных алгоритмов и компьютерных программ на языке “Turbo Basic” для решения уравнения Шредингера, в частности, и в асимптотической области. В этих монографиях также собран достаточно обширный экспериментальный и теоретический материал по асимптотическим константам в чисто двухкластерных каналах.

Итак, в настоящей работе представлены элементы математического формализма, которые позволяют оценить методическую сторону поставленной выше задачи расчета асимптотических констант в бинарных сильно связанных каналах, построенных методом проектирования. Полученные соотношения будут использованы в дальнейшем для описания конкретных каналов фрагментации.

Литература

1. Буркова Н.А., Жаксыбекова К.А., Григораш С.С., Сагиндыков Ш.Ш. Особенности двухчастичной фрагментации ядра ^{9}Be в $2\alpha n$ представлении с отделением изотопов лития ^{6,7,8}Li // Вестник КазНУ. Сер.физ. 2004. № 1(16). С. 3-13.
2. Буркова Н.А., Жаксыбекова К.А., Жусупов М.А. Потенциальная теория кластерного фоторасщепления легких ядер // ЭЧАЯ. 2005. Т. 36, вып. 4. С. 801-868.
3. Меркурьев С.П. Об асимптотическом виде трехчастичных волновых функций дискретного спектра // ЯФ. 1974. Т. 19, вып. 2. С. 447-461.
4. Yarmukhamedov R., Baye D., Lecqlerq-Willain C. Asymptotics of the three-body bound state radial wave functions of halo nuclei // Nucl. Phys. A. 2002. V. 705. P. 335-351.
5. Блохинцев Л.Д., Убайдуллаева М.К., Ярмухамедов Р. Координатная асимптотика радиальной трехчастичной волновой функции связанного состояния с двумя заряженными частицами // ЯФ. 2005. Т. 68, №8. С. 1427-1435.
6. Давыдов А.С. Квантовая механика. – М.: Наука, 1973, 703 с.
7. Arfken G. Mathematical methods for Physicists. – NY and London: Academic press, 1967, p. 655.
8. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. – М.: Наука, 1964, 344 с.
9. Абрамовиц М., Стиган С. Справочник по специальным функциям. – М.: Наука, 1979, 832 с.
10. Дубовиченко С.Б. Свойства легких атомных ядер в потенциальной кластерной модели. – Алматы: Данекер, 2004. 247 с.
11. Дубовиченко С.Б. Методы расчета ядерных характеристик. Модели – методы - программы. – Алматы: изд-во КазАТ и СО, 2006. 311 с.

КҮШТІ БАЙЛАНЫСҚАН БИНАРЛЫҚ КАНАЛДАРДАҒЫ МУЛЬТИКЛАСТЕРЛІК ТОЛҚЫНДЫҚ ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ АСИМПТОТИКАСЫ. 1. ФОРМАЛИЗМ ЭЛЕМЕНТТЕРІ

Н.В. Афанасьева, Н.А. Буркова, К.А. Жақсыбекова, Ч.З. Қабытаев

Проектирлеу әдісімен түзілген бинарлық кластерлік байланысқан каналдардағы радиалдық толқындық функциялар үшін асимптотикалық константтарды есептеудің математикалық формализмі келтірілген.

ASYMPTOTICS OF THE MULTICLUSTER WAVE FUNCTIONS IN THE BINAR STRONG BIND CHANNELS. 1. ELEMENTS OF THE FORMALISM

N.V. Afanas'eva, N.A. Burkova, K.A. Zhaksybekova, Ch.Z. Kabytaev

The mathematic formalism for the calculation of the asymptotic constants of the radial wave functions in the binary strong bind cluster channels constructed by projecting method is present.