К АНАЛИЗУ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А.Б. Кыдырбекулы

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы

Рассматривается устойчивость движения механических систем с нелинейными характеристиками различного типа. Предлагается методика исследования динамической устойчивости нелинейных систем по Ляпунову. Она строится на задании уравнения возмущенного состояния системы параметрическим уравнением типа Хилла и определении характеристического определителя методом Флоке.

Исследуется устойчивость движения неавтономной механической системы с нелинейными характеристиками мягкого и жесткого типа и нелинейно-вязким сопротивлением без ограничений на величины нелинейных и неавтономных членов:

$$\ddot{x} + \Phi(x, \dot{x}, \omega t) = F(\omega t), \qquad (1)$$

где

$\Phi(x, \dot{x}, \omega t) = K_1 \dot{x} + K_2 \dot{x}^2 + \alpha x^2 + \omega_0^2 x$ - в случае системы с нелинейной характеристикой мягкого типа;

$\Phi(x, \dot{x}, \omega t) = K_1 \dot{x} + K_2 \dot{x}^2 + \beta x^3 + \omega_0^2 x$ - в случае системы с нелинейной характеристикой жесткого типа.

K_1 и K_2 - коэффициенты линейного и нелинейно-вязкого сопротивления, α и β - коэффициенты мягкой и жесткой характеристик, соответственно.

Нелинейные системы типа (1) находят широкое применение при моделировании движения отдельных, а также связанных элементов конструкций и машин. Известно, что одним из распространенных методов решения большинства известных нелинейных динамических моделей систем с бесконечным числом степеней свободы (например, упругих систем с распределенными параметрами) является применение методов разделения переменных, которые приводят к уравнениям типа (1) с одной степенью свободы. При этом нелинейность характеристик может быть обусловлена различными допущениями модели. Например, нелинейная характеристика мягкого типа может быть вызвана нелинейными свойствами используемого материала конструкций, а нелинейная характеристика жесткого типа – конечностью величин возникающих деформаций.

В работе рассматривается случай нелинейных диссипативных сил, имеющих место при высокоскоростных режимах движения, а также при использовании материалов с ярко выраженными диссипативными свойствами, например, резины, используемой в качестве демпферов возникающих колебаний.

Большинство исследований по устойчивости периодических колебаний нелинейных систем выполнялись при существенных ограничениях на величины их нелинейности, т.е. рассматривались квазилинейные системы, которые исследовались асимптотическими методами и методом малого параметра [1-2] и др. Наибольший интерес представляют работы [3-4] по исследованию нелинейных колебаний физических систем без ограничений на величины нелинейных характеристик.

Здесь в отличие от [3-4] помимо нелинейных характеристик системы учитывается нелинейность вязкого сопротивления. Под периодическим решением системы (1) будут пониматься ее резонансные режимы колебаний по основной и кратным частотам возбуждения ω, как наиболее опасные и нежелательные для динамики режимы.

Раскладывая возмущающую силу $F(\omega t)$ в ряд Фурье по гармоническим составляющим, исследуется устойчивость нелинейных систем:

$$\ddot{x}+K_1\dot{x}+K_2\dot{x}^2+\omega_0^2 x+\alpha x^2=F_0+F_1\cos\omega t, \tag{2}$$

$$\ddot{x}+K_1\dot{x}+K_2\dot{x}^2+\omega_0^2 x+\beta x^3=F\cos\omega t \tag{3}$$

Как и в работе [5] под устойчивым движением системы понимается движение системы в отсутствии резонансных режимов, т.е. перемещения системы со временем должны стремиться к нулю. Это определение идентично определению устойчивости по Ляпунову. Для решения вопроса устойчивости рассматривается малое отклонение δx от периодического равновесного состояния $x_0(t)$, устойчивость которого подлежит исследованию:

$$x(t)=x_0(t)+\delta x \tag{4}$$

Подставляя (4) в (2) и (3) и пренебрегая степенями δx выше первой, получены уравнения возмущенного состояния для нелинейных систем с мягкой и жесткой характеристикой, соответственно:

$$\frac{d^2\delta x}{dt^2}+\left(K_1+2K_2\frac{dx_0}{dt}\right)\frac{d\delta x}{dt}+\left(\omega_0^2+2\alpha x_0\right)\delta x=0\ , \tag{5}$$

$$\frac{d^2\delta x}{dt^2}+\left(K_1+2K_2\frac{dx_0}{dt}\right)\frac{d\delta x}{dt}+\left(\omega_0^2+3\beta x_0^2\right)\delta x=0\ ; \tag{6}$$

или в общем виде (5) и (6) задаются как:

$$\frac{d^2\delta x}{dt^2}+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{x}}\right)_0\frac{d\delta x}{dt}+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_0\delta x=0, \tag{7}$$

где символ $(\ )_0$ означает подстановку исследуемого решения $x_0(t)$ и $\dot{x}_0(t)$ после проведения операции дифференцирования.

Правомерность перехода от уравнения (1) к уравнению возмущенного состояния (7) при задании $\Phi(x,\dot{x},)$ в самом общем виде рассматривалась в работах Треффтца [3]. Условия же правомерности перехода для частного случая функции $\Phi(x,\dot{x},)=$ $f_1(x)\dfrac{dx}{dt}+f_2(x)$ исследовались Л.А. Бессоновым [3].

Устойчивость рассматриваемого решения $x_0(t)$ зависит от характера поведения малого возмущения δx во времени: если все решения возмущенного состояния (7) $\delta x\to 0$ при $t\to\infty$, то решение $x_0(t)$ по определению устойчиво; если величина δx неограниченно растет при $t\to\infty$, то решение $x_0(t)$ – не устойчиво.

Для анализа уравнения возмущенного состояния (7) вводится новая переменная η, задаваемая как:

$$\delta x=\eta\exp\left(-0,5\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{x}}\right)_0\right), \tag{8}$$

что приводит к параметрическому уравнению типа Хилла относительно переменной η.

В работе исследуется устойчивость основного резонанса нелинейных систем (2) и (3). Для случая нелинейной характеристики мягкого типа резонанс задается решением:

$$x_0(t) = r_0 + r_1 \cos(\omega t - \varphi_1). \tag{9}$$

Для него получено уравнение возмущенного состояния в виде уравнения типа Хилла:

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + \eta\left[\theta_0 + \theta_{1s}\sin\omega t + \theta_{1c}\cos\omega t + \theta_{2s}\sin 2\omega t + \theta_{2c}\cos 2\omega t\right] = 0, \tag{10}$$

где

$$\begin{aligned}
\theta_0 &= \omega_0^2 + 2\,\alpha r_0 - 0,25\,k_1^2 - 0,5\,k_2^2 r_1^2 \omega^2,\\
\theta_{1s} &= (2\,\alpha r_1 + k_2 r_1 \omega^2)\sin\varphi_1 + k_1 k_2 r_1 \omega \cos\varphi_1,\\
\theta_{1c} &= (2\,\alpha r_1 + k_2 r_1 \omega^2)\cos\varphi_1 - k_1 k_2 r_1 \omega \sin\varphi_1,\\
\theta_{2s} &= 0,5\,k_2^2 r_1^2 \omega^2 \sin 2\varphi_1,\\
\theta_{2c} &= 0,5\,k_2^2 r_1^2 \omega^2 \cos 2\varphi_1.
\end{aligned} \tag{11}$$

Для случая же нелинейной характеристики жесткого типа решение $x_0(t)$ задавалось как:

$$x_0(t) = r_1 \cos(\omega t - \varphi_1)\ , \tag{12}$$

а функции θ_0, θ_{1s}, θ_{1c}, θ_{2s}, θ_{2c} в уравнении (10) определены следующим образом:

$$\begin{aligned}
\theta_0 &= \omega_0^2 + 1,5\,\beta r_1^2 - 0,25\,k_1^2 - 0,5\,k_2^2 r_1^2 \omega^2,\\
\theta_{1s} &= -k_2 r_1 \omega^2 \sin\varphi_1 + k_1 k_2 r_1 \omega \cos\varphi_1,\\
\theta_{1c} &= -k_2 r_1 \omega^2 \cos\varphi_1 - k_1 k_2 r_1 \omega \sin\varphi_1,\\
\theta_{2s} &= 1,5\,\beta r_1^2 \sin 2\varphi_1 + 0,5\,k_2^2 r_1^2 \omega^2 \sin 2\varphi_1,\\
\theta_{2c} &= 1,5\,\beta r_1^2 \cos 2\varphi_1 + 0,5\,k_2^2 r_1^2 \omega^2 \cos 2\varphi_1\ .
\end{aligned} \tag{13}$$

Таким образом, анализ уравнений возмущенного состояния (7) сводится к решению уравнения типа Хилла (10).

Частное решение уравнения (10) находится согласно теории Флоке, когда η задается как:

$$\eta = e^{\mu t}\phi(t), \tag{14}$$

где μ – характеристический показатель, а $\phi(t)$ – есть периодическая функция времени, раскладываемая в ряд Фурье:

$$\phi(t) = \sum_n b_n \cos(n\,\omega t - \delta_n). \tag{15}$$

В зависимости от числа составляющих разложения в ряд Фурье функции $\phi(t)$ строятся характеристические определители, задающие границы соответствующих областей неустойчивости рассматриваемого решения. В данном случае – для гармонического решения, характеризующего резонанс по основной частоте.

В работе получены первые зоны неустойчивости основного резонанса в зависимости от геометрических и физических параметров рассматриваемой нелинейной системы.

Для случая нелинейной системы с мягкой характеристикой она задается следующим образом:

$$\Delta(\mu)=\begin{vmatrix} \mu^2+\theta_0-\omega^2-0,5\theta_{2c} & -2\mu\omega+0,5\theta_{2s} \\ 2\mu\omega+0,5\theta_{2s}, & \mu^2-\omega^2+\theta_0+0,5\theta_{2c} \end{vmatrix}=0 \tag{16}$$

Уточненное условие устойчивости основного резонанса получено, когда разложение η в ряд Фурье представлено в виде:

$$\eta=e^{\mu t}\left[b_0+b_1\cos(\omega t-\delta_1)\right] \tag{17}$$

и определяется как:

$$\Delta(\mu)=\begin{vmatrix} \mu^2+\theta_0 & 0,5\theta_{1s} & 0,5\theta_{1c} \\ \theta_{1s} & \mu^2+\theta_0-\omega^2-0,5\theta_{2c} & -2\mu\omega+0,5\theta_{2s} \\ \theta_{1c} & 2\mu\omega+0,5\theta_{2s} & \mu^2-\omega^2+\theta_0+0,5\theta_{2c} \end{vmatrix}=0 \tag{18}$$

Из (18) видно, что данный характеристический определитель является расширением характеристического определителя (16) и действительно задает уточнение границ для первого случая.

Для нелинейной системы с жесткой характеристикой получена первая область неустойчивости основного резонанса:

$$\Delta(\mu)=\begin{vmatrix} \omega^2-\mu^2-\theta_0-0,5\theta_{2c}) & 2\mu\omega+0,5\theta_{2s} \\ 2\mu\omega-0,5\theta_{2s}, & \mu^2-\omega^2+\theta_0-0,5\theta_{2c} \end{vmatrix} \tag{19}$$

Полагая $\eta=e^{\mu t}\left[b_0+b_2\cos(2\omega t-\delta_2)\right]$, получена вторя область неустойчивости основного резонанса данной системы:

$$\Delta(\mu)=\begin{vmatrix} \mu^2+\theta_0 & 0,5\theta_{1s} & 0,5\theta_{1c} \\ \theta_{1s} & \mu^2-\omega^2+\theta_0-0,5\theta_{2c} & -2\omega\mu+0,5\theta_{2s} \\ \theta_{1c} & 2\mu\omega+0,5\theta_{2s} & \mu^2-\omega^2+\theta_0+0,5\theta_{2c} \end{vmatrix} \tag{20}$$

Таким образом, аналитическое определение границ областей неустойчивости основного резонанса в зависимости от геометрических и физических параметров рассмотренных систем с нелинейными характеристиками мягкого и жесткого типа и частот внешнего возмущения позволяет отстраивать данные системы от резонансных режимов колебаний путем вариации их параметров.

Данная методика позволяет исследовать резонансные режимы колебаний по высшим частотам с определением соответствующих им областей неустойчивости.

Литература

1. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. - 504 с.
2. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. – М.: Гостехиздат, 1956.- 357 с.
3. Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах. – М.:Мир, 1968. 423 с.
4. Тондл А. Нелинейные колебания механических систем. М.,1973. – 334 с.
5. Хаджиева Л.А., Кыдырбекулы А.Б. Об устойчивости движения упругих звеньев плоских МВК. // Вестник КазГУ. Сер. мат., мех., инф.-1996, №4. – С. 191-194.

БЕЙСЫЗЫҚ МЕХАНИКАЛЫҚ ЖҮЙЕЛЕР ҚОЗҒАЛЫСЫ ОРНЫҚТЫЛЫҒЫН ТАЛДАУ МӘСЕЛЕСІНЕ

А.Б. Қыдырбекұлы

Бейсызық әр типті сипаттамалары бар механикалық жүйелер қозғалысының орнықтылығы қарастырылды. Бейсызық жүйелердің динамикалық орнықтылығын Ляпунов бойынша зерттеу әдістемесі ұсынылды. Бұл әдістеме бойынша жүйенің ұйтқыған күйінің теңдеуін Хилл типіндегі параметрлік теңдеуі арқылы беріліп, одан кейін Флоке әдісімен сипаттаушы анықтағышы табылды.

TO THE ANALYSIS OF STABILITY OF MOVEMENT OF THE NONLINEAR MECHANICAL SYSTEMS

A.B. Kydyrbekuly

Stability of movement of nonlinear mechanic systems with nonlinear characteristics of various types is considered. The technique of research of dynamic stability of nonlinear systems on Lyapunov is offered. It is building on the task of the equation of the indignant condition of system the parametrical equation of type Hill and the definition a characteristic determinant by method Flock.