ФИЗИКА АТОМНОГО ЯДРА И ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ. АСТРОФИЗИКА

КОЭФФИЦИЕНТЫ КЛЕБША-ГОРДАНА В КВАНТОВЫХ ПРИЛОЖЕНИЯХ

М.А. Жусупов, Р.С. Кабатаева
НИИЭТФ, Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы

Рассматриваются вопросы, связанные с различными приложениями квантовой теории коэффициентов векторного сложения – коэффициентов Клебша-Гордана.

Представление о коэффициентах Клебша-Гордана (КГ) в основном связывается с формулами сложения угловых моментов в системах со сложным характером взаимодействия частиц. Теория применима при сложении любых моментов частиц: спиновых $\vec{s}$, орбитальных $\vec{l}$, изотопических спинов $\vec{T}$ [1,2].

Пусть имеется система, состоящая из двух подсистем 1 и 2 [1,2]. Состояние этих подсистем определяется соответственно векторами моментов количества движения $\vec{J}_1$ и $\vec{J}_2$.

Допустим далее, что операторы проекций этих моментов коммутируют, то есть

$$\left[\hat{J}_{1_l}, \hat{J}_{2_k}\right] = 0, \quad l,k = 1,2,3 \text{ или } \quad x,y,z \tag{1}$$

Тогда полная система может находиться в состояниях, в которых одновременно определенное значение имеют операторы квадратов моментов подсистем:

$$\hat{J}_1^2 = \hbar^2 j_1\left(j_1+1\right), \quad \hat{J}_2^2 = \hbar^2 j_2\left(j_2+1\right) \tag{2}$$

и их проекции на одну из осей координат, за которую примем ось z:

$$J_{1_z} = \hbar m_1, \quad J_{2_z} = \hbar m_2, \tag{3}$$

где j_1, j_2 - квантовые числа, определяющие собственные значения операторов моментов $\hat{\vec{J}}_1$ и $\hat{\vec{J}}_2$ соответственно, m_1, m_2 - квантовые числа, определяющие собственные значения операторов проекции моментов J_{1_z} и J_{2_z} соответственно.

Если между подсистемами имеется взаимодействие, то моменты отдельных подсистем не сохраняются и хорошими квантовыми числами будут лишь полный момент количества движения системы $\vec{J}$ и его проекция M.

Однако, если взаимодействие не слишком сильно, то в нулевом приближении можно считать, что не сохраняются только проекции моментов подсистем m_1, m_2, а моменты $\vec{j}_1$ и $\vec{j}_2$ являются сохраняющимися величинами. В этом случае состояние всей системы характеризуется четырьмя квантовыми числами $j_1 j_2 MJ$ и описывается волновой функцией (ВФ) $\left| j_1 j_2 JM \right\rangle$, представляющей собой линейную комбинацию ВФ подсистем:

$$\left| j_1 j_2 JM \right\rangle = \sum_{m_1 m_2} (j_1 m_1 j_2 m_2 / JM) \cdot \left| j_1 m_1 \right\rangle \cdot \left| j_2 m_2 \right\rangle. \tag{4}$$

Коэффициенты этой линейной комбинации $(j_1 m_1 j_2 m_2 / JM)$ и называются *коэффициентами векторного сложения* или *коэффициентами Клебша – Гордана*, а сама процедура перехода от моментов $\vec{J}_1$ и $\vec{J}_2$ и их проекций m_1, m_2 для отдельных подсистем к суммарному моменту количества движения $\vec{J}$ называется векторным сложением угловых моментов. Оператор полного момента системы $\hat{\vec{J}}$ равен векторной сумме операторов моментов подсистем $\hat{\vec{J}} = \hat{\vec{J}}_1 + \hat{\vec{J}}_2$. Коэффициенты $(j_1 m_1 j_2 m_2 / JM)$ определяют вклад различных функций $| j_1 m_1 j_2 m_2 \rangle = | j_1 m_1 \rangle \cdot | j_2 m_2 \rangle$ в (4).

В системе трех моментов j_1, j_2, j_3 при вычислении матричных элементов используются $6j$-символы или коэффициентов Рака́ $U(j_1 j_2 j j_3 : j_{12} j_{23})$ [1,2]. Они представляют из себя сумму произведений четырех коэффициентов Клебша-Гордана
$$\langle j_1 j_2 (j_{12}), j_3 : j / j_1, j_2 j_3 (j_{23}) : j \rangle = \sum_{m_1 m_2 m_3 m_{12} m_{23}} (j_1 m_1 j_2 m_2 / j_{12} m_{12}) \cdot (j_{12} m_{12} j_3 m_3 / jm) \cdot$$
$$\cdot (j_2 m_2 j_3 m_3 / j_{23} m_{23}) \cdot (j_1 m_1 j_{23} m_{23} / jm)$$
Точно также в системе четырех моментов используются $9j$-символы, или обобщенные коэффициенты Рака [1,2]. В частности их применяют при переходе в волновых функциях от LS-связи к jj-связи угловых моментов (или при переходе от jj-связи к LS-связи).

Физический смысл коэффициентов Клебша – Гордана

Квадрат модуля коэффициентов КГ представляет собою вероятность того, что в системе с моментом $\vec{J}$ и проекцией M момент первой подсистемы $\hat{\vec{J}}_1$ имеет проекцию m_1, а момент второй подсистемы $\hat{\vec{J}}_2$ имеет проекцию m_2 [1,2].

$$\left| (j_1 m_1 j_2 m_2 / JM) \right|^2 \text{ - искомая вероятность.} \tag{5}$$

В связи с тем, что коэффициенты векторного сложения осуществляют унитарное преобразование от функций
$$| j_1 m_1 j_2 m_2 \rangle = | j_1 m_1 \rangle \cdot | j_2 m_2 \rangle$$

к функциям
$$| j_1 j_2 JM \rangle = \sum_{m_1 m_2} (j_1 m_1 j_2 m_2 / JM) \cdot | j_1 m_1 \rangle \cdot | j_2 m_2 \rangle,$$

то справедливо следующее равенство:

$$| j_1 m_1 \rangle \cdot | j_2 m_2 \rangle = \sum_{JM} (j_1 m_1 j_2 m_2 / JM) | j_1 j_2 JM \rangle. \tag{6}$$

Отсюда следует, что квадрат модуля коэффициентов КГ является также вероятностью того, что система, образованная из двух подсистем в состояниях $j_1 m_1$ и $j_2 m_2$, имеет полный момент равный J. Поэтому сумма квадратов модулей коэффициентов векторного сложения равна 1:

$$\sum_{m_1 + m_2 = M} \left| (j_1 m_1 j_2 m_2 / JM) \right|^2 = 1. \tag{7}$$

Коэффициенты Клебша – Гордана являются матрицами преобразования от представления, в котором заданы проекции моментов подсистем, к представлению, в котором задан полный момент системы и его проекция. Коэффициенты векторного сложения играют большую роль в приложениях квантовой механики, поэтому укажем основные свойства этих коэффициентов, чтобы облегчить их использование для практических целей.

Основные свойства коэффициентов векторного сложения

1^0. а) Из того, что момент количества движения принимает значения

$$J = |j_1 - j_2|, |j_1 - j_2| + 1, ..., j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2$$

следует, что коэффициенты векторного сложения $(j_1 m_1 j_2 m_2 / JM)$ отличны от нуля только в том случае, когда моменты j_1, j_2 и J удовлетворяют так называемому «правилу треугольника», то есть

$$\begin{aligned} &|j_1 - j_2| \le J \le j_1 + j_2 \\ &|J - j_2| \le j_1 \le J + j_2 \\ &|J - j_1| \le j_2 \le J + j_1 \end{aligned} \tag{8}$$

или сокращенно эти условия записываются как $\Delta(j_1 j_2 J)$.

Числа j_1, j_2 и J входят в условие треугольника (8) симметричным образом.

Если условие треугольника (8) не выполнено, то коэффициенты векторного сложения автоматически равны нулю.

б) Из закона сохранения проекции момента количества движения следует, что должно выполняться равенство

$$M = m_1 + m_2 . \tag{9}$$

Коэффициенты векторного сложения отличны от нуля только при выполнении равенств (8) и (9).

Поэтому в сумме $|j_1 j_2 JM\rangle = \sum_{m_1 m_2} (j_1 m_1 j_2 m_2 / JM) \cdot |j_1 m_1\rangle \cdot |j_2 m_2\rangle$ суммирование по одному из индексов носит формальный характер.

При заданных j_1, j_2 квантовое число J может пробегать последовательность отличающихся на единицу значений, удовлетворяющих (8). Каждому значению J соответствует $(2J+1)$ значений $M = \pm J, \pm(J-1), \ldots$, поэтому общее число состояний со всеми возможными значениями J будет равно:

$$\sum_{J=|j_1 - j_2|}^{j_1 + j_2} (2J+1) = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1) , \tag{10}$$

то есть совпадает с общим числом состояний, описываемых функциями

$$|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = |j_1 m_1\rangle \cdot |j_2 m_2\rangle .$$

2^0. Свойство ортонормированности коэффициентов векторного сложения

$$\sum_{m_1 m_2} (j_1 m_1 j_2 m_2 / JM) \cdot (j_1 m_1 j_2 m_2 J'M') = \delta_{JJ'} \delta_{MM'}$$

$$\sum_{JM} (j_1 m_1 j_2 m_2 / JM) \cdot (j_1 m_1' j_2 m_2' / JM) = \delta_{m_1 m_1'} \delta_{m_2 m_2'} .$$

Свойства ортогональности коэффициентов векторного сложения можно выразить также равенством:

$$\sum_{m_1 M}\left(j_1 m_1 j_2 m_2 / JM\right)\cdot\left(j_1 m_1 j_2' m_2' / JM\right)=\frac{2J+1}{2j_2+1}\delta_{j_2 j_2'}\delta_{m_2 m_2'}$$

3^0. Коэффициенты векторного сложения являются действительными.

4^0. Свойство симметрии относительно перестановки моментов

$$\left(j_1 m_1 j_2 m_2 / JM\right)=\left(-1\right)^{j_1+j_2-J}\left(j_2 m_2 j_1 m_1 / JM\right),$$

то есть, важен порядок сложения моментов, поскольку фаза может принимать значения ± 1. Следовательно, существует соотношение между ВФ:

$$\left|\, j_1 j_2 JM\right\rangle=\left(-1\right)^{j_1+j_2-J}\left|\, j_2 j_1 JM\right\rangle.$$

Это свойство важно при построении волновых функций с определенной перестановочной симметрией. В частности, для эквивалентных нуклонов (то есть находящихся в одной оболочке $l_1=l_2$) их фермионная статистика требует, чтобы суммарные квантовые числа удовлетворяли условию $L+S+T$ - нечетное число.

Также свойства симметрии можно записать в следующем виде:

$$\left(j_1 m_1 j_2 m_2 / JM\right)=\left(-1\right)^{j_2+m_2}\sqrt{\frac{2J+1}{2j_1+1}}\left(J-M\ j_2 m_2 / j_1-m_1\right)=\left(-1\right)^{j_1-m_1}\sqrt{\frac{2J+1}{2j_2+1}}\left(j_1 m_1 J-M / j_2-m_2\right)$$

5^0. Свойство обращения знаков проекций

$$\left(j_1 m_1 j_2 m_2 / JM\right)=\left(-1\right)^{j_1+j_2-J}\left(j_1-m_1 j_2-m_2 / J-M\right).$$

Приведем еще ряд очевидных свойств:

$$\left(j_1 m_1 j_2 m_2 / 00\right)=\delta_{j_1 j_2}\delta_{m_1 -m_2}\left(-1\right)^{j_1-m_1}\frac{1}{\sqrt{2j_1+1}}$$

$$\left(JM\,00 / JM\right)=1$$

$$\left(l_1 0 l_2 0 / L0\right)=0,\ \text{если}\ l_1+l_2+L\ \text{- нечетное число}$$

Подобное соотношение лежит в основе правил отбора в ядерных реакциях.

Применение коэффициентов векторного сложения

Особый интерес представляет сравнение полных сечений ядерных процессов, когда может быть применен принцип изотопической инвариантности (зарядовой независимости) ядерных сил. Полное сечение реакции характеризует вероятность этого процесса. В этом случае отношение полных сечений процессов определяется отношением соответствующих коэффициентов КГ по изотопическому спину, поскольку остальные квантовые числа взаимодействующих частиц одинаковые. В литературе подобные отношения называют правилом Шмушкевича.

В качестве первого примера рассмотрим отношения полных сечений следующих процессов [4,5]:

$$\begin{matrix} p+p\rightarrow d+\pi^+ \\ p+n\rightarrow d+\pi^0 \end{matrix}\qquad\Rightarrow\qquad \frac{\sigma_1}{\sigma_2}=\frac{\left(\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}/11\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}/10\right)^2}=2$$

$$p + d \rightarrow He^3 + \pi^0$$
$$p + d \rightarrow H^3 + \pi^+ \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\left(\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}10/\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\right)^2}{\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}11/\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}.$$

Полученные соотношения хорошо соответствуют экспериментальным сечениям.

В качестве следующего примера рассмотрим отношение сечений процессов рассеяния пионов нуклонами

$$\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p \tag{11}$$

$$\pi^- + p \rightarrow \pi N = \begin{cases} \pi^0 + n \\ \pi^- + p \end{cases} \tag{12}$$

в области энергий 33-резонанса [4]. При этом рассеяние происходит главным образом через промежуточное состояние πN - системы с полным изотопическим спином $T = 3/2$ (нерезонансное взаимодействие в состоянии с $T = 1/2$ пренебрежимо мало). Первые резонансы были открыты Э. Ферми при рассеянии π-мезонов на нуклонах: $\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p,\ \pi^+ + p \rightarrow \Delta \rightarrow \pi^+ + p$ где Δ - резонанс имеет следующие квантовые числа спина, четности и изоспина $j^\pi, T = \frac{3}{2}^+, \frac{3}{2}$. В литературе он называется 33-резонансом.

Найдем массу Δ - резонанса.

$$M_\Delta^2 c^4 = \left[\left(E_\pi + E_p\right)^2 - \left(\vec{p}_\pi + \vec{p}_p\right)^2 c^2\right]. \tag{13}$$

Принимая во внимание, что
$$\begin{cases} m_\pi^2 c^4 = E_\pi^2 - p_\pi^2 c^2, & E_p = m_p c^2 \\ E_\pi = T_\pi + m_\pi c^2, & p_p = 0 \end{cases}, \text{ получим}$$

$$M_\Delta c^2 = \sqrt{E_\pi^2 + m_p^2 c^4 + 2E_\pi m_p c^2 - p_\pi^2 c^2} = \sqrt{m_\pi^2 c^4 + m_p^2 c^4 + 2m_p c^2\left(T_\pi + m_\pi c^2\right)} = 1236\,\text{МэВ},$$

где $T_\pi = 180\,\text{МэВ},\ m_p c^2 = 940\,\text{МэВ},\ m_\pi c^2 = 140\,\text{МэВ}.$ (14)

Отсюда масса 33-резонанса равна 1236 МэВ в $\pi^+ p$-системе.

Найдем при одинаковых относительных энергиях, углах разлета и ориентациях спинов соотношения между дифференциальными сечениями этих трех реакций:

$$\text{(I)} \quad \pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p \tag{15}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(II)} & \pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n \\ \text{(III)} & \pi^- + p \rightarrow \pi^- + p \end{array}\right\} \tag{16}$$

Реакции (II) и (III) представляют два канала единой (в отношении изоспина) реакции $\pi^- p \rightarrow \pi N$, отличающиеся различными зарядовыми состояниями пион-нуклонной системы в конечном состоянии, изоспин которой равен $T = 3/2$. Сравним $\left(d\sigma(II) + d\sigma(III)\right)$ с $d\sigma(I)$. Рассматриваемые реакции совершенно одинаковы в смысле координатных и спиновых степеней свободы, и в силу изотопической инвариантности (с учетом доминирующей роли состояний с $T = 3/2$ в πN - взаимодействии) отношение сечений $\left(d\sigma(II) + d\sigma(III)\right) : d\sigma(I)$ равно отношению «весов» необходимого изотопического состояния с $T = 3/2$ в начальных состояниях $\pi^- p$ и $\pi^+ p$ пион-нуклонной системы. Указанные веса определяются соответствующими коэффициентами КГ по изоспину.

Коэффициенты КГ по изотопическому спину отличны друг от друга, в отличие от других моментов, следовательно, имеет место правило Шмушкевича:

$$\sigma_1 / \sigma_2 = |T_1|^2 / |T_2|^2 . \tag{17}$$

Для реакции $\pi^+ + p$ в области 33-резонанса коэффициент КГ [4,5]

$$T_1 = \left(1 1 \tfrac{1}{2} \tfrac{1}{2} / \tfrac{3}{2} \tfrac{3}{2}\right) = 1 . \tag{18}$$

Для реакции $\pi^- + p$ в области 33-резонанса коэффициент КГ

$$T_2 = \left(1 -1 \tfrac{1}{2} \tfrac{1}{2} / \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}\right) = 1/\sqrt{3} . \tag{19}$$

Следовательно,

$$d\sigma_1 / d\sigma_2 = 3, \tag{20}$$

что довольно неплохо совпадает с приведенными на экспериментальном графике данными (рис.1) [3].

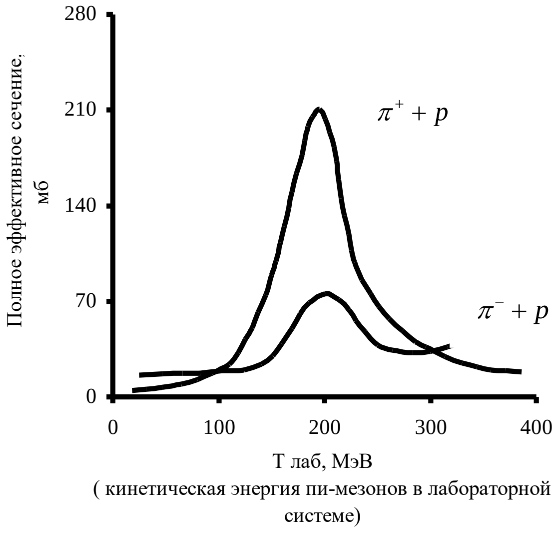

Рис. 1. Возбужденные состояния нуклонов, наблюдаемые при упругом рассеянии пионов на протоне

При энергии резонанса 190 МэВ имеем

$$d\sigma_1 / d\sigma_2 = 215\text{мб} / 75\text{мб} \approx 2,9 . \tag{20'}$$

Найдем теперь отношение $d\sigma(II):d\sigma(III)$. Оно равно отношению «весов» зарядовых состояний $\pi^0 n$ и $\pi^- p$ пион-нуклонной системы в состоянии с $T=3/2$ (и $T_3=-1/2$), которые определяются коэффициентами КГ.

Для реакции $\pi^- + p \to \pi^- + p$ в области 33-резонанса коэффициент КГ

$$T_2 = \left(1 - 1\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}/\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}\right) = 1/\sqrt{3}. \tag{21}$$

Для реакции $\pi^- + p \to \pi^0 + n$ в области 33-резонанса коэффициент КГ

$$T_3 = \left(10\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}/\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{2/3}, \tag{22}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\sigma(II)}{d\sigma(III)} = \frac{|T_2|^2}{|T_3|^2} = 2. \tag{23}$$

Из (20) и (23) следует: $d\sigma(I):d\sigma(II):d\sigma(III) = 9:2:1$.

Рассмотрим нейтральную частицу f^0 с изотопическим спином $T=0$, которая имеет вероятность распада на два пиона: $f^0 \to 2\pi$. Возможные каналы распада: $f^0 \to \pi^+\pi^-$, $f^0 \to 2\pi^0$. Найдем соотношение между вероятностями распада частицы f^0 по указанным каналам.

ВФ состояний представляется в виде

$$\Psi(TT_3) = \sum_{t_3=-t_\pi}^{t_\pi} \left(t_{\pi_1} t_{3\pi_1} t_{\pi_2} t_{3\pi_2} / TT_3\right) \cdot \Psi\left(t_{\pi_1} t_{3\pi_1}\right) \cdot \Psi\left(t_{\pi_2} t_{3\pi_2}\right). \tag{24}$$

Возможные значения третьей компоненты полного изоспина $T_3 = 0$, так как $T=0$.

$$\Psi_{2\pi}(0,0) = (111-1/00)\Psi_{\pi^+}(1,1)\Psi_{\pi^-}(1,-1) + (1010/00)\Psi_{\pi^0}(1,0)\Psi_{\pi^0}(1,0) + \\ + (1-111/00)\Psi_{\pi^-}(1,-1)\Psi_{\pi^+}(1,1)$$

Коэффициенты КГ:

$$(111-1/00) = 1/\sqrt{3}, \quad (1010/00) = -1/\sqrt{3}, \quad (1-111/00) = (-1)^{1+1-0}(111-1/00) = 1/\sqrt{3}.$$

Следовательно,

$$\Psi_{2\pi}(0,0) = \frac{1}{\sqrt{3}}\Psi_{\pi^+}(1,1)\Psi_{\pi^-}(1,-1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\Psi_{\pi^0}(1,0)\Psi_{\pi^0}(1,0) + \frac{1}{\sqrt{3}}\Psi_{\pi^-}(1,-1)\Psi_{\pi^+}(1,1), \tag{25}$$

здесь $\Psi_{2\pi}(0,0)$ - изоспиновая ВФ состояния двух пионов с $T=0$, $\Psi_\pi(t_\pi, t_{3\pi})$ - изоспиновые ВФ пионов с определенным значением компоненты t_3.

Вероятность распада f^0 в различные зарядовые состояния двухпионной системы ($\pi^+\pi^-$, $2\pi^0$) пропорциональны вероятностям нахождения пионов в таких состояниях при $T=0$ (в силу сохранения изоспина в распаде). Вероятность зарядового состояния определяется квадратом коэффициента КГ, то есть вероятность состояния из двух π^0 равна $\omega_{T=0}\left(2\pi^0\right)=\left(1/\sqrt{3}\right)^2=1/3$. Соответственно $\omega_{T=0}\left(\pi^+\pi^-\right)=1-\omega_{T=0}\left(2\pi^0\right)=1-1/3=2/3$.

Следовательно, $$\frac{\omega\left(f^0\to\pi^+\pi^-\right)}{\omega\left(f^0\to 2\pi^0\right)}=2.$$

Таким образом, коэффициенты КГ находят разнообразное применение в физике микромира.

Литература

1. Давыдов А.С. , Квантовая механика, «Наука», физ. мат. лит., Москва, 1973, 703с.
2. Балашов В.В., Теоретический практикум по ядерной и атомной физике, Москва, Энергоатомиздат, 1984, 173 с.
3. Перкинс Д., Введение в физику высоких энергий, Энергоатомиздат, Москва, 1991, 430 с.
4. Жусупов М.А., Чумбалова Р.А., Введение в теорию атомного ядра, часть 1, Алма-Ата, КазГУ, 1978, 131 с.
5. Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К., Квантовая теория углового момента, Ленинград, Наука, 1975, 441 с.

КВАНТТЫҚ ҚОЛДАНЫЛУЛАРДАҒЫ КЛЕБШ-ГОРДАН КОЭФФИЦИЕНТТЕРІ

М.А. Жүсіпов, Р.С. Қабатаева

Векторлық қосу коэффициенттері болып табылатын Клебш-Гордан коэффициенттерінің кванттық теориясының әр түрлі қолданылуларына байланысты сұрақтар қарастырылды.

CLEBSH-GORDAN COEFFICIENTS IN QUANTUM APPLICATIONS

M.A. Zhusupov, R.S. Kabatayeva

Questions concerning Klebsh-Gordan coefficients’ quantum theory various applications are considered.