СКОРОСТЬ КАК ФУНКЦИЯ СОСТОЯНИЯ В МЕХАНИКЕ ОТО

М.М. Абдильдин, Н.А. Бейсен, К.А. Бошкаев, А.С. Таукенова
НИИЭТФ, Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы

Показано, что представление скорости $\vec{v}$ в механике ОТО функцией состояния, вместе с уточненной метрикой первого приближения Фока и гидродинамической формулой Эйлера позволяет по существу решить проблему однозначности релятивистских уравнений вращательного движения в механике ОТО.

В классической механике координата и скорость или координата и импульс являются независимыми переменными определяющие механическое состояние. Соответственно существуют Лагранжевый формализм и Гамильтоновый формализм, с функциями Лагранжа $\mathrm{L}(\vec{r},\vec{v})$ и Гамильтонианом $\mathrm{H}(\vec{r},\vec{p})$. Причем скорость $\vec{v}$ однозначно определяется импульсом $\vec{p}$

$$\vec{v}=\frac{\vec{p}}{m} \tag{1}$$

В механике же ОТО ситуация оказывается другая. Действительно, рассмотрим задачу Шварцшильда. Исходя из уточненной метрики первого приближения Фока [1]

$$ds^2=\left(c^2-2U+\frac{2U^2}{c^2}\right)dt^2-\left(1+\frac{2U}{c^2}\right)\left(dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2\right) \tag{2}$$

Функция Лагранжа материальной частицы с массой m движущейся в гравитационном поле центрального тела с массой m_0

$$L=-mc\frac{ds}{dt}=-mc^2+m\left(\frac{v^2}{2}+U\right)-\frac{m}{2c^2}\left(U^2-3Uv^2-\frac{v^4}{4}\right) \tag{3}$$

Импульс же

$$\vec{p}=\frac{\partial L}{\partial\vec{v}}=\left(1+\frac{3U+\dfrac{v^2}{2}}{c^2}\right)m\vec{v}. \tag{4}$$

Гамильтониан

$$\mathrm{H}=mc^2+\frac{p^2}{2m}-mU+\frac{mU^2}{2c^2}-\frac{3Up^2}{2mc^2}-\frac{p^4}{8m^3c^2}. \tag{5}$$

Из (4) находим

$$\vec{v}(\vec{r},\vec{p})=\left[1-\frac{1}{c^2}\left(3U+\frac{p^2}{2m^2}\right)\right]\frac{\vec{p}}{m}. \tag{6}$$

Это же выражение мы можем получить используя канонические уравнения Гамильтона

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}}, \dot{\vec{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}} \tag{7}$$

Действительно

$$\vec{v}(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = \left[1 - \frac{3U + \frac{p^2}{2m^2}}{c^2}\right]\frac{\vec{p}}{m}. \tag{8}$$

Отсюда видно, что скорость в задаче Шварцшильда уже не является более независимой переменной, а некоторой функцией состояния зависящая от переменных (канонических переменных!) $\vec{r}, \vec{\rho}$. Проще говоря, у скорости появится дополнительное слагаемое, релятивистское поле скоростей

$$\vec{v}_{рел}(\vec{r}, \vec{p}) = -\frac{3U + \frac{p^2}{2m^2}}{c^2} \cdot \frac{\vec{p}}{m}. \tag{9}$$

Тогда

$$\vec{v}(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{\vec{p}}{m} + \vec{v}_{рел}(\vec{r}, \vec{p}). \tag{10}$$

Этим обстоятельством можно воспользоваться для определения угловой скорости собственного вращения пробного тела, применяя известную гидродинамическую формулу Эйлера

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} rot\vec{v} \tag{11}$$

В начале вычислим

$$rot\vec{v} = \left[\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_{рел}\right] = -\frac{3}{mc^2}\left[\vec{\nabla} \cdot U\vec{p}\right] = -\frac{3\gamma m_0}{mc^2}\left[\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{p}}{r}\right] = \frac{3\gamma m_0}{mc^2}\left[\vec{p} \cdot grad\frac{1}{r}\right] = \frac{3\gamma m_0}{mc^2 r^3}\left[\vec{r}\vec{p}\right] \tag{12}$$

Подставляя (12) в (11) имеем

$$\vec{\omega} = \frac{3\gamma m_0}{2mc^2 r^3}\left[\vec{r}\vec{p}\right]. \tag{13}$$

Поскольку

$$\vec{\mathrm{M}} = [\vec{r}\vec{p}]. \tag{14}$$

где $\vec{\mathrm{M}}$ – орбитальный момент или момент импульса, то (13) запишится как

$$\vec{\omega} = \frac{3\gamma m_0}{2mc^2 r^3}\vec{\mathrm{M}}. \tag{15}$$

Это означает, что в механике ОТО в центрально-симметрическом поле массы m_0, пробное тело с массой m приобретает собственное вращения с угловой скоростью (13). Это же не происходит в классической механике, в частности, в задаче Кеплера из-за соотношения (1).

Рассмотрим теперь задачу Линзе-Тирринга в механике ОТО, которая заключается в изучении вопроса о движении материальной частицы с массой m, в гравитационном поле вращающегося массивного тела с массой m_0.

В этом случае исходим из уточненной метрики первого приближения Фока [1]

$$ds^2 = \left(c^2 - 2U + \frac{2U^2}{c^2}\right)dt^2 - \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)\left(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2\right) + \frac{8}{c^2}\left(U_1 dx_1 + U_2 dx_2 + U_3 dx_3\right)dt, \tag{16}$$

где $\vec{U}$ – вектор-потенциал гравитационного поля.
Для вращающегося шара

$$\vec{U} = -\frac{\gamma}{2r^3}\left[\vec{r}\vec{S}_0\right], \tag{17}$$

$\vec{S}_0$ – собственный момент шара.
Функция Лагранжа

$$L = -mc + m\left(U + \frac{v^2}{2}\right) - \frac{m}{2c^2}\left[U^2 - 3Uv^2 - \frac{v^4}{4} + 8\left(\vec{U}\vec{v}\right)\right]. \tag{18}$$

Импульс

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \left(1 + \frac{3U + \frac{v^2}{2}}{c^2}\right)m\vec{v} - \frac{4m}{c^2}\vec{U}. \tag{19}$$

Гамильтониан

$$\mathrm{H} = \vec{v}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - L = mc^2 + \frac{p^2}{2m} - mU + \frac{mU^2}{2c^2} - \frac{3Up^2}{2mc^2} - \frac{p^4}{8m^3c^2} + \frac{4\left(\vec{p}\vec{U}\right)}{c^2}. \tag{20}$$

Скорость

$$\vec{v}(\vec{r},\vec{p}) = \left[1 - \frac{1}{c^2}\left(3U + \frac{p^2}{2m^2}\right)\right]\frac{\vec{p}}{m} + \frac{2\gamma}{c^2 r^3}\left[\vec{S}_0\vec{r}\right]. \tag{21}$$

Применяя снова гидродинамическую формулу (11) получим

$$\vec{\omega} = \frac{3\gamma m_0}{2mc^2 r^3}\vec{\mathrm{M}} + \frac{\gamma}{c^2 r^3}\left[3\vec{r}\left(\vec{r}S_0\right) - \vec{S}_0 r^2\right] \tag{22}$$

Таким образом и в случие задачи Линзе-Тирринга скорость $\vec{v}$ является функцией состояния. Это обстоятельство снова позволило решить вопрос о собственном вращении пробного тела с массой в поле вращающегося массивного тела с массой m_0 и собственным моментом $\vec{S}_0$.

Выражение для угловой скорости (22) в точности совпадает с результатами найденным в другой работе, путем интегрирования релятивистского уравнения вращательного движения полученного методом Фока из уравнений поля Эйнштейна.

В заключении скажем: осознание того факта, что в механике ОТО скорость $\vec{v}$ является функцией состояния, вместе с уточненной метрикой первого приближения Фока и гидродинамической формулой Эйлера позволяет по существу решить проблему однозначности релятивистских уравнений вращательного движения в механике ОТО.
Наконец, выражению (22) можно придать вид

$$\vec{\omega} = -\frac{3m_0}{mc^2} rot\vec{U}_M + \frac{2}{c^2} rot\vec{U}. \tag{23}$$

Где

$$\vec{U}_M = -\frac{\gamma}{2r^3}\left[\vec{r}\vec{\mathrm{M}}\right], \tag{24}$$

т.е. вектор-потенциал создаваемый орбитальным моментом $\vec{\mathrm{M}}$.

Из (23) ясно, что собственное вращение пробного тела индуцировано орбитальным моментом $\vec{\mathrm{M}}$ и собственным моментом $\vec{S}_0$.

Литература

1 М.М. Абдильдин. Проблема движения тел в ОТО. Алматы, Қазақ университеті, – 2006. – С.152.

ЖСТ МЕХАНИКАСЫНДАҒЫ ЖЫЛДАМДЫҚ КҮЙ ФУНКЦИЯСЫ РЕТІНДЕ

М.М. Әбділдин, Н.Ә. Бейсен, Қ.А. Бошқаев, Ә.С. Таукенова

Жұмыста ЖСТ механикасында $\vec{v}$ жылдамдықты күй функциясы ретінде қарастыру Фоктың бірінші жуықтау метрикасы және Эйлердің гидродинамикалық формуласымен бірге ЖСТ механикасындағы релятивтік айналмалы қозғалыс теңдеулері бірмәнділік мәселесін шешу болып табылатындығы көрсетілген.

VELOCITY AS A FUNCTION OF STATE IN GR MECHANICS

M.M. Abdildin, N.A. Beiseen, K.A. Boshkaev, A.S. Taukenova

In present work it is shown that representation of velocity as a function of state in GR mechanics together with improved Fock’s first approximation metrics and Euler’s hydrodynamic formula allows solve a relativistic rotational equation of motion unambiguity problem in GR mechanics.