ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

АЙНЫМАЛЫ МАССАЛЫ ХИЛЛ ЖУЫҚТАУЫНДАҒЫ ҮШ ДЕНЕНІҢ ШЕКТЕУЛІ ЕСЕБІНДЕГІ МАССАЛАРДЫҢ ӨЗГЕРУ ЗАҢДЫЛЫҚТАРЫ

М.Т. Абаев
Қ.И. Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық университеті, Алматы қ.

Хилл жуықтауындағы массалары айнымалы үш дененің шектеулі есебінде массалардың өзгеру заңдылығы қарастырылған. Активті гравитациялаушы денелердің массалары уақыт бойынша әртүрлі қарқында изотропты өзгергендегі, массалар өзгерісінің тоғыз заңдылығы табылған.

1 Кіріспе

Қазіргі кездегі астрономиялық зерттеулер ғарыштағы объектілердің эволюциясы, олардың массасы мен өлшемдерінің өзгеруімен қатар жүретіндігін көрсетіп отыр. Гравитациялаушы денелерінің массаларының өзгеру салдары стационар емес жүйе эволюциясының негізгі факторларының бірі болып табылады [1-3]. Осыған байланысты массалары әртүрлі қарқынмен изотропты өзгеретін үш дененің шектеулі есебін қарастырамыз. Осы мәселедегі Хилл жуықтауында үш дененің Гаусс сүлбесі бойынша орташаланған шектеулі есебінің интегралданатын жағдайларындағы массаларының өзгеру заңдылығы табылған.

2 Есептің жалпы қойылуы

Пассивті гравитациялаушы дене қозғалыс теңдеуін мына түрде жазамыз

$$\ddot{\vec{r}} + f m_0 \frac{\vec{r}}{r^3} = grad_{\vec{r}} W_1 , \tag{1}$$

$$W_1 = f m_1 \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{xX + yY + zZ}{R^3} \right), \qquad R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad \Delta = \sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2}, \tag{2}$$

$$m_0 = m_0(t), \qquad m_1 = m_1(t), \qquad \frac{\dot{m}_0}{m_0} \neq \frac{\dot{m}_1}{m_1} . \tag{3}$$

Белсенді гравитациялаушы екі дененің қозғалысын сипаттайтын Гюльден-Мещерский есебінің теңдеуі

$$\ddot{\vec{R}} = -f \, \frac{m_0 + m_1}{R^3} \vec{R} , \tag{4}$$

егерде денелердің массаларының қосындысы уақытқа байланысты Мещерскийдің жалпыланған заңдылығымен өзгерсе

$$m_0 + m_1 = (m_{00} + m_{10}) \left[\frac{At_0^2 + 2Bt_0 + C}{At^2 + 2Bt + C} \right]^{1/2}, \quad m_{00} = m_0(t_0), \quad m_{10} = m_1(t_0) \tag{5}$$

онда, оның дербес шешімі белгілі квазишеңберлік қозғалыспен анықталынады

$$R = a_1 / v, \qquad R^2\dot{\theta} = \sqrt{f(m_{00} + m_{10})a_1} \ , \tag{6}$$

мұндағы,

$$v = \frac{m_0 + m_1}{m_{00} + m_{10}} = \left[\frac{At_0^2 + 2Bt_0 + C}{At^2 + 2Bt + C} \right]^{1/2}. \tag{7}$$

Сол сияқты,

$$v_0 = \frac{m_0}{m_{00}}, \qquad v_1 = \frac{m_1}{m_{10}} \tag{8}$$

деп белгілейміз.

3 Ұйытқыған қозғалыс теңдеуі

Қарастырып отырған массалары әртүрлі қарқынмен изотропты өзгеретін үш дененің шектеулі есебінің (1)-інші теңдеуі (6)-(7)-ші жағдайда квазиконустық қимадағы [4] апериодикалық қозғалыстың оскуляцияланушы элементтері

$$a, \quad e, \quad i, \ \Omega, \quad \omega, \ M \tag{9}$$

бойынша ұйытқу қозғалысын Лагранж теңдеулері арқылы жазуға болады

$$\dot{a} = \frac{2}{na} \cdot \left(\frac{\partial W}{\partial M} \right),$$

$$\dot{e} = \frac{1 - e^2}{na^2 e} \cdot \left(\frac{\partial W}{\partial M} \right) - \frac{\sqrt{1 - e^2}}{na^2 e} \cdot \frac{\partial W}{\partial \omega},$$

$$\frac{di}{d\tau} = \frac{ctg\, i}{na^2 \sqrt{1 - e^2}} \cdot \frac{\partial W}{\partial \omega} - \frac{\cos ec\ i}{na^2 \sqrt{1 - e^2}} \cdot \frac{\partial W}{\partial \Omega}, \tag{10}$$

$$\dot{\Omega} = \frac{\cos ec\ i}{na^2 \sqrt{1 - e^2}} \cdot \frac{\partial W}{\partial i},$$

$$\dot{\omega} = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{na^2 e} \cdot \left(\frac{\partial W}{\partial M} \right) - \frac{ctg\, i}{na^2 \sqrt{1 - e^2}} \cdot \frac{\partial W}{\partial i},$$

$$\dot{M} = \left(\frac{m_0}{m_{00}} \right)^2 \cdot n - \frac{2}{na} \cdot \left(\frac{\partial W}{\partial M} \right) - \frac{1 - e^2}{na^2 e} \cdot \left(\frac{\partial W}{\partial M} \right).$$

4 Хилл жуықтауы және Гаусс сүлбесі бойынша орташалау

Хилл жуықтауымен шектеліп

$$r << R, \tag{11}$$

(2)-ші өрнектің негізгі бөлігін қабылдаймыз

$$W_1 = f\,\frac{m_1}{R}\left(\frac{r}{R}\right)^2 P_2(\cos S), \tag{12}$$

Ұйытқушы күш потенциалын мынадай белгілейміз

$$W = W_1 + W_2, \tag{13}$$

мұндағы

$$W_2 = -\frac{1}{2}\nu_0\,\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{\nu_0}\right)r^2. \tag{14}$$

Бұл жағдайда Гаусс сүлбесі бойынша екі рет орташаланған (13)-ші функция мына түрге келеді

$$W^* = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} W dM_1 dM = \nu^3\,\frac{\nu_1}{\nu_0^2}\left(W_1^* - kW_2^*\right), \tag{15}$$

мұндағы,

$$k = k(t) = \left[\frac{\nu_0}{\nu_1\cdot\nu^3}\cdot\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{\nu_0}\right)\right]. \tag{16}$$

5 Интегралданатын жағдай

Егерде, $k = k_0 = const$ деп қабылдасақ ұйтқыған теңдеулер жүйесін автономды теңдеулер жүйесіне келтіруге болады. Бұл жағдайда (15)-ші өрнек мына түрге келеді

$$W^* = \nu^3\,\frac{\nu_1}{\nu_0^2}\left(W_1^* - k_0W_2^*\right), \tag{17}$$

$$W_1^* = \frac{fm_{10}a^2}{8a_1^2}\left[6e^2 - 1 - 15e^2\sin^2\omega + 3\cos^2 i\left(5e^2\sin^2\omega + 1 - e^2\right)\right], \tag{18}$$

$$W_2^* = \frac{a^2}{2}\left(1 + \frac{3}{2}e^2\right), \tag{19}$$

$$\left[\frac{\nu_0}{\nu_1\cdot\nu^3}\cdot\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{\nu_0}\right)\right] = k_0 = const\,. \tag{20}$$

Жаңа тәуелсіз айнымалы шама енгізіп

$$d\tau = \nu^3\,\frac{\nu_1}{\nu_0^2}\,dt, \tag{21}$$

(17)-ші өрнекті пайдаланып, Лагранж теңдеулерін автономды интегралданатын теңдеулер жүйесі ретінде жазуға болады [5]

$$\frac{da}{d\tau} = 0$$

$$\frac{de}{d\tau} = \frac{15\, fm_{10}}{8a_1^3} \cdot \frac{\sqrt{1-e^2}}{n} \cdot e\sin^2 i \sin 2\omega,$$

$$\frac{di}{d\tau} = -\frac{15\, fm_{10}}{16a_1^3} \cdot \frac{e^2}{n\sqrt{1-e^2}} \cdot \sin^2 i \sin 2\omega$$

$$\frac{d\omega}{d\tau} = -\frac{15\, fm_{10}}{4a_1^3} \cdot \frac{1}{n\sqrt{1-e^2}} \cdot \left\{ \frac{2}{5}\left(1-e^2\right) + \sin^2 \omega\left[\cos^2 i - \left(1-e^2\right)\right] - k\,\frac{2}{5}\left(\frac{a_1^3}{fm_{10}}\right)\left(1-e^2\right) \right\},$$

$$\frac{d\Omega}{d\tau} = -\frac{3\, fm_{10}}{4a_1^3} \cdot \frac{1}{n\sqrt{1-e^2}} \cdot \cos i\left(5e^2 \sin^2 \omega + 1 - e^2\right), \tag{22}$$

$$\frac{dM}{d\tau} = n - \frac{2}{n}\left\{ \frac{fm_{10}}{4a_1^8}\left[6e^2 - 11 - 15e^2 \sin^2 \omega + 3\cos^2 i\left(5e^2 \sin^2 \omega + 1 - e^2\right)\right]\right\} -$$
$$- \frac{1-e^2}{n}\left\{ \frac{fm_{10}}{4a_1^3}\left[6 - 15\sin^2 \omega + 3\cos^2 i\left(5\sin^2 \omega - 1\right)\right]\right\}.$$

6 Массалардың өзгеру заңдылықтары

Ал, (20)-шы шарттан $\nu_0 = \nu_0(t)$ фунциясын анықтайтын теңдеу аламыз

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{\nu_0}\right) = k^* \nu^3 \left(\sigma \frac{\nu}{\nu_0} - 1\right), \tag{23}$$

$$k^* = \frac{m_{00}}{m_{10}} k_0, \quad \sigma = \frac{m_{00} + m_{10}}{m_{00}}.$$

Қарапайым тепе-теңдікті

$$\nu_1 = \frac{m_{00} + m_{10}}{m_{10}} \nu - \frac{m_{00}}{m_{10}} \nu_0.$$

пайдаланып (23)-ші теңдеуді мына түрде жазамыз

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{\nu_0}\right) + \frac{E_1}{\left(At^2 + 2Bt + C\right)^2}\left(\frac{1}{\nu_0}\right) = \frac{E_2}{\left(At^2 + 2Bt + C\right)^{3/2}}, \tag{24}$$

$$E_1 = -k_0\left(At_0^2 + 2Bt_0 + C\right)^2\left[\frac{m_0(t_0) + m_1(t_0)}{m_1(t_0)}\right]; \; E_2 = -k_0\left(At_0^2 + 2Bt_0 + C\right)^{3/2}\left[\frac{m_0(t_0)}{m_1(t_0)}\right]; \tag{25}$$

Сәйкесінше (7)-(8) қатынастарынан $m_0(t)$, $m_1(t)$, анықталынады

$$m_0 = m_{00}\nu_0(t),$$
$$m_1 = m_{10}\left[\left(\frac{m_{00}+m_{10}}{m_{10}}\right)\left(\frac{At_0^2+2Bt_0+C}{At^2+2Bt+C}\right)^{1/2} - \frac{m_{00}}{m_{10}}\nu_0(t)\right], \tag{26}$$

мұндағы $\nu_0 = \nu_0(t)$ функциясы (24)-ші теңдеу шешімі болып табылады.

Массалардың уақыт бойынша өзгеру заңдылығын анықтайтын (24)-ші теңдеуді Мещерский түрлендіруін пайдаланып

$$\frac{1}{\nu_0} = \sqrt{At^2+2Bt+C}\cdot z_1, \tag{27}$$

$$d\tau = \frac{dt}{At^2+2Bt+C} \tag{28}$$

автономды теңдеу ретінде жазамыз

$$\frac{d^2z_1}{d\tau^2} + Nz_1 = E_2, \qquad N = AC - B^2 + E_1, \tag{29}$$

соңғы теңдеудің шешімі белгілі, және N мәніне байланысты әртүрлі болады.
Сәйкесінше, (28)-ші интегралдың аналитикалық өрнегі $\Delta = B^2 - AC$ мәніне байланысты әртүрлі.

Сондықтан да, массалар өзгеру заңдылықтары мынадай тоғыз түрлі болады.

1) $N = 0,\quad \Delta = 0,\quad E_1 = 0,$

$$\nu_0 = \frac{1}{c_1t+c_2} \tag{30}$$

Белсенді гравитациялаушы денелер массаларын (26)-шы формуладан табамыз:

$$m_0 = m_{00}\left(\frac{1}{c_1t+c_2}\right),$$
$$m_1 = m_{10}\left[\left(\frac{m_{00}+m_{10}}{m_{10}}\right)\left(\frac{At_0^2+2Bt_0+C}{At^2+2Bt+C}\right)^{1/2} - \frac{m_{00}}{m_{10}}\left(\frac{1}{c_1t+c_2}\right)\right], \tag{31}$$

Сол сияқты қалған жағдайларда $m_0(t),\ m_1(t)$ массалардың өзгеру заңдылықтары(26), (27), (28)-ші өрнектерге сәйкес төмендегі формулалардан табылады.

2. $N = 0,\qquad \Delta < 0,$

$$z_1 = \frac{E_2}{2}\tau^2 + c_1\tau + c_2, \qquad \tau = \frac{1}{\sqrt{AC-B^2}}\,arctg\,\frac{At+B}{\sqrt{AC-B^2}}; \tag{32}$$

3. $N = 0,\qquad \Delta > 0,$

$$z_1 = \frac{E_2}{2}\tau^2 + c_1\tau + c_2, \qquad \tau = \frac{1}{2\sqrt{B^2-AC}}\ln\left|\frac{At+B-\sqrt{B^2-AC}}{At+B+\sqrt{B^2-AC}}\right|; \tag{33}$$

4. $N = AC - B^2 + E_1 < 0$, $\quad \Delta = B^2 - AC < 0$; $\quad \lambda^2 = -4N$;

$$z_1 = c_1 \exp\left(\frac{\lambda}{2}\tau\right) + c_2 \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\tau\right) + \frac{4E_2}{\lambda^2} Ch\frac{\lambda}{2}(\tau - \tau_0), \tag{34}$$

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{AC - B^2}} arctg \frac{At + B}{\sqrt{AC - B^2}};$$

5. $N = AC - B^2 + E_1 < 0$, $\quad \Delta = B^2 - AC > 0$;

$$z_1 = c_1 \exp\left(\frac{\lambda}{2}\tau\right) + c_2 \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\tau\right) + \frac{4E_2}{\lambda^2} Ch\frac{\lambda}{2}(\tau - \tau_0), \tag{35}$$

$$\tau = \frac{1}{2\sqrt{B^2 - AC}} \ln\left|\frac{At + B - \sqrt{B^2 - AC}}{At + B + \sqrt{B^2 - AC}}\right|;$$

6. $N = AC - B^2 + E_1 < 0$, $\quad \Delta = B^2 - AC = 0$;

$$z_1 = c_1 \exp\left(\frac{\lambda}{2}\tau\right) + c_2 \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\tau\right) + \frac{4E_2}{\lambda^2} Ch\frac{\lambda}{2}(\tau - \tau_0), \tag{36}$$

$$\tau = -\frac{1}{At + B};$$

7. $N = AC - B^2 + E_1 > 0$, $\quad \Delta = B^2 - AC < 0$; $\quad \lambda^2 = 4N > 0$

$$z_1 = c_1 \cos\left(\frac{\lambda}{2}\tau\right) + c_2 \sin\left(\frac{\lambda}{2}\tau\right) + \frac{4E_2}{\lambda^2} Cos\frac{\lambda}{2}(\tau - \tau_0),$$

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{AC - B^2}} arctg \frac{At + B}{\sqrt{AC - B^2}}; \tag{37}$$

8. $N = AC - B^2 + E_1 > 0$, $\quad \Delta = B^2 - AC > 0$;

$$z_1 = c_1 \cos\left(\frac{\lambda}{2}\tau\right) + c_2 \sin\left(\frac{\lambda}{2}\tau\right) + \frac{4E_2}{\lambda^2} Cos\frac{\lambda}{2}(\tau - \tau_0), \tag{38}$$

$$\tau = \frac{1}{2\sqrt{B^2 - AC}} \ln\left|\frac{At + B - \sqrt{B^2 - AC}}{At + B + \sqrt{B^2 - AC}}\right|;$$

9. $N = AC - B^2 + E_1 > 0$, $\quad \Delta = B^2 - AC = 0$; $\quad N = E_1 > 0$

$$z_1 = c_1 \cos\left(\frac{\lambda}{2}\tau\right) + c_2 \sin\left(\frac{\lambda}{2}\tau\right) + \frac{4E_2}{\lambda^2} Cos\frac{\lambda}{2}(\tau - \tau_0), \quad \tau = -\frac{1}{At + B}; \tag{39}$$

7 Қорытынды

Табылған (30)-(39) өрнектердің ерекшелігі (3),(26)-шы формулаға сәйкес белсенді гравитациялаушы екі дененің массалары екі түрлі заңдылықпен өзгеретінін көрсетеді. Қарастырылған есептің геометриялық және динамикалық қасиеттері массалардың өзгеру заңдылықтарына сәйкес әртүрлі. Сондықтан да, қарастырылған жағдайларда гравитациялаушы бейстационар жүйеде эволюция жолдары дара өзгеше болады.

Бірақта, қарастырылған жағдайда Хилл жуықтығын сипаттайтын (11)-ші шарт массалардың өзгеру жылдамдығына белгілі дәрежеде шектеу жасайды.

Қарастырылған мәселені зерттеу барысында табылған нақты масса өзгеру заңдылықтарында жүйе динамикалық эволюциясын талдау көзделуде.

Әдебиет

1. Омаров Т.Б. Динамика гравитирующих систем Метагалактики. – Алма-Ата: Наука, 1975. – 144 с.
2. Omarov T.B. *(Editor)* Non-Stationary Dynamical Problems in Astronomy. New-York: Nova Science Publ. Inc., 2002, 260 p.
3. Bekov A.A., Omarov T.B. The Theory of Orbits in Non-Stationary Stellar Systems. // Astronomical and Astrophysical Transactions. 2003. – Vol.22. – p 145-153.
4. Минглибаев М.ДЖ. К канонической теории возмущений в небесной механике тел переменной массы. // Труды АФИ АН КазССР. – Алма-Ата: Ғылым, 1992. – Т.50. – С. 71-78.
5. Минглибаев М.Дж. Абаев М.Т. Хилл жуықтауындағы массалары әртүрлі жылдамдықта изотропты өзгеретін үш дененің шектеулі есебі. // Тезисы докл. междунар. конф. Вторые Фесенковские чтения «Современная астрофизика: Традиции и перспективы», Алматы. 2007. С. 21-23.

ЗАКОНЫ ИЗМЕНЕНИЯ МАСС В ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ С ПЕРЕМЕННЫМИ МАССАМИ В ПРИБЛИЖЕНИИ ХИЛЛА

М.Т. Абаев

Рассмотрены законы изменения масс в ограниченной задаче трех тел переменной массы в приближении Хилла. Найдены девять законов изменения масс, когда массы активно гравитирующих тел изменяются со временем в различных темпах изотропно.

MASS VARIATION LAWS BY HILL APPROXIMATION IN THE RESTRICTED THREE BODY PROBLEM WITH VARIABLE MASSES

M.T. Abayev

Laws of change of masses in the restricted problem of three bodies of variable masses by Hill approximation are considered. Nine laws of mass variation when masses of actively gravitating bodies are time dependent and changed isotropic rate various velocity.