

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РЕГИСТРИРУЮЩИХ СРЕД КАК ФУНКЦИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ПРЕЛОМЛЕНИЯ

Г.К. Турлыбекова, С.Г. Кусаинов*

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы,

**Казахский национальный технический университет им. К.И. Сатпаева, Алматы*

В работе показаны влияние свойств среды на коэффициент преломления n , характеризующий фазовую скорость волны, и зависимость диэлектрической проницаемости ε и магнитной проницаемости μ не только по их абсолютной величине, но и по знаку, которую может принимать коэффициент преломления, связанный с ними формулой $n = -\sqrt{\varepsilon\mu}$, т.е. отрицательным его значением. Работа так же связана с голограммно оптическими приборами и их разрешающими способностями, исследованием которых занимаются авторы работы. Представлена эта функциональная зависимость как математическая модель, описываемая основным уравнением электродинамики и соответствующими материальными уравнениями, которые необходимо учитывать для решения поставленной задачи.

Во многих исследованиях при голографировании [1] делается вывод, что картина стоячих световых волн ($\lambda=546$ нм) не только может быть зафиксирована, если диаметр эмульсионных зерен фотослоя составляет 70 нм, но наилучшие результаты получаются при диаметре зерен меньше 30 нм (т.е. меньше одной десятой расстояния между пучностями). В другой работе [4] указывается, что для регистрации интерференционной картины световых излучений размер эмульсионных зерен фотоматериалов должен быть много меньше одной десятой микрометра.

Основываясь на некоторых расчетах и считая, что для обеспечения высокого качества голографического изображения рассеяние в эмульсионных слоях должно отсутствовать, делается вывод [3], что для наиболее жестких условий голографирования во встречных пучках они должны быть практически прозрачными. Иначе говоря, размер в них эмульсионных зерен должен измеряться несколькими нанометрами или находиться вблизи границы частиц истинных (прозрачных) и коллоидных (опалесцирующих) растворов. Имея в виду, что коэффициент преломления бромистого серебра составляет 2.25, а желатинового слоя - 1.5, можно считать, что наиболее оптимальным для получения «прозрачных» фотоматериалов является применение в них вместо желатины заменителей с коэффициентом преломления, более близким к коэффициенту бромистого серебра. Для наиболее жестких условий голографирования во встречных пучках необходимая разрешающая способность фотоматериала $R_{встр}$ должна быть несколько больше требуемой передачи максимальной пространственной частоты, т.е.

$$R_{встр} > \frac{2n}{\lambda}, \quad (1)$$

где λ - длина регистрируемой волны света в пустоте, n - коэффициент преломления фотослоя. Можно считать, что для четкой передачи требуемых пространственных частот разрешающая способность фотоматериала должна превышать их не менее, чем на 20%. Отсюда были вычислены [3] данные о требуемой разрешающей способности фотоматериала, при регистрации во встречных пучках структуры стоячих волн разных видимых излучений ($\lambda \approx 400 - 700$ мкм), которые резко изменяются по величине длин волн (в два раза). Отсюда следует, что разрешающая способность «прозрачных» фотоматериалов ПЭ-1-633 [2], на которых были получены цветные импульсные голограммы в трехмерной среде [5], составляет не менее 10000 лин/мм (имеется основание считать ее еще большей).

Так как голографическое изображение строится из дифракционных решеток, то их

оптимальное качество (четкость штрихов) связывается с применением достаточно контрастных фотоматериалов ($\gamma > 3$), то есть контрастом получаемых интерференционных полос и дифракционной эффективностью η (ДЭ).

ДЭ увеличивается закономерно с изменением размеров частиц галогенидов серебра, то есть уменьшением размеров их увеличивается эффективная площадь взаимодействия наночастиц со светом и фотохимическими реактивами на несколько порядков [6]. В результате более детальных исследований [7,8] найдено, что при уменьшении количества серебра в исходной высокоразрешающей эмульсии, ДЭ достигает максимального значения (при $C_{AgHal} \approx 7 \text{ г/л}$).

Таким образом, разрешающая способность регистрирующих сред, как следует, имеет сложную зависимость, куда входит природа фоточувствительной основы (желатины), размера светочувствительных частиц, их оптимального весового соотношения, длины волны используемой для записи, схемы записи и все это функционально связано друг с другом с коэффициентом преломления. В связи с этим для понимания проблемы увеличения разрешающей способности регистрирующей среды и разрешающей возможности голограммно оптического элемента, для исследования можно привлечь материальные уравнения Максвелла в качестве математической модели с привлечением механизмов излучения, распространения и поглощения света в нанобъектах.

Математическая модель — это метод исследования физических явлений с помощью специальной модели, основанный на идентичности математического описания процессов в оригинале и модели. «Идентичность» здесь означает одинаковость формы уравнений и наличие однозначных соотношений (уравнений преобразования переменных) между переменными в уравнениях оригинала и модели. При этом физическая природа модели и оригинала различны. В качестве оригинала берется классический оптический элемент (обычная линза и дифракционная решетка), а в качестве модели голографические оптические элементы.

В связи с этим следовало бы напомнить слова, сказанные В. Томсоном: «Если вы можете предложить математическую модель, алгоритм позволяющую воспроизвести с достаточной точностью наблюдаемое в эксперименте явления в достаточно широком диапазоне внешних параметров и эта модель не будет противоречить установленным физико-химическим законам, то вы понимаете это явление. Если вы не в состоянии построить удовлетворительную модель, то это означает, что у вас нет понимания явления» [9].

В наших исследованиях имеем дело с распространением электромагнитной волны в однородной и изотропной диспергирующей среде представляющей собой органическое соединение (желатину) содержащую в себе частицы галогенидов серебра размерами от 70 – 30 до 5 нм. В связи с тем, что размеры частиц значительно меньше длины волны как формирующего прибор оптического излучения, так и проходящего через него среду можно считать ее однородной и изотропной. Одними из основных физических параметров действующих на нее при распространении ее через эту среду является, как известно диэлектрическая проницаемость ε и магнитная проницаемость μ , определяющие коэффициент преломления $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ или $n = c/v$, которая определяет фазовую скорость волны в среде.

Поэтому для расчета электромагнитных полей в различных средах основную систему уравнений электродинамики необходимо дополнить системой материальных уравнений: $D = D(E)$, $B = B(H)$, $j = j(E)$. Эти три уравнения отражают свойства конкретной рассматриваемой среды и должны быть добавлены к уравнениям Максвелла, чтобы они приобрели определенность. В вакууме, например, $D = E$, $B = H$, $j = 0$. Связь между D и E , j и E , B и H зависит от характера взаимодействия электромагнитного поля с веществом и может иметь очень сложный вид. Она может быть нелинейной и нелокальной, учитывать анизотропию и

наследственные свойства («память») среды. Последнее означает в частности, что значения векторов D , B и j в какой-либо точке r и в момент времени t могут зависеть от значений векторов E и H в других точках пространства и в предшествующие моменты времени. Такая связь между векторами приводит к появлению частотной и пространственной дисперсии, существенно влияющей на процессы распространения волн. Положим, что характерные внутренние пространственные и временные масштабы среды не сказываются на распространении волны, и связь между векторами локальна и линейна имеем

$$D = \varepsilon(E), B = \mu(H), j = \sigma(E). \quad (2)$$

Исходной системой уравнений Максвелла для определения электромагнитного поля, как известно в однородной изотропной среде имеет вид:

$$\text{rot}H = \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} j, \text{rot}E = - \frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}, \text{div}D = 4\pi\rho. \quad (3-5)$$

Здесь j и ρ - плотности токов и электрических зарядов в среде, появление которых вызвано электромагнитным полем. Эти величины связаны уравнением непрерывности

$$\text{div}j + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0, \quad (6)$$

физический смысл которого аналогичен смыслу уравнения для механики сплошных сред. Уравнение выражает закон сохранения полного электрического заряда внутри достаточно большого объема среды, E и H - это напряженности электрического и магнитного полей, D и B - векторы электрической (электрического смещения) и магнитной индукции.

Тогда система уравнений (2 - 5) с учетом материальных уравнений (2) запишется в виде

$$\text{rot}H = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c} E, \text{rot}E = - \frac{\mu}{c} \frac{\partial H}{\partial t}, \text{div}H = 0, \text{div}E = 0, \quad (7)$$

Исключаем из системы уравнений вектор H , для этого применим операцию rot к обеим частям второго из уравнений. Учитывая, что $\text{rot}(\text{rot}E) = \text{grad}(\text{div}E) - \Delta E = -\Delta E$ получим

$$\Delta E - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t} = 0,$$

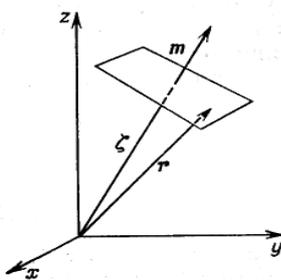


Рис.1 Зависимость E и H от пространственной координаты и времени.

$n = \sqrt{\varepsilon\mu}$. Если $\sigma = 0$ т.е. среда не обладает проводимостью, то вектор E удовлетворяет волновому уравнению $\Delta E - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$. Это уравнение описывает процесс распространения в направлениях $\pm m$ со скоростью $v = c / \sqrt{\varepsilon\mu}$ двух плоских векторных волн $E_{1,2} = E [t \mp \zeta / v]$ аналогично и для $H_{1,2}$ (такому же уравнению удовлетворяет и вектор H). Плоская волна в изотропной однородной среде, если не учитывать поглощения, дисперсию и нелинейные эффекты, в котором векторы E и H зависят лишь от одной пространственной координаты $\zeta = mr$ и времени t (см. рис 1), а возмущение u зависит

лишь от расстояния, отсчитываемого вдоль некоторого фиксированного направления m , I m $I = 1$ и времени, т.е. $u = u(\zeta, t)$, где $\zeta = r m = m_x x + m_y y + m_z z$. В такой среде волновой процесс описывается уравнением

$$\Delta u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

Для плоских волн оператор Лапласа преобразуется к виду $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}$, а волновое уравнение становится одномерным:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (8)$$

Если от переменных ζ и t перейти к характеристическим переменным

$$\tau = t - \zeta/c, \quad \eta = t + \zeta/c, \quad (9)$$

Интегрируя последовательно по τ и η , нетрудно найти общее решение исходного уравнения (8)

$$u = u_1(\tau) + u_2(\eta) = u_1(t - \zeta/c) + u_2(t + \zeta/c). \quad (10)$$

Плоские волны, описываемые произвольными функциями $u_1(\tau)$ и $u_1(\eta)$ более удобно рассматривать как суперпозицию гармонических волн. Для этого необходимо, чтобы функции u_1 и u_2 можно было представить в виде интегралов Фурье:

$$u_{1,2}(\zeta, t) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{1,2}(\zeta, \omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (11)$$

где $F_{1,2}(\zeta, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_{1,2}(\zeta, t) e^{i\omega t} dt$.

Подставляя (11) в (8), найдем, что функции $u_{1,2}$ будут решениями волнового уравнения, если их Фурье образы $F_{1,2}$ удовлетворяют уравнению Гельмгольца

$$\frac{dF_{1,2}}{d\zeta} + \frac{\omega^2}{c^2} F_{1,2} = 0, \quad (12)$$

$$F_{1,2}(\zeta, \omega) = A_{1,2}(\omega) e^{\pm ik\zeta}, \quad (13)$$

где $k = \omega/c$. Таким образом, функции $A_{1,2}(\omega) \exp(\pm ik\zeta - i\omega t)$ под знаком интеграла (11) описывают плоские гармонические волны. Переходя к декартовым координатам, фазу плоской гармонической волны можно записать в виде

$$k(m_x x + m_y y + m_z z) - \omega t = kr - \omega t$$

где $k = km$. Уравнение $kr = \text{const}$ определяет плоскость равной фазы. Если k - действительный вектор, амплитуды волн $A_{1,2}$ постоянны всюду, в том числе и в плоскости равной фазы. Функции $F_{1,2}$ будут удовлетворять уравнению (11) в том случае, если k - комплексный вектор, но

$$k = k^i + k^i. \quad (14)$$

Из уравнений (7) исключая вектор H , применив операцию rot к обеим частям второго из уравнений учитывая, что $rot\ rot\ E = grad\ div\ E - \Delta E = -\Delta E$, получим, если $\sigma = 0$ и когда векторы E и H зависят лишь от одной пространственной координаты ζ и времени t уравнение

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \zeta^2} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0. \quad (15)$$

Аналогичное уравнение получается и для вектора H . Каждая из декартовых компонент векторов E и H будет при этом удовлетворять одномерному скалярному уравнению (8), решение которого в виде бегущих плоских волн уже известно. Уравнение (15) описывает процесс распространения в направлениях $\pm m$ со скоростью $v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ двух плоских векторных волн. Аналогично можно получить уравнение типа (15) для $H = H[t \mp \zeta/v]$. Для определения структуры этих волн необходимо обратиться к уравнениям Максвелла. В связи с чем рассмотрим волну, распространяющуюся в направлении $+m$. В этом случае $div E = \frac{\partial}{\partial \zeta}(mE)$, $rot E = \frac{\partial}{\partial \zeta}[mE]$, и система уравнений будет иметь вид

$$\frac{\partial}{\partial \zeta}[mE] = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial H}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial \zeta}[mH] = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial \zeta}(mE) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \zeta}(mH) = 0 \quad (16)$$

Из последних двух уравнений (16) следует, что $\frac{\partial E_\zeta}{\partial \zeta} = 0$ и $\frac{\partial H_\zeta}{\partial \zeta} = 0$ т.е. проекции векторов E и H на направление распространения волны если и не равны нулю, то могут зависеть только от времени. Умножая теперь скалярно первые два уравнения (16) на вектор m , получим $\frac{\partial E_\zeta}{\partial t} = \frac{\partial H_\zeta}{\partial t} = 0$. Иными словами, проекции E и H не зависят также и от времени, т.е. тождественно равны нулю. Это означает, что электромагнитные волны в диэлектрической среде являются поперечными волнами, векторы E и H лежат в плоскости фронта волны.

В проводящей среде $\frac{\partial E}{\partial \zeta} = 0$. Из уравнения $\frac{\partial}{\partial \zeta}[mH] = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sigma E$, найдем теперь связь между векторами H и E в бегущей плоской волне. Вводя координату $\tau = t - \zeta/v$ связанную с волной, получим $\partial/\partial t = \partial/\partial \tau$, $\partial/\partial \zeta = \partial/(\partial \tau)$. Первое из уравнений (16) примет вид

$$-\frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \frac{1}{v} [mH] + \frac{\varepsilon}{c} E \right\} = 0, \quad E = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} [mH]. \quad (17)$$

Константу, получаемую при интегрировании по τ следует положить равной нулю, поскольку рассматриваются только переменные электромагнитные поля.

Как следует из (17), векторы E , H , m образуют правую ортогональную тройку векторов. Величина

$$Z_0 = \sqrt{\mu/\varepsilon}, \quad (18)$$

определяющая количественную связь между напряженностями электрического и магнитного полей, называется *импедансом среды*. Если среда обладает проводимостью, то

распространение волны описывается уравнением (13). В этом случае без изменения формы может распространяться только гармоническая волна. Рассмотрим распространение плоской гармонической волны. Принимая $E = E_0(\zeta)e^{-i\omega t}$, для комплексной амплитуды получим уравнение Гельмгольца

$$\frac{d^2 E_0}{d\zeta^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \mu(\varepsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega}) E_0 = 0, \quad (19)$$

которое отличается от аналогичного уравнения для идеальной среды только тем, что вместо действительного коэффициента $k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu / c^2$ в него входит комплексная величина $k^2 = \omega^2 / c^2 \mu(\varepsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega}) = \frac{\omega^2}{c^2} \mu \varepsilon^k$. Решение уравнения (19) можно записать в виде

$$E(\zeta, t) = A_1 e^{ik\zeta} + A_2 e^{-ik\zeta}, \quad k = \omega/c(n + ik).$$

Отсюда следует, что

$$E(\zeta, t) = A_1 \exp(-\frac{\omega}{c} \kappa \zeta) \exp[-i\omega(t - n/c \zeta)] + A_2 \exp(\frac{\omega}{c} \kappa \zeta) \exp[-i\omega(t - n/c \zeta)] \quad (20)$$

Решение (20) получено в виде двух бегущих плоских однородных волн, амплитуды которых убывают по мере распространения. Величина k характеризует скорость убывания амплитуды волны в направлении распространения и называется *показателем поглощения* (следует отличать от коэффициента поглощения, равного $k^{11} = (\omega/c)k$). Величина определяет $n = c/v$ фазовую скорость волны в среде и называется *показателем преломления*.

Выясним теперь, как зависят показатели n и κ от частоты волны и параметров среды. Введем величину

$$\text{tg} \delta = 4\pi\sigma/(\omega\varepsilon), \quad (21)$$

называемую *тангенсом угла потерь*. Приравнявая действительные и мнимые части равенства $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu (1 + itg\delta) = \frac{\omega^2}{c^2} (n + ik)^2$ получим систему уравнений для нахождения n и κ , $n^2 - \kappa^2 = \mu\varepsilon$, $2n\kappa = \mu\varepsilon \text{tg} \delta$. Решение этой системы дает, как зависит коэффициент преломления n и поглощения κ от того какая среда, обладает ли она проводимостью или нет.

$$n = [1/2 \mu\varepsilon (\sqrt{1 + \text{tg}^2 \delta} + 1)]^{1/2} \quad \kappa = [1/2 \mu\varepsilon (\sqrt{1 + \text{tg}^2 \delta} - 1)]^{1/2} \quad (22)$$

В среде, не обладающей проводимостью, энергия электромагнитного поля сохраняется. Закон сохранения энергии можно записать в интегральной форме:

$$\int W(r, t) d^3 r = \text{const} \quad (23)$$

или эквивалентной дифференциальной форме:

$$\partial W / \partial t + \text{div} S = 0, \quad (24)$$

здесь W - объемная плотность энергии, S - поток энергии. Для нахождения явного вида величин W и S воспользуемся системой уравнений Максвелла для среды без дисперсии (13), в которой положим $\sigma = 0$. Умножая первое из уравнений (12) на E_t второе на H и вычитая одно из другого, получим

$$\operatorname{rot} H = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c} E, \operatorname{rot} E = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial H}{\partial t},$$

$$\frac{\varepsilon}{c} E \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\mu}{c} H \frac{\partial H}{\partial t} = E \operatorname{rot} H - H \operatorname{rot} E = -\operatorname{div}[EH]$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\varepsilon E^2 + \mu H^2}{8\pi} + \operatorname{div} \frac{c}{4\pi} [EH] = 0 \quad (25)$$

Сравнивая, находим выражение для плотности и потока энергии:

$$W = 1/8 \pi (\varepsilon E^2 + \mu H^2), S = \frac{c}{4\pi} [EH]. \quad (26)$$

Второе выражение (26) называется *вектором Умова — Пойнтинга*, а рассмотренные параметры являются единственными параметрами вещества, входящими в дисперсионное уравнение

$$\left| \frac{1}{c} \omega^2 \varepsilon_{ij} \mu_{ij} - k^2 \delta_{ij} + k_i k_j \right| = 0 \quad (27)$$

который задает связь между частотой ω монохроматической волны и ее волновым вектором k . В том случае, если вещество изотропно, уравнение (27) упрощается:

$$k^2 - n^2 \omega^2 / c^2 = 0 \quad (28)$$

Здесь n^2 — квадрат коэффициента преломления вещества, равный

$$n^2 = \varepsilon \mu \quad (29)$$

Если не учитывать потерь и считать ε и μ действительными числами, то из (28) и (29) видно, что одновременная смена знаков ε и μ никак не отражается на этих соотношениях это во-первых; во вторых может вещества с отрицательными ε и μ обладают какими-то свойствами, отличными от свойств веществ с положительными ε и μ . Как мы увидим в дальнейшем, из работ осуществляется именно этот третий случай. Так как электродинамика веществ с $\varepsilon < 0$ и $\mu < 0$, представляет несомненный интерес. Для того чтобы выявить электродинамические закономерности, существенно связанные со знаком ε и μ , Веселаго [10] обратился к тем соотношениям, в которых ε и μ , выступают раздельно, а не в виде произведения, как это имеет место в (1) — (3). Такими соотношениями являются, прежде всего, уравнения Максвелла и материальные уравнения

$$\operatorname{rot} E = -\frac{1}{\tilde{n}} \frac{\partial \hat{A}}{\partial t}, \operatorname{rot} H = \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t} \quad (30)$$

$$B = \mu H, D = \varepsilon E. \quad (31)$$

Для плоской монохроматической волны, у которой все величины пропорциональны $e^{i(kz - \omega t)}$ выражения (30) и (31) сводятся к

$$[kE] - \frac{\omega}{c} \mu H, [kH] - \frac{\omega}{c} \varepsilon E \quad (32)$$

Из этих выражений сразу же видно, что если $\varepsilon > 0$ и $\mu > 0$, то E и k образуют правую тройку векторов, а если $\varepsilon < 0$ и $\mu < 0$ - левую. Если ввести для векторов E и k направляющие косинусы и обозначить их через $\alpha \beta \gamma$ соответственно, то волна, распространяющаяся в данной среде, будет характеризоваться матрицей

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ G & \beta & \beta \\ \gamma & \gamma & \gamma \end{vmatrix} \quad (33)$$

Определитель этой матрицы равен +1, если тройка векторов E , H и k правая, и -1, если эта тройка левая. Обозначив этот определитель через p , можно сказать, что знак ее характеризует «правизну» данной среды. Среда является «правой», если p равна +1 и «левой», если $p = -1$. Элементы матрицы (33) удовлетворяют соотношению

$$G_{ik} = p A_{ik}.$$

Здесь A_{ik} — алгебраическое дополнение для элемента G_{ik} . Кроме того, элементы G ортонормированны. Поток энергии, переносимой волной, определяется вектором Пойнтинга $S = c/4\pi [EH]$. Вектор S в соответствии с (8) всегда образует с векторами E и H правую тройку. Таким образом, для правых веществ S и k направлены в одну сторону, а для левых - разные (см. рисунки 2,3).

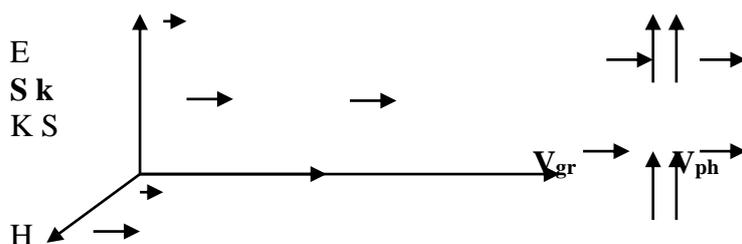


Рис. 2 Направление векторов фазовых и групповых скоростей правых веществ

Так как вектор k совпадает по направлению с фазовой скоростью, то ясно, что левые вещества являются веществами с так называемыми способностями отрицательной групповой скоростью, которая осуществляется, в частности, в анизотропных веществах или при наличии пространственной дисперсии.

При переходе луча света з одной среды в другую граничные условия

$$E_{t1} = E_{t2} \quad H_{t1} = H_{t2}, \quad \varepsilon_1 E_{n1} = \varepsilon_2 E_{n2} \quad \mu_1 H_{n1} = \mu_2 H_{n2}$$

должны выполняться вне зависимости от того, имеют ли эти среды одинаковую правизну или разную. Из (12) следует, что x - и y - компоненты полей E и H в преломленном луче сохраняют свое направление независимо от правизны обеих сред. Что касается z компонент, то они сохраняют свое направление только тогда, к когда правизна обеих сред одинакова. Если же правизна различна, то z – способностями компоненты меняют знак.

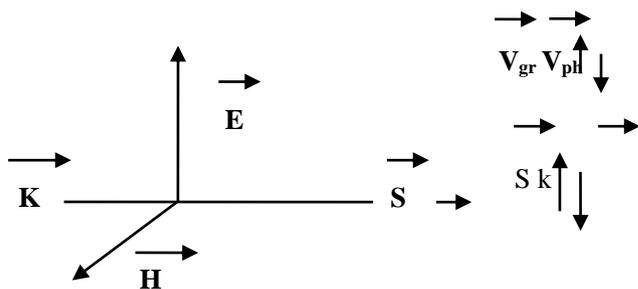


Рис.3. Направления векторов фазовых и групповых скоростей левых веществ

Это соответствует тому, что при переходе в среду с другой правизной векторы E и H не только изменяются по величине из-за различия в ε и μ но еще и испытывают зеркальное отражение относительно границы раздела двух сред. То же самое происходит и с вектором k . Одновременное зеркальное отражение всей тройки векторов как раз и соответствует изменению знака определителя G в (33). Ход преломленного луча, получающийся в результате такого отражения тройки векторов, изображен на рис. 3. Как мы видим, преломленный луч во второй, левой среде относительно оси z , по сравнению со случаем, когда вторая среда – правая. Следует заметить, что отраженный луч всегда направлен одинаково, вне зависимости от правизны обеих сред. Из рис. 3 видно, что обычная формула Снеллиуса нуждается в уточнении, если среды 1 и 2 обладают различной правизной.

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \phi} = n_{1,2} = (\varepsilon_2 \mu_2 / \varepsilon_1 \mu_1)^{1/2} \quad (34)$$

Правильная запись формулы (14) имеет вид

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \phi} = n_{1,2} = p_2 / p_1 (\varepsilon_2 \mu_2 / \varepsilon_1 \mu_1)^{1/2}. \quad (35)$$

Здесь p_1 и p_2 - правизна первой и второй сред соответственно. Из выражения (35) ясно, что коэффициент преломления двух сред может быть и отрицательным, если правизна этих сред различна. В частности, отрицателен коэффициент преломления левых сред относительно вакуума.

При нахождении амплитуд проходящего и отраженного света обычно пользуются формулами Френеля. В эти формулы входят величины ε , μ , n , ψ , φ . Чтобы не сделать ошибки, в формулах Френеля следует всегда пользоваться абсолютными значениями этих величин. Интересен случай, когда луч переходит из среды, характеризующейся значениями, $\varepsilon > 0$, $\mu > 0$ в среду, характеризующуюся величинами $\varepsilon_2 = -\varepsilon_1$ и $\mu_2 = -\mu_1$. В этом случае луч испытывает преломление на границе двух сред, но отраженный луч отсутствует [10].

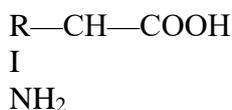
Таким образом, этот пример, да и другие обстоятельства связанные с природой материалов эксперимента (галогенидов серебра) дают основание, чтобы учитывать это интересное явление ранее не взятые во внимание. Дело в том, что как сказано выше регистрирующие среды, которые использовались в эксперименте с такими размерами (нано метрового диапазона), и такой природы, как показали в работах [10], при определенных условиях проявляют те свойства, о которых говорилось выше, то есть могут иметь коэффициента преломления с отрицательным знаком. В нашем эксперименте, мы имели дело с зафиксированным значением траектории электромагнитного излучения через регистрирующую среду в зависимости от коэффициента преломления $n = \pm\sqrt{\varepsilon\mu}$. Как видно из уравнения Максвелла, и следствии при учете материального уравнения необходимого при

распространении ее в разных средах, а так же из уравнении $n = \left[\frac{1}{2} \mu \varepsilon (\sqrt{1 + tg^2} + 1) \right]^{1/2}$ и

$R_{встр} > \frac{2n}{\lambda}$, можно проследить за разрешающей способностью регистрирующей среды в зависимости от $n = \pm\sqrt{\varepsilon\mu}$, то есть, это и есть математическая модель будущего регистрирующего материала для создания оптического прибора с необходимым разрешением. В нашем эксперименте управляемым параметром был коэффициент преломления n , которого можно было менять в пределах от 1 до 2.89, с помощью состава количества и размера *нано частиц серебра* и других составляющих, одним из которых

являются сложные органические соединения – это белковые соединения основой которых являются аминокислоты.

Строение аминокислот, составляющих белки, можно выразить общей структурной формулой:



Таким образом, основным параметром *математической модели для регистрирующей среды* является коэффициент преломления - n , входящая в неявной форме в материальное уравнение и в основное уравнение электродинамики. Аналогом этих физических объектов является классические материалы разного сорта (кварцы и стекла – Si) из которых затем выполняются оптические элементы: решетки, зеркала, линзы, а физической моделью являются разные высокоразрешающие регистрирующие среды, предназначенные для голографии. Естественно все сказанное имеет непосредственное отношение и к понятию *разрешающей способности приборов* (элементов перечисленных выше), для которых *математической моделью* является уравнение Френеля – Кирхгофа, представленное ниже.

$$\begin{aligned} a(x, y) = & \frac{e^{ikf}}{i\lambda f} \cdot \exp\left[i\frac{k}{2f}(x^2 + y^2)\right] \cdot \iint t(x_1 y_1) \exp\left[i\frac{k}{2f}(x_1^2 + y_1^2)\right] \times \\ & \times \exp\left[-i\frac{k}{f}(x\xi + y\eta)\right] d\eta \cdot d\xi \end{aligned} \quad (36)$$

В обоих случаях имеем дело с электромагнитной волной. В первом случае благодаря взаимному воздействию электромагнитной волны и структуры регистрирующей среды имеем возможность формировать, необходимый новый оптический элемент любой разрешающей способности. Классическая разрешающая способности ограничена длиной волны. Во втором случае, воздействуя на электромагнитную волну несущую разнообразную информацию переменными регулируемые параметрами оптического прибора, выделить или разрешить необходимую из них [11, 12, 13].

Литература

1. Денисюк Ю.Н., Протас И.Р. Опт. и спектроскоп., 1963, 14, № 5, с.721-725.
2. Кириллов Н.И., Васильева Н.В., Фельдшеров Е.М. Докл. на Межд. конгрессе по фотогр. науке в Москве. Секция В. М., Внешторгиздат, 1970, с. 317—320, Материалы 2-й Всесоюзной школы по голографии. Л., ФТИ, 1971, с. 299—305.
3. Васильева Н.В., Кириллов Н.И. Техника кино и телевидения, 1972, № 7, с. 3—8; Материалы 3-й Всесоюзной школы по голографии. Л., ФТИ, 1972, с. 339—354.
4. Nassenstein H., Deden H., Metz H. etal. Phot. Sci. and Engng, 1969, 13, № 4, с. 194—199.
5. Толчин В.Г., Турухано Б.Г., Турухано Н.и др. Вкн.: Проблемы голографии. Вып. 1. ., МИРЭА, 1973, с.107—110.
6. Кусаинов С.Г., Бегимов Б.Т., Буктуков Н.С., Кусаинов А.С. Пространственные частоты в информационных возможностях голографической записи //Вестник КазГНУ. Серия Физическая, 2001, Часть1, с. 50-58.
7. Андреева О. В., Ярославская Н. Н., Говорков Л. П., Суханов В. И. В кн.: Проблемы голографии. Вып. 3. М., МИРЭА, 1973, с. 155—160.
8. Андреева О. В., Загорская З. А., Кадыш Т. ЕЛ, Суханов В. И. Оптическая голография. Материалы к краткосрочному семинару. Под ред. Ю. Н. Денисюка. Л., 1972, с. 27-30.
9. Еленин Г.Г. Нанотехнология и вычислительная математика // МГУ им. М. В. Ломоносова, доклад на сем. «Математическое моделирование процессов в наноструктурах и нанотехнологиях».

10. Веселаго В.Г. Электродинамика веществ с одновременно отрицательными значениями ϵ и μ // УФН том 92, вып. 3, с.517 -525 (1967) июль.

11. Кусаинов С.Г., Кусаинов А.С., Рамазанов Т.С. Голографические линзы в системах обработки информации с некогерентными источниками излучения // Вестник КазГНУ № 2 (25) 2001, с.35-40.

12. Кусаинов С.Г., Буктуков Н.С., Кусаинов А.С., Турлыбекова Г.К., Кусаинова А.С. Нанотехнология процесса создания новых голограммно оптических элементов»//Докл.НАН РК №3 2006, с.100-106.

13. J.B.Pendry. Negative Refraction a Perfect Lens. Physical review letters , volume 85, Number 18, 30 October, p. 3966 - 3969

ТІРКЕГІШ ОРТАЛАРДЫ СЫНУ КОЭФИЦИЕНТІНІҢ ФУНКЦИЯСЫ РЕТІНДЕ МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛЬДЕУ

Г.К. Тұрлыбекова, С.Г. Құсайынов

Жұмыста толқынның фазалық жылдамдығын сипаттайтын сыну коэффициентіне ортаның қасиеттерінің әсері қарастырылған, сонымен қатар сыну коэффициентінің ϵ - ортаның диэлектрлік өтімділігі мен μ -магниттік өтімділігінің абсолют мәніне ғана емес, таңбасына да тәуелділігі, яғни $n = -\sqrt{\epsilon\mu}$, оның теріс мән де қабылдайтындығы қарастырылған. Бұл функционалдық тәуелділік, алдыға қойылған есепті шешу үшін тікелей ескерілетін электродинамиканың негізгі теңдеуі мен оған сәйкес материалдық теңдеулерді сипаттайтын математикалық модель түрінде өрнектелген. Сонымен қатар бұл жұмыс голограммалық оптикалық құралдар және олардың ажыратқыштық қабілеттіктерін зерттеуге арналған.

MATHEMATICAL MODEL OF FILING MEDIUMS AS FUNCTION OF A REFRACTIVITY

G.K. Turlybekova, S.G. Kusainov

In operation influence of properties of a medium, on such parameter as a refractivity n describing a phase velocity of a wave, and also association ϵ - is shown, to inductivity and μ - to a magnetic conductivity not only on an absolute value of them, but also on a sign which the refractivity can accept the bound with them the formula $n = -\sqrt{\epsilon\mu}$ that is his negative value. Operation as is bound with holography optical devices and their solving capacity, examination which authors of operation are engaged. This functional connection is submitted as mathematical model circumscribed by the constitutive equation of electrodynamics and the relevant constitutive equations which is necessary for taking into account in this case for a solution of a task in view.