ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ГРАВИМАГНИТНОГО ПОЛЯ

М.М. Абдильдин

НИИЭТФ, Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы

В работе получены волновые уравнения для потенциалов гравимагнитного поля в нестационарном случае в общей теории относительности.

Рассмотрим вращающийся шар с массой m_0 и собственным моментом вращения $\vec{S}_0$. Согласно общей теории относительности (ОТО) вокруг такого шара возникает римановая геометрия с некоторой метрикой ds^2. В квазистационарном случае в первом приближении, эта метрика по Фоку имеет вид [1]

$$ds^2 = \left(c^2 - 2U\right)dt^2 - \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)\left(dx_1^{\,2} + dx_2^{\,2} + dx_3^{\,2}\right) + \\ + \frac{8}{c^2}\left(U_1 dx_1 + U_2 dx_2 + U_3 dx_3\right)dt\ . \tag{1}$$

Функции U и U_i удовлетворяют уравнениям

$$\Delta U = -4\pi\gamma\rho, \quad \Delta U_i = -4\pi\gamma\rho v_i, \tag{2}$$

где ρ – плотность массы, ρv_i – плотность тока массы.

Для вращающегося жидкого шара [2]

$$U = \frac{\gamma m_0}{r}, \quad \vec{U} = -\frac{\gamma}{2r^3}\left[\vec{r}\vec{S}_0\right]. \tag{3}$$

Если теперь, следуя гипотезе Эйнштейна [2]

$$g_{\mu\nu} \equiv U_{\mu\nu}, \quad \mu = 0,1,2,3 \tag{4}$$

где $U_{\mu\nu}$ – гравитационные потенциалы, мы переведем вышесказанное геометрическое утверждение на язык физики, то получается, что вокруг вращающегося шара возникают скалярное гравитационное поле с некоторым потенциалом U и векторное гравитационное поле с вектор-потенциалом U_i, определяемые уравнениями (2) или выражениями (3).

В наших работах [2, 3] показано, что метрика первого приближения Фока нуждается в уточнении. Такая уточненная метрика первого приближения Фока для вращающегося жидкого шара имеет вид

$$ds^2 = \left[c^2 - 2U\left(1 + \frac{\xi^*}{m_0 c^2}\right) + \frac{2U^2}{c^2} + \frac{4\gamma}{7m_0 c^2}\left(\vec{S}_0\vec{\nabla}\right)\left(\vec{S}_0\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right)\right]dt^2 - \\ - \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)\left(dx_1^{\,2} + dx_2^{\,2} + dx_3^{\,2}\right) + \frac{8}{c^2}\left(U_1 dx_1 + U_2 dx_2 + U_3 dx_3\right)dt \tag{5}$$

где

$$\xi^* = \frac{8}{3}T + \frac{2}{3}\varepsilon \qquad (6)$$

Здесь T – кинетическая энергия вращения тела, ε – взятая с обратным знаком энергия взаимного притяжения частиц тела. Согласно этой метрике, вокруг вращающегося жидкого шара возникает скалярное гравитационное поле описываемое не ньютоновым потенциалом U, а некоторым новым обобщенным скалярным гравитационным потенциалом

$$U^* = U\left(1 + \frac{\xi^*}{m_0 c^2}\right) - \frac{U^2}{c^2} - \frac{2\gamma}{7 m_0 c^2}\left(\vec{S}_0 \vec{\nabla}\right)\left(\vec{S}_0 \vec{\nabla}\frac{1}{r}\right) \qquad (7)$$

удовлетворяющим уравнению

$$\Delta U^* + \frac{2U}{c^2}\Delta U + \frac{2}{c^2}\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\right) = -4\pi\gamma\left[\rho + \frac{\rho}{c^2}\left(\frac{3v^2}{2} + \Pi - U\right)^2 - \frac{P_{ik}}{c^2}\right], \qquad (8)$$

где Π – упругая энергия единицы массы, P_{ik} – трехмерный тензор напряжений.

Для жидкого шара уравнение внутреннего движения имеет вид [1]

$$\rho\left(\frac{\partial U}{\partial x_i} - \omega_{ik}\omega_{jk}x_j\right) = \frac{\partial P}{\partial x_i}, \qquad (9)$$

где ω_{jk} – трехмерный антисимметричный тензор угловой скорости, P – давление.

Что же касается векторного гравитационного поля, то согласно уточненной метрике первого приближения Фока (5), оно описывается по прежнему вторым из уравнений (2) и вторым из выражений (3). Такова ситуация с гравитационными полями вращающегося шара с массой m_0 и собственным моментом $\vec{S}_0$ в механике ОТО в интерпретации Эйнштейна.

Гипотеза гравимагнетизма, выдвинутая в ряде наших работ [2], меняет эту традиционную интерпретацию Эйнштейна. Согласно этой гипотезе, вокруг вращающегося шара, возникает скалярное гравитационное поле описываемое обобщенными скалярным потенциалом U^*, а также магнитное поле описываемое вектор-потенциалом $\vec{A}$, удовлетворяющим уравнению

$$\Delta\vec{A} = \frac{\beta\sqrt{\gamma}}{c}4\pi\rho\vec{v}, \qquad (10)$$

где β – численный коэффициент порядка единицы.

Причем это магнитное поле имеет гравитационное происхождение – гравитация источник магнетизма, точнее такое поле, согласно (10), создается током масс. Аналогичная ситуация имеет место в электродинамике, где ток электрических зарядов создает магнитное поле.

Далее, в наших работах [2] показано, что в случае вращающегося шара между величинами, играющими важную роль в стандартный ОТО и в теории гравимагнетизма существуют соотношения

$$\vec{A} = -\frac{\beta}{\sqrt{\gamma}c}\vec{U}, \; g_{0i} = -\frac{4\sqrt{\gamma}}{\beta c}A_i, \tag{11}$$

где g_{0i} – смешанная компонента метрического тензора.

Заметим, все что сказанное да сих пор относится к квазистационарной метрике, квазистационарным гравитационным полям и квазистационарному гравимагнитному полю.

Возникает вопрос: как же выглядит уравнения гравимагнитных потенциалов в нестационарном случае?

Для решения этого вопроса обратимся к уравнению Эйнштейна [2]

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = \frac{8\pi\gamma}{c^2}T^{\mu\nu}, \; \mu,\nu = 0,1,2,3. \tag{12}$$

где тензор Риччи

$$R^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \Gamma^{\mu\nu} + \Gamma^{\mu,\alpha\beta}\Gamma^{\nu,\alpha\beta} \tag{13}$$

Здесь $\Gamma^{\mu,\alpha\beta}$ есть величина получаемая из символа Кристофереля

$$\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\nu\mu}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}\right), \tag{14}$$

поднятием значков

$$\Gamma^{\mu,\alpha\beta} = g^{\alpha\rho}g^{\beta\delta}\Gamma^{\mu}_{\rho\delta} \tag{15}$$

Последний член в (13) не содержит вторых производных, а представляет однородную квадратичную функцию от величин $\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}$, а значит от первых производных фундаментального тензора $g_{\mu\nu}$.

Вторые производные входят кроме первого члена, так же и в величину $\Gamma^{\mu\nu}$. Но эти последние содержат вторые производные только через посредство первых производных от величин

$$\Gamma^{\nu} = g^{\alpha\beta}\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} \tag{16}$$

Величины $\Gamma^{\mu\nu}$ получаются из Γ^{ν} по правилу формально совпадающему правилам составления полу суммы контравариантных производных, а именно:

$$\Gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\nabla^{\mu}\Gamma^{\nu} + \nabla^{\nu}\Gamma^{\mu}\right), \tag{17}$$

или подробнее

$$\Gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(g^{\mu\delta}\frac{\partial \Gamma^{\nu}}{\partial x^{\delta}} + g^{\nu\delta}\frac{\partial \Gamma^{\mu}}{\partial x^{\delta}} - \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\delta}}\Gamma^{\delta}\right) \tag{18}$$

Поскольку Γ^{ν} не есть вектор, величины Γ^{ν} не являются тензором. Этим обстоятельством можно воспользоваться для упрощения уравнений Эйнштейна.

Уравнения Эйнштейна являются общековариантными и, следовательно допускают преобразования координат, содержащие четыре произвольные функции. Пусть уравнения решены в каких-нибудь произвольных координатах. Мы можем перейти тогда к другим координатам, взяв в качестве независимых переменных четыре решения уравнения $\Box\psi = 0$.

но если каждая из координат x_0, x_1, x_2, x_3 удовлетворяет уравнению $\Box x^{\alpha} = 0$ то в данный координатой системе будет

$$\Gamma^{\nu} = 0, \tag{19}$$

а следовательно и

$$\Gamma^{\mu\nu} = 0, \tag{20}$$

Такая координатная система называется гармонической системой координат [1].

В этой системе уравнения Эйнштейна принимают вид

$$-\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}\partial x_{\beta}} + \Gamma^{\mu,\alpha\beta}\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} = -\frac{8\pi\gamma}{c^2}\left(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}T\right), \tag{21}$$

где

$$R = \frac{8\pi\gamma}{c^2}T. \tag{22}$$

Для выражения тензора массы примем

$$\begin{gathered} c^2\, T^{00} = \rho\left\{1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\nu^2}{2} + \Pi - U\right)\right\}, \\ c^2\, T^{0i} = \rho\nu_I\left\{1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\nu^2}{2} + \Pi - U\right) - \frac{1}{c^2}P_{ik}\nu_k\right\}, \\ c^2\, T^{ik} = \rho\nu_i\nu_k - P_{ik}. \end{gathered} \tag{23}$$

Что же касается оператора Даламбера в (21) то введем некоторое упрощение, заменяя коэффициенты в нем их псевдоэвклидовыми значениями. Тогда уравнения Эйнштейна (21) принимают окончательный вид.

$$\frac{1}{2}\Delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial t^2} + \Gamma^{\mu,\alpha\beta}\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} = -\frac{8\pi\gamma}{c^2}\left(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}T\right), \tag{24}$$

Распишем теперь это уравнение в компонентах. Тогда

$$\frac{1}{2}\Delta g^{00}-\frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2 g^{00}}{\partial t^2}-\frac{2U}{c^6}\Delta U-\frac{2}{c^6}\left(\frac{\partial U}{\partial X_i}\right)^2=-\frac{4\pi\gamma}{c^4}\left[\rho+\frac{\rho}{c^2}\left(\frac{3}{2}\nu^2+\Pi-U\right)-\frac{P_{kk}}{c^2}\right], \qquad (25)$$

$$\frac{1}{2}\Delta g^{0i}-\frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2 g^{0i}}{\partial t^2}=-\frac{8\pi\gamma}{c^4}\rho\nu_i, \qquad (26)$$

поскольку существует соотношения (11), мы можем записать, (27)

$$\Delta\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=\frac{\beta\sqrt{\gamma}}{c}4\pi\rho\vec{\nu}, \qquad (28)$$

или

$$\Delta U^*-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U^*}{\partial t^2}-\frac{2U}{c^2}\Delta U-\frac{2}{c^2}\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)^2=-4\pi\gamma\left[\rho+\frac{\rho}{c^2}\left(\frac{3}{2}\nu^2+\Pi-U\right)-\frac{P_{kk}}{c^2}\right], \qquad (29)$$

$$\Delta\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=\frac{\beta\sqrt{\gamma}}{c}4\pi\rho\vec{\nu}, \qquad (30)$$

Это и есть искомые уравнения для потенциалов гравимагнитного поля в нестационарном случае.

Литература

1. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. – М. – 1961. – С. 563.
2. М.М. Абдильдин. Механика теории гравитации Эйнштейна. – Алма-Ата. – 1988. – С. 198.
3. М.М. Абдильдин. Проблема движения тел в общей теории относительности. Алматы. Қазақ университеті. – 2006.– С. 152.

ГРАВИМАГНИТТІК ӨРІСТІҢ ТОЛҚЫНДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРІ

М.М. Әбділдин

Жұмыста жалпы салыстырмалық теориясында стационар емес жағдай үшін гравимагниттік өрістің толқындық теңдеулері алынған.

WAVE EQUATIONS FOR GRAVIMAGNETIC FIELD

M.M. Abdildin

Wave equations for potentials of gravimagnetic field in nonstationary case in general relativity were obtained in this work.