

# НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ НА СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ

С.Б. Дубовиченко

*Астрофизический институт им. В.Г. Фесенкова, г. Алматы*

Рассмотрены нестандартные методы численного решения уравнения и системы уравнений Шредингера с тензорными силами в задачах ядерной физики низких энергий и ядерной астрофизики, непосредственно применимые для анализа связанных состояний атомных ядер в потенциальной кластерной модели.

## Введение

Множество задач ядерной физики, особенно в области низких энергий, требует умения решать уравнение Шредингера или связанную систему уравнений такого типа. Результатом решения является волновая функция, которая описывает квантовое состояние некоторой системы ядерных частиц и, в принципе, содержит всю информацию о таком состоянии.

Существует довольно много различных математических методов решения дифференциальных уравнений или их систем второго порядка типа уравнение Шредингера. Однако в литературе обычно приводятся довольно абстрактные методы решений таких уравнений, которые бывает достаточно сложно применить для решения именно уравнения Шредингера в конкретной задаче. Проблему обычно составляет выбор оптимального математического метода, применимого для рассмотрения определенного круга задач, основанных на решениях уравнения Шредингера.

Решению некоторых из этих проблем и посвящена данная работа, которая описывает некоторые математические методы, непосредственно применимые для нахождения волновых функций из уравнения Шредингера или систем таких уравнений в задачах ядерной физики низких энергий на связанные состояния двух или трех частиц.

## Метод невязок для решения задачи на собственные значения системы уравнений Шредингера

Для нахождения энергии и волновых функций (ВФ) связанных состояний двухчастичной ядерной системы с тензорными потенциалами в определенных задачах ядерной физики будем исходить из обычных уравнений Шредингера вида [1]

$$\begin{aligned} u''(r) + [k^2 - V_c(r) - V_{cul}(r)]u(r) &= \sqrt{8} V_t(r)w(r), \\ w''(r) + [k^2 - V_c(r) - 6/r^2 - V_{cul}(r) + 2 V_t(r)]w(r) &= \sqrt{8} V_t(r)u(r), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $V_{cul}(r) = 2\mu/\hbar^2 Z_1 Z_2/r$  - кулоновский потенциал;  $Z_1, Z_2$  - заряды частиц;  $\mu$  - приведенная масса двух частиц; константа  $\hbar^2/M_N = 41.4686$  (или 41.47) МэВ Фм<sup>2</sup>;  $M_N$  - средняя масса нуклона;  $k^2 = 2\mu E/\hbar^2$  - волновое число относительного движения частиц;  $E$  - энергия относительного движения частиц;  $V_c = 2\mu/\hbar^2 V_{cn}(r)$  - центральная часть потенциала;  $V_t = 2\mu/\hbar^2 V_{ct}(r)$  - тензорная часть потенциала;  $V_{cn}(r), V_{ct}(r)$  - радиальная часть центрального и тензорного потенциала, которые могут быть представлены в виде гауссойды или экспоненты вида  $V_{cn}(r) = V_{c0} \exp(-\alpha r)$ , здесь  $V_{c0}$  - глубина потенциала,  $\alpha$  - его ширина.

Решением этой системы уравнений являются четыре волновые функции, получающиеся с различными начальными условиями

$$\begin{aligned} 1) \quad & u_1(0)=0, \quad u_1'(0)=1, \quad w_1(0)=0, \quad w_1'(0)=0, \\ 2) \quad & u_2(0)=0, \quad u_2'(0)=0, \quad w_2(0)=0, \quad w_2'(0)=1, \end{aligned}$$

которые образуют линейно независимые комбинации, представляемые в виде (для S и D орбитальных состояний при  $L = 0$  и 2)

$$u = \chi_0 = C_1 u_1 + C_2 u_2 = \exp(-kr) ,$$

$$w = \chi_2 = C_1 w_1 + C_2 w_2 = [1 + 3/kr + 3/(kr)^2] \exp(-kr)$$

или с учетом кулоновских сил

$$\chi_0 = C_1 u_1 + C_2 u_2 = W_{\eta,0}(2kr) , \quad \chi_2 = C_1 w_1 + C_2 w_2 = W_{\eta,2}(2kr) ,$$

где  $W_{\eta,L}(2kr) = W_{\eta L}(Z)$  - функция Уиттекера [1] для связанных состояний, которая является решением исходных уравнений (1) при  $k^2 < 0$  без ядерных потенциалов;  $Z = 2kR$ ;  $\eta = \frac{\mu Z_1 Z_2}{k \hbar^2}$  - кулоновский параметр;

Для нахождения энергий ( $k^2$ ) и волновых функций связанных состояний ядерной системы  $\chi_L$  с тензорной компонентой потенциала можно использовать комбинацию численных и вариационных методов.

А именно, при некоторой заданной энергии связанного состояния (которая не является собственным значением задачи) численным методом находится ВФ системы (1). Для этого можно использовать, например, обычный метод Рунге - Кутты.

Затем система уравнений (1) представляется в конечно - разностном виде, с выражением второй производной в центральных разностях

$$u = (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})/h^2 .$$

Тогда для исходной системы получим

$$u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} + h^2 [k^2 - V_c - V_{cul}] u_i = h^2 \sqrt{8} V_t w_i ,$$

$$w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1} + h^2 [k^2 - V_c - 6/r^2 - V_{cul} + 2 V_t] w_i = h^2 \sqrt{8} V_t u_i$$

или

$$u_{i+1} + h^2 [ - 2/h^2 + k^2 - V_c - V_{cul}] u_i + u_{i-1} - h^2 \sqrt{8} V_t w_i = 0 ,$$

$$w_{i+1} + h^2 [ - 2/h^2 + k^2 - V_c - 6/r^2 - V_{cul} + 2V_t] w_i + w_{i-1} - h^2 \sqrt{8} V_t u_i = 0 .$$

Найденная методом Рунге-Кутты, численная ВФ подставляется в эту систему уравнений. Левая часть этих уравнений будет равна нулю только в случае, когда энергия и ВФ являются собственными решениями такой задачи. При произвольной энергии и найденной по ней ВФ левая часть будет отлична от нуля, и можно говорить о методе невязок [2], который позволяет оценить степень точности нахождения собственных функций и собственных значений.

Из численных уравнений вида

$$N_{si} = u_{i+1} + h^2 [ - 2/h^2 + k^2 - V_c - V_{cul}] u_i + u_{i-1} - h^2 \sqrt{8} V_t w_i ,$$

$$N_{ti} = w_{i+1} + h^2 [ - 2/h^2 + k^2 - V_c - 6/r^2 - V_{cul} + 2V_t] w_i + w_{i-1} - h^2 \sqrt{8} V_t u_i$$

вычислялась сумма невязок в каждой точке численной схемы

$$N_s = \sum_i N_{si} , \quad N_t = \sum_i N_{ti} .$$

Варьируя энергию связи ( $k^2$ ), проводилась минимизация значений всех невязок

$$\delta [ |N_s(k^2)| + |N_t(k^2)| ] = 0 .$$

Энергия ( $k^2$ ), дающая минимум невязок, считалась собственной энергией  $k_0^2$ , а функции  $u_0$  и  $w_0$ , приводящие к этому минимуму - собственными функциями задачи, т.е. ВФ связанного состояния ядерной системы.

На основе приведенных выражений, на алгоритмическом языке "Basic" в среде компилятора "TurboBasic" фирмы Borland, была написана компьютерная программа [3], которая использовалась для вычисления ядерных характеристик дейтрона и связанных состояний в

${}^4\text{He}^2\text{H}$  кластерной системе ядра  ${}^6\text{Li}$ .

Программа тестировалась на нуклон - нуклонном потенциале Рейда [4] и сравнение результатов, полученных в работе [4], с найденными по разработанной здесь программе, приведены в табл.1, где использованы следующие обозначения:  $E_d$  – энергия связи дейтрона в МэВ;  $R_d$  – среднеквадратичный радиус дейтрона в Фм;  $Q_d$  – квадрупольный момент дейтрона в  $\text{Фм}^2$ ;  $P_d$  – вероятность D – состояния в дейтроне в %;  $A_s$  – асимптотическая константа S – волны;  $\eta$  – отношение асимптотических констант D и S волн;  $a_t$  – триплетная длина нуклон – нуклонного рассеяния в Фм;  $a_s$  – синглетная длина нуклон – нуклонного рассеяния в Фм;  $r_t$  – триплетный эффективный радиус нуклон – нуклонного рассеяния в Фм;  $r_s$  – синглетный эффективный радиус нуклон – нуклонного рассеяния в Фм.

Таблица 1. Сравнение характеристик дейтрона и пр рассеяния.

Хар-ки дейтрона	Расчет Рейда	Наш Расчет
$E_d$ , МэВ	2.22464	2.22458
$Q_d$ , $\text{Фм}^2$	0.2762	0.2757
$P_d$ , %	6.217	6.217
$A_s$	0.87758	0.875(2)
$\eta=A_D/A_S$	0.02596	0.0260(2)
$a_t$ , Фм	5.390	5.390
$r_t$ , Фм	1.720	1.723
$a_s$ , Фм	-17.1	-17.12
$r_s$ , Фм	2.80	2.810
$R_d$ , Фм	1.956	1.951

Из этих результатов видно, что совпадение наших и предыдущих расчетов по энергии связанного состояния дейтрона имеет величину порядка нескольких тысячных процента. Ошибки в асимптотических константах получены усреднением их значений в области 10-15 Фм и в пределах этих ошибок согласуются с результатами работы [4]. Низкоэнергетические пр характеристики, по сути, совпадают между собой с точностью до ошибок округления. Величина квадрупольного момента и среднеквадратичного радиуса несколько меньше, полученных в работе [4]. Это обусловлено тем, что в наших расчетах не учитывался очень длинный хвост ВФ, и интегрирование проводилось только до 20 Фм.

Рассмотренный вариационный метод сходится достаточно быстро - в течение нескольких минут на компьютере P4 3.0 МГц, позволяет получать практически любую реальную точность, при использовании в программе двойной точности, и может применяться при решении любых задач на собственные значения для системы двух дифференциальных уравнений, типа уравнения Шредингера.

Далее этот метод использовался для рассмотрения характеристик связанных состояний кластеров в легких атомных ядрах, в частности, связанного состояния  ${}^2\text{H}^4\text{He}$  кластеров с тензорными силами в атомном ядре  ${}^6\text{Li}$  [5], и позволил получить хорошие результаты по описанию квадрупольного момента этого ядра.

Оказалось, что на основе простых гауссовых потенциалов в качестве центральной и тензорной частей и на базе единых параметров можно правильно описать не только фазы упругого рассеяния, но и среднеквадратичный радиус ядра, квадрупольный момент и асимптотические константы связанного состояния в этом канале.

Правильно получается не только отрицательный знак, но и величина  $\eta_D$ , определяющая отношение асимптотических констант в D и S волнах. Причем только при ее отрицательных значениях можно получить правильный по величине, отрицательный квадрупольный момент

${}^6\text{Li}$ , равный  $-0.064 \text{ Фм}^2$ , который хорошо согласуется с его экспериментальным значением  $-0.0644(7) \text{ Фм}^2$  [6]. Для величины  $\eta_D$  можно получить  $-0.0120(10)$  при экспериментальном значении  $-0.0125(25)$  [7].

### Альтернативный метод решения обобщенной матричной задачи на собственные значения для уравнения Шредингера

Рассмотрим уравнение Шредингера с центральными ядерными силами для волновой функции системы двух частиц [1]

$$\chi''(r) + [k^2 - V_c(r) - V_{\text{cul}}(r) - L(L+1)/r^2]\chi(r) = 0,$$

где  $\chi(r)$  – скалярная волновая функция для центральных потенциалов, остальные обозначения даны в (1).

Решения этого уравнения для связанных состояний, т.е. при  $k^2 < 0$ , на бесконечности и в нуле подчиняются условиям

$$\chi_L(0) = \chi_L(\infty) = 0.$$

Однако это уравнение, на расстояниях больших, чем радиус действия ядерных сил  $R_0$ , т.е. когда  $V_c(r > R_0) = 0$ , имеет аналитическое решение, называемое его асимптотикой. Поэтому условие на бесконечности можно заменить на требование неразрывности логарифмической производной на границе области ядерного взаимодействия, т.е. при  $r = R_0$  [1]

$$\frac{\chi'_L(R_0)}{\chi_L(R_0)} = \frac{W'_{\eta L}(2kR_0)}{W_{\eta L}(2kR_0)} = f(\eta, L, Z) \quad ,$$

где  $W_{\eta L}(Z)$  - функция Уиттекера для связанных состояний, которая является решением приведенного уравнения при  $k^2 < 0$  без ядерного потенциала;  $Z = 2kR$ ;  $\eta = \frac{\mu Z_1 Z_2}{k\hbar^2}$ .

В том случае, когда в ядерном потенциале не учитывается кулоновское взаимодействие, асимптотика ВФ может быть представлена в наиболее простом виде

$$\chi(r > R_0) = e^{-kr}, \quad \chi'(r > R_0) = -ke^{-kr},$$

где  $k = \sqrt{|k^2|}$  и логарифмическая производная будет просто равна  $-k$ .

Волновые функции в уравнении Шредингера для основных и резонансных состояний представимы в виде разложения по не ортогональному гауссовому базису вида [8]

$$R_L(r) = N_0 r^L \sum_i C_i \exp(-\alpha_i r^2) = \frac{\chi_L(r)}{r} \quad ,$$

где  $\alpha_i$  и  $C_i$  - вариационные параметры и коэффициенты разложения, которые находятся вариационным методом для связанных состояний или аппроксимацией гауссоидами численных волновых функций резонансных уровней;  $N_0$  – нормировка функции.

Сами вариационные параметры  $\alpha_i$  могут быть получены, например, из квадратурной сетки вида [8]

$$\alpha_i = \alpha_0 \text{tg}^2 \{ \pi (2i - 1) / 4N \},$$

где  $i$  – меняется от 1 до  $N$  и может принимать значения 30-50.

Для определения спектра собственных значений энергии и волновых функций в стандартном вариационном методе при разложении ВФ по ортогональному базису решается обычная матричная задача на собственные значения [9]

$$\sum_i (H_{ij} - E I_{ij}) C_i = 0 \quad ,$$

где  $H$  - симметричная матрица гамильтониана;  $I$  - единичная матрица;  $E$  - собственные значения

чения и  $C$  - собственные вектора задачи.

В данном случае, при не ортогональном базисе гауссойд, мы приходим к обобщенной матричной задаче на собственные значения типа [8]

$$\sum_i (H_{ij} - EL_{ij})C_i = 0 ,$$

где  $L$  - симметричная матрица интегралов перекрывания, которая не сводится к единичной матрице  $I$ .

Рассмотрим эту обобщенную матричную задачу на собственные значения и собственные функции для матрицы гамильтониана уравнения Шредингера

$$(H - EL)C=0 \quad (2)$$

Представляя, в таком случае, матрицу  $L$  в виде произведения нижней  $N$  и верхней  $V$  треугольных матриц [10]

$$L = NV$$

находим

$$HC = ENVC$$

или

$$H'C' = EIC' ,$$

где

$$H' = N^{-1}HV^{-1}, \quad C' = VC$$

или

$$C = V^{-1}C' ,$$

$I$  - единичная матрица и  $N^{-1}$  обозначает обратную матрицу.

Тем самым, мы получаем стандартную матричную систему для задачи поиска собственных функций и значений [9] вида

$$(H' - EI)C' = 0,$$

которую можно решать известными методами в общем матричном виде. Процедура перехода, от обобщенной к стандартной задаче, называется ортогонализацией по Шмидту [9]. Вначале находим матрицы  $N$  и  $V$ , выполняя триангуляризацию симметричной матрицы  $L$  [10], например, методом Халецкого [9]. Затем находим обратные матрицы  $N^{-1}$  и  $V^{-1}$  и вычисляем элементы матрицы  $H' = N^{-1}H V^{-1}$ . Находим, далее, полную диагональную по  $E$  матрицу  $(H' - EI)$  и вычисляем ее детерминант  $\det(H' - EI)$  при некоторой энергии  $E$ . Та энергия, которая приводит к нулю детерминанта, является собственной энергией задачи, а соответствующие ей вектора  $C'$  - собственные вектора матричной системы. Зная  $C'$ , не трудно найти и собственные вектора исходной задачи  $C$ , поскольку матрица  $V^{-1}$  уже известна.

В двухтельных задачах легких атомных ядер с одним вариационным параметром  $\alpha_i$  такой метод оказывается достаточно устойчив и позволяет получать реальные результаты. Но в трехтельной ядерной системе, при некоторых значениях двух вариационных параметров  $\alpha_i$  и  $\beta_i$ , метод нахождения обратных матриц иногда приводит к существенной неустойчивости и переполнению при работе компьютерной программы [11], что представляет не малую проблему для решения задач такого типа.

Поэтому можно предложить альтернативный метод решения обобщенной задачи на собственные значения. Матричное уравнение (2) это однородная система линейных уравнений и она имеет не тривиальные решения, только если ее детерминант

$$\det(H - EL) = 0 .$$

Значения  $E$ , которые приводят к нулевому детерминанту, будут собственными значениями. Решения  $C$  такой системы при найденных собственных значениях являются собственными векторами исходной матрицы.

Для численных методов, реализуемых на компьютере, не обязательно разлагать матрицу  $L$  на треугольные и находить новую матрицу  $H'$  и новые вектора  $C'$ , определяя обратные матрицы, как это было описано выше. Можно сразу разлагать на треугольные недиагональную, симметричную матрицу  $(H - EL)$  и численными методами искать энергии, которые приводят к нулю ее детерминанта.

Тем самым, сама матрица  $(H - EL)$  разлагается на две треугольные

$$A = H - EL = NV$$

и вычисляется ее детерминант (поскольку в методе Халецкого  $\det(V)=1$ )

$$\det(A) = \det(N)\det(V)=\det(N)=n_{11}n_{22}\dots n_{ii}\dots n_{mm}$$

по нулю, которого ищутся собственные значения энергии  $E$  системы. Здесь  $m$  – размерность матриц.

Таким образом, мы имеем довольно простую задачу поиска нуля некоторого функционала одной переменной

$$F(E) = 0,$$

решение, которой не представляет большой сложности. Обычными численными методами ищется ноль детерминанта нижней треугольной матрицы, который равен произведению ее диагональных элементов, зависящих от  $E$ .

В результате, мы избавляемся от необходимости искать две обратные матрицы и выполнять несколько матричных умножений, чтобы вначале получить новую матрицу  $H'$ , а затем, конечную матрицу собственных векторов  $C$ .

Для оценки точности решения т.е. точности разложения исходной матрицы на две треугольные, можно использовать метод невязок [2]. После разложения матрицы  $A$  на треугольные, вычисляется матрица невязок, как разность исходной матрицы  $A$  и матрицы

$$S = NV,$$

где  $V$  и  $N$  найденные, таким образом, численные треугольные матрицы. Теперь берется разность по всем элементам с исходной матрицей  $A$

$$AN = S - A.$$

Матрица  $AN$  невязок дает отклонение приближенной величины  $S$ , найденной численными методами, от истинного значения каждого элемента исходной матрицы  $A$ .

Такой метод позволил получить хорошую устойчивость алгоритма решения этой задачи, не приводящего к переполнению при работе компьютерных программ, поскольку он не требует определения обратных к  $V$  и  $N$  матрицы [12].

Для контроля работы метода мы рассматривали трехтелную задачу, в которой функция в уравнении Шредингера разлагается по не ортогональному гауссову базису

$$R_{l,\lambda}(r, R) = N_0 r^\lambda R^l \sum_i C_i \exp(-\alpha_i r^2 - \beta_i R^2). \quad (3)$$

При каждом значении вариационных параметров  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  находим некоторую энергию системы (которая дает ноль детерминанта), а затем, варьируя эти параметры, проводим поиск минимума этой энергии. Затем, увеличиваем размерность базиса  $N$ , и повторяем все вычисления, до тех пор, пока величина собственного значения, т.е. энергии связи  $E_N$ , на очередном шаге  $N$  не будет отличаться от предыдущего значения  $E_{N-1}$  на величину  $\epsilon$ , которая обычно задается на уровне 0.5-0.1%. В соответствии с теоремой Хилерааса – Ундгейма [13] эта минимальная энергия и будет верхним пределом реальной энергией связи в такой ядерной системе.

В наших работах [14] приведен полный текст компьютерной программы на языке TurboBasic, которая предназначена для расчета энергии трехтельной системы на основе опи-

санных выше методов. Для проверки предложенного метода расчета и компьютерной программы рассматривалась модельная задача для трех частиц, взаимодействующих в потенциале Афнана - Танга [15] с усреднением триплетных и синглетных состояний.

Для энергии такой системы в [15] получено -7.74 МэВ, а в работах [16], где использовался не ортогональный вариационный метод с изменением параметров волновой функции на основе тангенциальной сетки, найдено -7.76 МэВ. Нами, на основе изложенных методов, при независимом варьировании всех параметров и размерности базиса  $N = 5$ , получено -7.83 МэВ, т.е. энергия изменилась примерно на 1% относительно результатов работ [15,16].

Далее рассматривалась реальная трехтельная задача для атомного ядра  ${}^7\text{Li}$  в  ${}^4\text{He}^2\text{Hn}$  канале с межкластерными потенциалами, согласованными с фазами ядерного рассеяния и чистыми по схемам Юнга для связанных состояний. Результаты расчета вариационной энергии ядра  ${}^7\text{Li}$ , полученные изложенным методом, с использованием потенциалов из работ [14] и в зависимости от размерности вариационного базиса  $N$  даны в табл.2.

Таблица 2. Результаты вычисления трехтельной энергии.

N	3	5	7	9	10	11
$E({}^7\text{Li}), \text{МэВ}$	-7.68	-8.63	-8.66	-8.678	-8.706	-8.713

Из таблицы видно, что при размерности  $N=9-11$ , энергия системы практически сходится, и дальнейшее увеличение вариационного базиса может привести, по-видимому, к ее изменению на величину порядка 0.01 - 0.02 МэВ. Тем самым видно, что удастся описать экспериментальное значение энергии связи ядра  ${}^7\text{Li}$  в этом канале, которая составляет 8.725 МэВ [6]. Значения параметров трехтельной ВФ (3), которые приводят к этим результатам по энергии приведены в табл.3.

Таблица 3. Значения вариационных параметров и коэффициентов разложения трехтельной волновой функции ядра  ${}^7\text{Li}$ .

№	$\alpha_i$	$\beta_i$	$C_i$	$(H_{ij}-EL_{ij})C_i=0$
1	3.09996E-02	3.53874E-02	+8.61351E-04	+0.00000E+00
2	8.90401E-02	7.40006E-02	+2.56716E-02	-2.27374E-13
3	2.57654E-01	5.08743E-02	+1.37998E-02	+3.41061E-13
4	1.39035E-01	2.92684E-01	-2.73826E-01	-7.10543E-15
5	2.02704E-01	1.70156E-01	+2.02813E-01	+0.00000E+00
6	1.38880E-01	4.59418E-01	+2.09360E-01	+2.84217E-14
7	2.21892E-01	2.75673E-01	-5.46337E-02	+2.84217E-14
8	2.40877E-01	7.54029E-01	+5.40009E-01	+2.35367E-14
9	1.24262E+00	8.35727E-02	-4.51367E-02	-2.13163E-14
10	2.48192E-01	6.74060E-01	-6.87519E-01	-2.66454E-15
11	9.59501E-01	4.50788E-01	+8.04027E-02	-2.71238E-03

Полная нормировка такой ВФ получается равна 1.00000000, а квадрупольный момент - 35.5  $\text{Фм}^2$  при экспериментальном значении -36.6(3)  $\text{Фм}^2$  [6].

Во всех выполненных нами расчетах не наблюдалось какой-либо неустойчивости численных решений или переполнения при работе компьютерных программ, как это неоднократно было, при использовании стандартного метода Шмидта для решения обобщенной матричной задачи на собственные значения и функции.

Таким образом, рассмотренный альтернативный метод решения обобщенной матричной задачи на собственные значения и функции позволяет получать устойчивые и достаточно точные результаты при решении определенного круга задач трехтельной ядерной физики на связанные состояния.

## Литература

1. Хюльтен Л., Сугавара М., Проблема взаимодействия двух нуклонов. Строение атомного ядра. М.: ИЛ, 1959, С.9-98.
2. Михлин С.Г., Смолицкий Х.Л., Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. М.: Наука, 1965, 383с.
3. Дубовиченко С.Б., Алматы, КазГосИНТИ, 1997, 29с.
4. Reid R.V., Ann. Phys. V.50, P.411-448 (1968).
5. Дубовиченко С.Б., Неронов В.С., Вестник КазАТиСО, Алматы №2, с.322-344 (2006).
6. Ajzenberg-Selove F., Nucl. Phys. V.A320, P.1 (1979).
7. Lehman D.R. - In: 7th - Int. Conf. on Polar. Phen. in Nucl. Phys., Paris, France, 1990.
8. Kukulín V.I., Krasnopólsky V.M., Voronchev V.T., Sazonov P.B., Nucl. Phys. V.A417, P.128-156 (1984).
9. Скорняков Л.А., Справочная математическая библиотека. Общая алгебра. М.: Наука, 1990, 591с.
10. Попов Б.А., Теслер Г.С., Вычисление функций на ЭВМ. Киев, Наукова думка, 1984, 598с.
11. Дубовиченко С.Б., Чечин Л.С., Вестник КазНПУ, физ.-мат. сер., Алматы, №.1(7), С.110-115 (2003).
12. Дубовиченко С.Б., Чечин Л.М., Труды конф. Современные проблемы и задачи информатизации в Казахстане, КазНТУ, Алматы, Казахстан, 6 - 10 октября 2004, С.358-390.
13. Мотт Н., Месси Г., Теория атомных столкновений. М.: Мир, 1969, 756с.
14. Дубовиченко С.Б., Вестник КазГАСА, Алматы №9/10, С.227-232 (2003); Дубовиченко С.Б., Вестник КазНТУ, Алматы №5, С.174-182 (2004).
15. Afnan I.R., Tang Y.C., Phys. Rev. V.175, P.1337-1351 (1968).
16. Krasnopólsky V.M., Kukulín V.I., Czech. J. Phys. V.B27, P.290-304 (1977); Krasnopólsky V.M., Kukulín V.I., J. Phys. V.G3, P.795-811 (1977).

### ЯДРОЛЫҚ ФИЗИКАНЫҢ БАЙЛАНЫСҚАН КҮЙГЕ ЕСЕПТЕРІН ШЫҒАРУ КЕЙБІР ӘДІСТЕРІ

С.Б. Дубовиченко

Потенциалдық кластерлік моделінде атомдық ядролардың байланысқан күйлерін талқылауға тікелей қолдануға болатын төмен энергияның ядролық физикасы мен ядролық астрофизика есептерінде тензорлық күштерімен Шредингер теңдеуі және теңдеулер жүйесінің сандық шешімдерінің стандартты емес әдістері қарастырылған.

### SOME METHODS OF THE DECISION OF PROBLEMS OF NUCLEAR PHYSICS ON THE CONNECTED CONDITIONS

S.B. Dubovichenko

Some not standard methods for numerical decided of the Schrodinger equation or system of the Schrodinger equation with tensor force in nuclear physics tasks at low energies and nuclear astrophysics was consider. These methods are applicable for analysis of the bound states of atomic nucleus in potential cluster models.