

Н. Бейсен , С. Тоқтарбай , М. Алимкулова ,Т. И. Ерназаров , Н. Шыңғысхан* 

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан

*e-mail: nurkamal8503@gmail.com

ГРАВИТАЦИЯ ЖӘНЕ ВАКУУМНЫҢ СЫЗЫҚТЫ ЕМЕС ЭЛЕКТРОДИНАМИКА ӘСЕРІНЕН МАГНЕТАРДЫҢ МАГНИТОСФЕРАСЫ АРҚЫЛЫ ӨТКЕН ЖАРЫҚ СӘУЛЕСІНІҢ АУЫТҚУЫН САНДЫҚ ТҮРДЕ ЗЕРТТЕУ

Бұл жұмыста электромагниттік сәуленің магнетардың магнетосферасы арқылы өту кезіндегі вакуумның сызықты емес электродинамикасы мен гравитацияның комбинацияланған әсерін сандық түрде зерттеу әдістеріне шолу жасалады. Вакуумның сызықты емес электродинамикасының Борн-Инфельд моделі шеңберінде Пенроуз-Ньюман формализмі бойынша анықталған эффективті метрикадан шығатын эффективті геодезиялық теңдеулер жүйесінің сандық түрде алынған шешімдері қарастырылады. Жерге ең жақын орналасқан магнетар мен оған жақын аймақтан өткен гамма сәуле жарқылының параметрлері бастапқы шарттар ретінде қолданылып, эффективті геодезиялық теңдеулер жүйесінің Рунге-Кутта әдісі арқылы шешілген сандық түрдегі шешімдері қарастырылады. Зерттеу нәтижесінде, магнетардың айналасында электромагниттік сәуленің майысуы, оның бұрыштық үлестірілімі, фронттың деформациясы және энергия тығыздығының таралуындағы анизотропия нәтижелері салыстырылады. Нәтижесінде магнетар бетіне жақын аумақтарда сәуленің бұрылу бұрышы 86° -тан жоғары бұрышқа бұрылады. Электромагниттік сәуле фронтының пішіні эллипс пішінге ауысып, ықшам нысандар жанында оның таралуының анизотропиясы байқалады. Сонымен бірге электромагниттік сәуленің магнетардың комбинациялық өрісінен өту кезінде оның энергия тығыздығы 1,83 есе артатындығы есептелген. Бұл нәтижелер күшті комбинациялық өріс жағдайында электромагниттік сәуленің компакт нысандар арқылы таралу заңдылықтарын сипаттап, болашақ астрофизикалық бақылаулар мен теориялық модельдеулерге маңызды үлес қосады.

Түйін сөздер: ықшам объект, электромагниттік сәуле, магнетар, вакуумның сызықты емес электродинамикасы, гравитация.

N. Beissen, S. Toktarbay, M. Alimkulova, T. Yernazarov, N. Shynggyskhan*

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

*e-mail: nurkamal8503@gmail.com

Numerical study of the deflection of a light beam passing through the magnetosphere of a magnetar under the influence of gravity and nonlinear electrodynamics of vacuum

This study presents a review of numerical methods for investigating the combined effects of nonlinear vacuum electrodynamics and gravity on the propagation of electromagnetic radiation through a magnetar's magnetosphere. Within the framework of the Born–Infeld model of nonlinear electrodynamics, numerical solutions to the system of effective geodesic equations derived from the effective metric defined via the Penrose–Newman formalism are analyzed. The initial conditions are based on the parameters of a gamma-ray burst that passed near the closest magnetar to Earth. The system is solved numerically using the Runge–Kutta method. The study examines the bending of electromagnetic rays near the magnetar, their angular distribution, front deformation, and anisotropy in the energy density distribution. It is found that the radiation deflects by more than 86° near the magnetar's surface. The wavefront shape transforms into an ellipse, and anisotropic propagation is observed near the compact object. Additionally, the energy density of the radiation increases by a factor of 1.83 as it passes through the combined field of the magnetar. These results characterize the behavior of electromagnetic radiation in strong combined fields near compact objects and provide important insights for future astrophysical observations and theoretical modeling.

Keywords: compact object, electromagnetic radiation, magnetar, nonlinear vacuum electrodynamics, gravity.

Н. Бейсен, С. Тоқтарбай, М. Алимкулова, Т.И. Ерназаров, Н. Шыңғысхан*

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан

*e-mail: nurkamal8503@gmail.com

Численное исследование отклонения светового луча, прошедшего через магнитосферу магнетара, под воздействием гравитации и нелинейной электродинамики вакуума

В данной работе представлен обзор численных методов исследования комбинированного влияния нелинейной электродинамики вакуума и гравитации на распространение электромагнитного излучения через магнитосферу магнетара. В рамках модели Борна–Инфельда нелинейной электродинамики вакуума рассматриваются численные решения системы эффективных геодезических уравнений, выведенных из эффективной метрики, определяемой в формализме Пенроуза–Ньюмана. В качестве начальных условий используются параметры гамма-всплеска, прошедшего через область, прилегающую к ближайшему к Земле магнетару. Система уравнений решается численно методом Рунге–Кутты. В результате исследования анализируются искривление электромагнитного луча в окрестности магнетара, его угловое распределение, деформация фронта и анизотропия распределения плотности энергии. Установлено, что вблизи поверхности магнетара луч отклоняется на угол более 86° . Форма фронта электромагнитного излучения трансформируется в эллиптическую, а вблизи компактного объекта наблюдается анизотропия его распространения. Кроме того, установлено, что при прохождении через комбинированное поле магнетара энергетическая плотность излучения увеличивается в 1,83 раза. Полученные результаты описывают особенности распространения электромагнитного излучения вблизи компактных объектов в условиях сильного комбинированного поля и вносят важный вклад в развитие астрофизических наблюдений и теоретического моделирования.

Ключевые слова: компактный объект, электромагнитное излучение, магнетар, нелинейная электродинамика вакуума, гравитация.

Кіріспе

Гравитациялық өрісте электромагниттік сәуленің (ЭМ) таралуы Жалпы салыстырмалылық теориясында жарықтың қисық траекториялар бойымен таралуын сипаттайтын маңызды құбылыс. Бұл алғаш рет Эйнштейннің гравитациялық линзалану теориясында қарастырылып, кейіннен бақылаулармен расталды. Алайда, аса күшті магнит өрісіне ие компакт объектілердің, әсіресе магнетарлардың айналасында, вакуумның сызықты емес электродинамикасы (СЭД) сәуленің таралуына қосымша әсер беруі мүмкін. СЭД әсерлері кванттық теорияның шеңберінде вакуумдағы жарықтың қос сыну көрсеткіші мен оның дисперсиялық қасиеттерінің өзгеруі сияқты құбылыстарда болатындығын көрсетеді. Осылайша, сәуленің гравитациясы мен СЭД әсерлерінің комбинацияланған әсері туралы зерттеулер аса күшті магнит өрісі бар астрофизикалық нысандағы айналасындағы кеңістіктік-уақыттық құрылым туралы тереңірек түсінік береді.

Сызықты емес электродинамикада классикалық Борн-Инфельд теориясы Максвелл электродинамикасындағы нүктелік зарядтың шексіз өзіндік энергиясын шешу үшін енгізілген

қарапайым теория болып саналады [1, 2]. Бұл вакуумның бос кеңістік екендігіне жауап беретін классикалық теория болып табылады. Алайда, күшті магниттік және электр өрісінің мәндерінде вакуумның поляризациясы туындап, вакуум бос кеңістік емес, ол үнемі пайда болып жоғалып отыратын бөлшектердің ортасына айналады. Мұндай күшті өріс режимінде вакуумның кванттық электромагниттік поляризациясынан туындайтын сызықты емес электродинамикалық (СЭД) әсерлерін Эйлер-Гейзенберг теориясымен түсіндіруге болады [3, 4].

Вакуумның СЭМ-сы Жер жағдайында зерттеу әлі де өз жалғасын табуда [6-8]. Алайда, осы уақытқа дейін Жер жағдайында осыншама аса күшті электромагниттік (ЭМ) өрістің әсерлерін зерттеулер мүмкіндігі аз болғандықтан, өз нәтижелерін бермей отыр. Дегенмен, зарядталған қарақұрдымдар мен магнетарлар сияқты астрофизикалық ықшам объектілердегі вакуумның СЭМ әсерлерін зерттеу, оның заңдылықтарын растауға мүмкіндік беретін бірден-бір тәжірибелік алаң болып саналады. СЭМ-ның заңдылықтарының болжамдарына сәйкес қазіргі таңда бірнеше теориялық модельдері ұсынылуда [9-12]. Сондықтан да, астрофизикалық ықшам

объектілердегі вакуумның СЭМ-ның әсерін зерттеуге қызығушылықтар артуда.

ЭМ сәуле гравитациялық өрісте қозғалғанда, оның траекториясы классикалық геодезиялық теңдеулер жүйесімен сипатталады, яғни жарық сәулелері қисық кеңістіктік-уақытта нөлдік геодезиялық сызықтардың бойымен таралады. Алайда, кванттық электродинамикадағы (КЭД) вакуумның поляризациясы және жарықтың қос сынуының әсерлері ескерілгенде, сәуле эффективті геодезиялық теңдеулер жүйесіне бағынады. Осы эффективті геодезиялық теңдеулер жүйесін алу мен оны шешу арқылы гравитация мен ЭМ-тік өріс әсерлерін зерттеу үшін алғаш Пенроуз-Ньюман формализмі ұсынылған [13]. Бұл формализм вакуумның гравитация мен СЭД эффекттерін ескеру арқылы ЭМ толқындардың таралу ерекшеліктерін талдауға мүмкіндік береді.

Әдетте, СЭД әсеріндегі вакуум арқылы өтетін жарықтың жылдамдығы тұрақты болмай, керісінше, өріс кернеулігіне байланысты өзгереді. Ал, бұл аса күшті ЭМ өрістің әсерінен вакуумның поляризацияланатындығының салдарын көрсетеді. Классикалық Борн-Инфельд теориясына сәйкес вакуумның СЭМ әсерлері елеулі бола бастайтын электр өрісінің шамасы шамамен 10^{21} В/м [5], ал магниттік индукцияның шамасы шамамен 10^{16} Гс болады. Бұл кванттық электродинамикада өріс күшінің $B_c = \frac{m_e^2 c^3}{e\hbar} \approx 4.4 \times 10^{13}$ Гс мәніне сәйкес келеді [4].

Қазіргі таңда ЭМ сәуленің таралуына вакуумның гравитация мен СЭД-сының әсерлерін зерттеулер өте қарқынды жүруде. Аса күшті ЭМ өрістің әсеріне байланысты Эйлер-Гейзенберг теориясы шеңберінде эффективті геодезиялық теңдеулер жүйесінің бірнеше аналитикалық шешімдері алынып, ЭМ сәуленің бұрылу бұрыштарына баға берілген [14-19]. Басқа зерттеулерде Пенроуз-Ньюман формализмін қолдану арқылы зарядталған кара құрдымның айналысындағы комбинацияланған гравитациялық және ЭМ өрістердегі жарықтың және бөлшектің геодезиялық сызықтары СЭМ-ның бірнеше модельдерінің шеңберінде зерттелген [20,21]. Сонымен бірге, магнетарлардағы дипольді магниттік өрістің оптикалық геометрия әдісі арқылы да бұл мәселе қарастырылған [22,23]. Тағы бір зерттеуде аналитикалық шешімдермен бірге экваториалды

жазықтықтағы шекаралық шарттарға сәйкес комбинацияланған гравитациялық және дипольді магнит өрісіндегі ЭМ сәуле үшін эффективті геодезиялық теңдеулер жүйесінің Борн-Инфельд моделінің аумағындағы сандық шешімдері алынып, ауытқу бұрыштарына баға берілген [22]. Алайда, Борн-Инфельд теориясы аясындағы бұл эффективті геодезиялық теңдеулер жүйесінің аналитикалық шешімдері экваториалды жазықтықтан тыс жазықтықтағы ЭМ сәуленің комбинацияланған гравитациялық және дипольді магниттік өрістердің әсерінен ауытқу бұрыштарына, магнетарға келе жатқан сәуле фронтының пішіні нысанға жақын аумақта эллипсоид болатындығын және магнетардан шығатын ЭМ сәуленің энергиялық тығыздығының үлестірілімін алуға мүмкіндік бермеиді [23-28]. Сондықтан, біз бұл жұмыста осы соңғы зерттеу жұмысы бойынша Борн-Инфельд теориясы аясындағы комбинацияланған гравитациялық және дипольді магниттік өрістердің әсеріндегі жарықтың эффективті геодезиялық теңдеулер жүйесінің сандық шешімдеріне шолу жасаймыз.

Бұл жұмыстың 1-бөлімінде эффективті геодезиялық теңдеулер жүйесін алу; 2-бөлімде осы теңдеулер жүйесін сандық түрде шешу үшін шекаралық шарттар; 3-бөлімде сандық шешімдердің нәтижелері; 4-бөлімінде жұмыстың қорытындысы қорытындыланып, болашағы мен маңыздылығы талқыланады.

Тәсілдер

Дипольді магнит өрісі және эффективті метрика

Алдыңғы жұмыстарда аналитикалық шешімдердің әдістері сияқты [19], алдымен, біз ЭМ өрістің құрылымын анықтап аламыз. Бұл жұмыста біз Вакуумның сызықты емес электродинамикасының эффекттерін Борн-Инфельд теориясының аумағында қарастырамыз. Өйткені кванттық электродинамикадан шығатын Эйлер-Гейзенберг теориясында вакуумның СЭЭ эффекттерін зерттеу үшін басқа да қосымша эффекттерді есепке алу зерттеуді күрделендіреді. Сондықтан, бұл БИ теориясы вакуумның СЭЭ эффекттерін зерттеуді оңтайластырады. Борн-Инфельд СЭЭ лагранжианын келесі түрде жазып аламыз:

$$L_{BI} = -\frac{1}{4\pi a^2} \left[\sqrt{1 + a^2(\vec{B}^2 - \vec{E}^2)} - a^4(\vec{B}^2 \vec{E}^2) - 1 \right], \quad (1)$$

мұндағы a – магниттік өріс индукциясының шамасына кері пропорционал болатын тұрақты.

Дипольді магнит өрісінің компоненттерін келесі теңдеу арқылы анықтап алуға болады:

$$B(r) = \frac{3(m \cdot r)r - r^2 m}{r^5} \quad (1a)$$

ЭМ сәуле фронты Oz осінің бойымен бағытталады деп ескерсек, магнит өрісінің кернеулігінің бағытын біз Ox осінің бойымен бағытталады. Онда магнит өрісінің кернеулігінің компоненттері келесі түрде анықталады:

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{m_x(2x^2 - y^2 - z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}, \\ B_y &= \frac{3m_x xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}, \\ B_z &= \frac{3m_x xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}. \end{aligned} \quad (2)$$

мұндағы m – магнит өрісінің дипольді моменті, және оның компоненттері $m(m_x, 0, 0)$. Осы компоненттерін анықтап алған соң біз нейтронды жұлдыздың метрикасын анықтап аламыз. Ол үшін

объекті сфералық симметриялы және айналмайды деп есептеп, оған сәйкес келетін Шваршилльді метрикасының жуықталған түрін декарттық координатада қолданамыз:

$$g_{00} = 1 - \frac{\alpha}{r}; \quad g_{11} = -\left(1 + \frac{\alpha}{r}\right),$$

$$g_{22} = -\left(1 + \frac{\alpha}{r}\right); \quad g_{33} = -\left(1 + \frac{\alpha}{r}\right). \quad (3)$$

Пенроуз-Ньюман формализмі бойынша гравитациялық эффектерден тыс қосымша әсерлерді анықтау үшін метрикаға қосымша мүшені қосып алып қарастыруға болады. Яғни:

$$G_{\nu\mu}^{\text{eff}(1,2)} = g_{\nu\mu} - 4\eta_{(1,2)}\xi F_{\nu\beta}g^{\beta\sigma}F_{\sigma\mu}. \quad (4)$$

мұндағы $\eta_{(1,2)}$ – постмаксвелді параметр (мұнда $\eta_1 = \eta_2$), $\xi = 1/B_{\text{ст}}$, $F_{\nu\beta}$ – ЭМ тензоры. Алынған осы өрнек эффективті метрика деп аталады. Мұнда объектінің гравитациялық өрісіне қосымша құйрықша тағы бір өрістің шамасы қосылады.

Өрі қарай, осы эффективті метриканың ішіндегі ЭМ тензордың шамасын анықтап алуға болады. Біздің жағдайда оның шамасы, жоғарыда аталғандай, магнит өрісінің шамасына қарай анықтаймыз:

$$F_{\mu\nu} = g_{\mu\lambda}F^{\lambda\rho}g_{\rho\nu} = F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 & -B_2 \\ 0 & -B_3 & 0 & B_1 \\ 0 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Осы ЭМ өрістің компоненттерін қолданып, эффективті метриканың оң жағындағы тензорлық амалдарды есептеп аламыз. Соңында, сызықты

комбинация арқылы эффективті метриканың компоненттерін есептеуге болады:

$$\begin{aligned} G_{00}^{\text{eff}} &= \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - \alpha}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \\ G_{11}^{\text{eff}} &= -\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{13}{2}}} \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + \alpha \right) (60x^4y^6z^2 + \\ &+ 15x^4y^8 + 60x^6y^4z^2 + 90x^4y^4z^4 + 60x^6y^2z^4 + 60x^4y^2z^6 + \\ &+ 30x^2y^8z^2 + 60x^2y^6z^4 + 60x^2y^4z^6 + 30x^2y^2z^8 + \\ &+ 36\alpha^2\eta m^2x^2\xi y^2 + 36\alpha^2\eta m^2x^2\xi z^2 + 72\eta m^2x^2\xi y^2z^2 + \\ &+ 36\eta m^2x^4\xi y^2 + 36\eta m^2x^4\xi z^2 + 36\eta m^2x^2\xi y^4 + \\ &+ 36\eta m^2x^2\xi z^4 + 72\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\alpha\eta m^2x^2\xi y^2 + \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
 & +72\sqrt{x^2+y^2+z^2}\alpha\eta m^2 x^2 \xi z^2 + x^{12} + y^{12} + z^{12} + \\
 & +6x^{10}y^2 + 30x^8y^2z^2 + 6x^{10}z^2 + 15x^8y^4 + 15x^8z^4 + \\
 & +20x^6y^6 + 20x^6z^6 + 15x^4z^8 + 6x^2y^{10} + 6x^2z^{10} + \\
 & +6y^{10}z^2 + 15y^8z^4 + 20y^6z^6 + 15y^4z^8 + 6y^2z^{10}),
 \end{aligned}$$

$$G_{12}^{eff} = \frac{36\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2} + \alpha\right)^3 m^2 x^2 y^2 \eta \xi}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{13}{2}}},$$

$$G_{13}^{eff} = \frac{36\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2} + \alpha\right)^3 m^2 x^2 z y \eta \xi}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{13}{2}}},$$

$$G_{21}^{eff} = \frac{36\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2} + \alpha\right)^3 m^2 x^2 y^2 \eta \xi}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{13}{2}}},$$

$$\begin{aligned}
 G_{22}^{eff} = & -\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{13}{2}}} \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2} + \alpha\right) \times \\
 & \times (60x^4y^6z^2 + 30x^8y^2z^2 + 60x^6y^4z^2 + 90x^4y^4z^4 + \\
 & +60x^6y^2z^4 + 60x^4y^2z^6 + 30x^2y^8z^2 + 60x^2y^6z^4 + \\
 & +60x^2y^4z^6 + 30x^2y^2z^8 + 36\alpha^2\eta m^2 x^2 \xi y^2 + \\
 & +36\alpha^2\eta m^2 x^2 \xi z^2 + 72\eta m^2 x^2 \xi y^2 z^2 + 36\eta m^2 x^4 \xi y^2 + \\
 & +36\eta m^2 x^4 \xi z^2 + 36\eta m^2 x^2 \xi y^4 + 36\eta m^2 x^2 \xi z^4 + \\
 & +72\sqrt{x^2+y^2+z^2}\alpha\eta m^2 x^2 \xi y^2 + x^{12} + y^{12} + z^{12} + \\
 & +6x^{10}y^2 + 6x^{10}z^2 + 72\sqrt{x^2+y^2+z^2}\alpha\eta m^2 x^2 \xi z^2 + \\
 & +15x^8y^4 + 15x^8z^4 + 20x^6y^6 + 20x^6z^6 + 15x^4y^8 + \\
 & +15x^4z^8 + 6x^2y^{10} + 6x^2z^{10} + 6y^{10}z^2 + 15y^8z^4 + \\
 & +20y^6z^6 + 15y^4z^8 + 6y^2z^{10}),
 \end{aligned}$$

$$G_{23}^{eff} = \frac{36\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2} + \alpha\right)^3 m^2 x^2 z y \eta \xi}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{13}{2}}},$$

$$G_{31}^{eff} = \frac{36\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2} + \alpha\right)^3 m^2 x^2 z y \eta \xi}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{13}{2}}},$$

$$G_{32}^{eff} = \frac{36\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2} + \alpha\right)^3 m^2 x^2 z y \eta \xi}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{13}{2}}},$$

$$G_{33}^{eff} = \frac{36(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + \alpha)^3 m^2 x^2 z y \eta \xi}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{13}{2}}}.$$

Енді осы эффективті метрика арқылы Кристоффел символдарын есептеп аламыз. Ол үшін алдымен эффективті метрику кері метрикасын анықтап алу қажет. Соңынан Кристоффел символдарының нольден өзге шамаларын анықтаймыз.

Бұл жұмыс біз параметрі z пен алынған эффективті геодезиялық теңдеулер жүйесін қолданамыз. Бұл жүйе үш теңдеуді қамтиды:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 ct}{dz^2} &= -\left\{ \Gamma_{mp}^0 - \frac{dct}{dz} \Gamma_{mp}^3 \right\} \frac{dx^p}{dz} \frac{dx^m}{dz}, \\ \frac{d^2 x}{dz^2} &= -\left\{ \Gamma_{mp}^1 - \frac{dx}{dz} \Gamma_{mp}^3 \right\} \frac{dx^p}{dz} \frac{dx^m}{dz}, \\ \frac{d^2 y}{dz^2} &= -\left\{ \Gamma_{mp}^2 - \frac{dy}{dz} \Gamma_{mp}^3 \right\} \frac{dx^p}{dz} \frac{dx^m}{dz}, \end{aligned} \quad (7)$$

Анықталған Кристоффел символдарын анықталған эффективті геодезиялық теңдеулер жүйесін анықтап жазуға қолданамыз. ЭМ фронт бағыты Oz осі бойымен бағытталғандықтан, теңдеудің параметрі ретінде z алынған. Сондықтан бұл жүйе үш теңдеуді қамтиды. Осы теңдеулер жүйесін ашып жазып, оны сандық түрде шешуге бағыттаймыз. Бұрылу бұрышының шамасын келесі өрнек арқылы анықталады:

$$\alpha = \frac{180 \cdot \arcsin\left(\frac{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}{c}\right)}{\pi}. \quad (8)$$

Осы теңдеулерді сандық түрде шешу үшін бастапқы шарттар дұрыс қойылуы тиіс.

Эффективті геодезиялық теңдеулер жүйесі және оның сандық шешімдері

Алынған күрделі дифференциалды теңдеулер жүйесін сандық түрде шешу үшін бастапқы шарттар берілуі тиіс. Біріншіден, магнетар координата басында деп ескеріледі, яғни, $txyz(0,0,0,0)$. Магнетардың параметрлері ретінде Жерге ең жақын орналасқан Swift J1822.3-1606 магнетардың параметрі алынады ($m=1.4M_s$, $R=10$ km). Сонымен бірге, ЭМ сәуле фронты 100×100 км болатын тор арқылы магнетардың магнетосферасына кіреді. Мұнда бізде қадам саны әр 1000 км болып отыр. Осы тордың

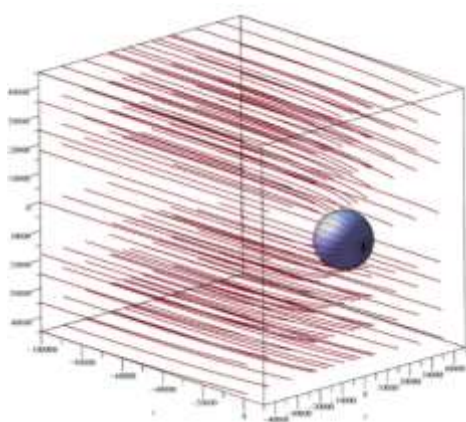
сәйкесінше нүктелері импакт параметрдің мәндеріне сәйкес келеді. Екіншіден, жоғарыда ескертілгендей, вакуумда қос сыну құбылысы ескерілмейтін, Борн-Инфельд моделі бойынша пост-максвеллдік параметрлердің шамасы өзара тең деп ескеріледі, яғни $\eta_1 = \eta_2$. Дегенменде, есептеулерді жан-жақты тексеру және нәтижелердің дұрыстығын бекіту үшін осы пост-максвеллдік параметрлердің үш түрлі сандық мәндерін алып, әрқайсысы үшін жеке нәтижелерге қол жеткіземіз және өзара салыстырамыз. Яғни, бұл жұмыста пост-максвеллдік параметрлердің келесі үш түрлі сандық мәндері алынады $\eta_1 = \eta_2 = 5.1 \cdot 10^{-5}, 7 \cdot 10^{-5}, 9 \cdot 10^{-5}$. Ал, магнетардың бетіндегі біртекті магнит өрісінің шамасы Швингер өрісінің шамасына жуық шамадағы сандық мәнімен есептелінеді, яғни $B_s = 10^{13}$ Гс. қалған бастапқы шарттар келесі түрде енгізіледі:

$$\begin{aligned} z_0 &= -10^6 \text{ m}, \\ x(z_0) &= -2 \cdot 10^4 \text{ m}, (D(x))(z_0) = 0, \\ t(z_0) &= 0, (D(t))(z_0) = \frac{1}{c} = \frac{1}{2.99792458 \cdot 10^8}, \\ y(z_0) &= 0, (D(y))(z_0) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

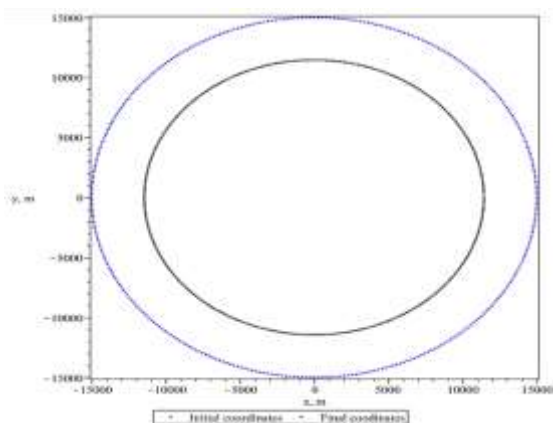
Осы бастапқы шарттар арқылы эффективті геодезиялық теңдеулер жүйесін Рунге-Кутта әдісі арқылы сандық түрдегі шешімдерін алуға болады есептеулерді жеңілдету және нәтижелердің дұрыс шығуына жағдай жасау мақсатында тұрақты шамалардың сандық мәндері осылай алынды.

Жоғарыдағы бастапқы шарттарды қолданып, эффективті теңдеулер жүйесін сандық түрде шешу үшін Maple 16 есептеу платформасының LinearAlgebra пакетін қолданамыз. Сонымен бірге, есептеулердің жеңілдету және программа тіліне көп жүктеме жасамау мақсатында дифференциалдық теңдеулер жүйесін шешуге арналған Рунге-Кутта әдісін қолдандық. Осы әдіс арқылы есептелген теңдеулердің сандық шешімдердің мәндерін бір массивке жинақтап аламыз. Алынған массивтегі сандық шешімдерден, алдымен, ЭМ сәуленің эффективті геодезиялық сызықтарын көрсетуге болады (1-сурет). Мұнда магнетардың бетіндегі магнит өрісінің $B_s = 10^{13}$ Гс шамасында және $\eta = 5.1 \cdot 10^{-5}$ постмаксвеллдік параметрінің мәніндегі ЭМ сәуленің магнетардан 100 км арақашықтықтан оның ортасын дейінгі аралықтағы гравитациялық

және магнит өрісінің комбинацияланған әсерінен сызған траекторияларын көрсетеді. Магнетардың бетіне жақын аумақтарда геодезиялық сызықтарды қарқынды майысуы байқалады. Магнетарға жақын аумақтардағы фотондардың бастапқы және соңғы координаттарын салыстыру арқылы ЭМ сәуле фронтының оның гравитациялық өрісі арқылы линзаланумен бірге күшті магнит өрісінің қосымша майыстыру салдарын келесі график арқылы көруге болады (2-сурет). Мұнда магнетарға 15 км қашықтықтан ЭМ сәуленің орны бастапқы және соңғы координаттары арқылы комбинацияланған гравитация мен магнит өрістерінің асимметриялы пішінінің өзгерісін байқауға болады.



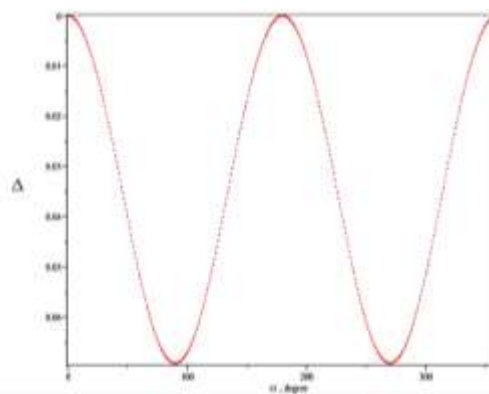
1-сурет – $B_s = 10^{13}$ Гс беттік магнит өрісінің және $\eta = 5.1 \cdot 10^{-5}$ постмаксвелдық параметрінің мәніндегі эффективті геодезиялық сызықтары.



2-сурет – $B_s = 10^{13}$ Гс беттік магнит өрісінің және импакт параметрдің $15 \cdot 10^3$ м, $\eta = 5.1 \cdot 10^{-5}$ постмаксвелдік параметрінің мәндеріндегі ЭМ фронттың пішінінің шеңберден эллипсоидқа ауысу графигі.

Сандық шешімдерді қолданып, (8) тендеудің көмегімен бұрылу бұрыштарын есептеледі.

Анықталған бұрыштарды да арнайы массивке біріктіруге болады. Өйткені, мұнда 100×100 км тор арқылы әрбір 10 км қадаммен барлық жазықтықтағы бұрылу бұрыштары қамтылады. Алдыңғы жұмыстарда аналитикалық есептеулерде экваториалды беттегі бұрыштарға ғана баға берілген болатын [22]. Біздің жағдайымызда постмаксвелдік параметрлердің үш түрлі мәндеріне сәйкес үш түрлі бұрылу бұрыштарының нәтижелеріне қол жеткізілді. Бұрылу бұрыштарының шамасы магнетарға жақын аумақтарда ұлғайып, өте жақын келгенде, тіпті, өте қарқынды түрде 90 градустан асып кететіндігі анықталды [23,28]. Яғни, 3-суретте магнетарға 15 км қашықтықтан бұрылу бұрышы жуықтап алғанда 86 градус болатындығын көруге болады. Ал, керісінше, магнетардан алыстаған сайын бұрылу бұрыштарының шамасы аз екендігін көруге болады, яғни 100 км қашықтықтағы бұрылу бұрышының мәні шамамен 3.86 градусты қамтиды. Сонымен бірге, постмаксвелдік параметрдің шамасы өскен сайын бұрыштардың мәндері баяу артатындығын көруге болады. Бұрылу бұрыштарына қарап ЭМ сәуле фронтының қаншалықты өзгеретіндігін де анықтауға мүмкіндік береді.



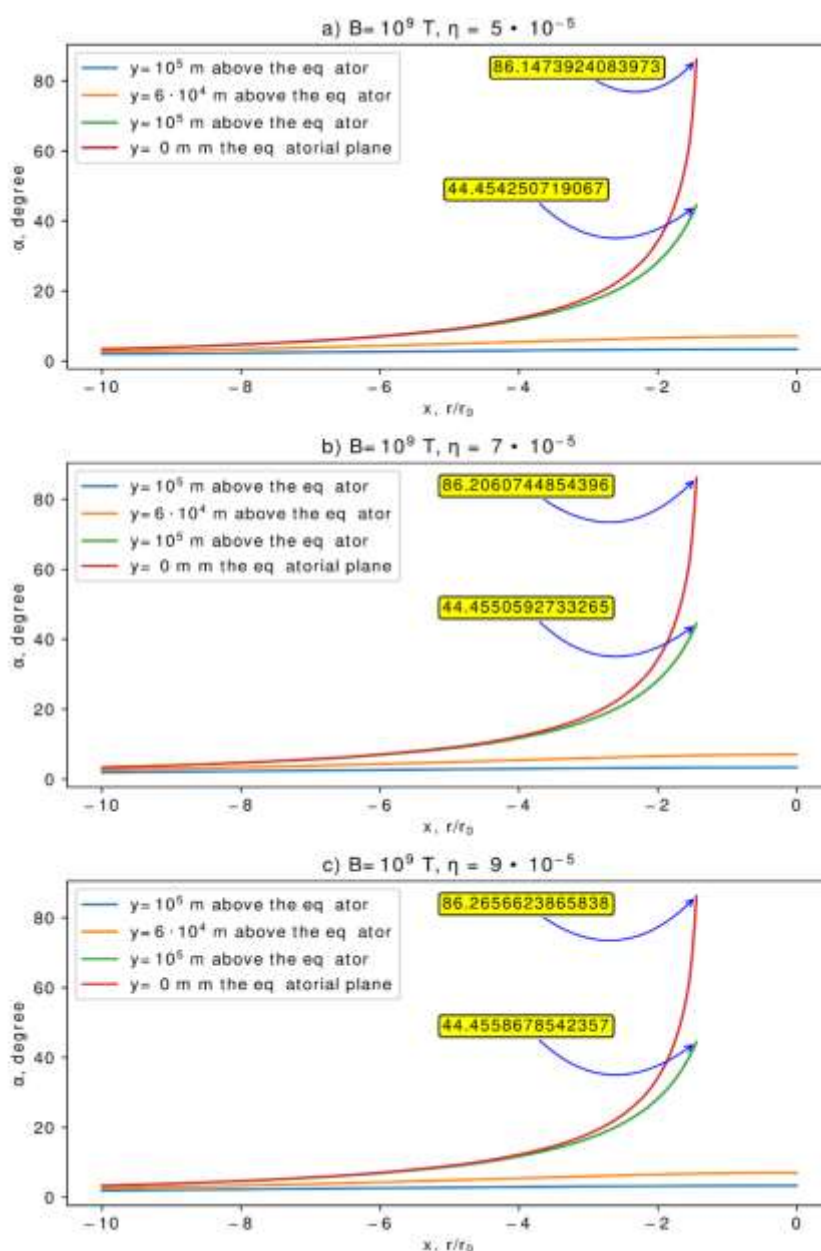
3-сурет – $\eta = 5.1 \cdot 10^{-5}$ және $B_s = 10^{13}$ Гс беттік магнит өрісі жағдайында $z = -45 \cdot 10^3$ м кезінде ауытқу бұрыштарына қатысты ЭМ толқын фронтының деформациясы.

Эффективті геодезиялық тендеулер жүйесін сандық түрде шешу арқылы импакт параметрлердің әртүрлі мәндеріне байланысты сәуленің бұрылу бұрыштарының мәндері алынады. Осы бұрыштардың мәндері арқылы олардың соңғы координаталарына қатысты графигін салынды. Мұнда постмаксвелдік параметрдің үштүрлі мәндеріне сәйкес ($\eta_1 = 5.1 \cdot 10^{-5}$, $\eta_2 = 7 \cdot 10^{-5}$, және $\eta_3 = 9 \cdot 10^{-5}$), үш түрлі график алынады.

Магнетардың магнитосферасына кірген электромагниттік (ЭМ) сәуленің фронты комбинацияланған өрістің әсерінен пішінін

қаншалықты өзгертетінін зерттеуге болады. Алдымен бұрылу бұрыштарын анықтап алып, олардың сандық мәндерінің бастапқы және соңғы координаталар айырмасына (Δ) тәуелділігін

зерттейміз және осы тәуелділіктің графигін тұрғызамыз (4-сурет). Бұрылу бұрышының үлкен мәндерінде Δ -ның шамасы 0.07-ге тең болады.



4-сурет – Гравитациялық және дипольдік магнит өрісіндегі фотонның ауытқу бұрыштарының Ox координатасына сәйкес үлестірілімі.

Мұнда $B_s = 10^{13} \text{ Гс}$, $\eta_1 = 5.1 \cdot 10^{-5}$, $\eta_2 = 7 \cdot 10^{-5}$, және $\eta_3 = 9 \cdot 10^{-5}$

Бұл нәтиже гравитациялық линзалану әсерімен салыстырғанда сәуле фронтының эллипстік пішінге ауысатынын көрсетеді. Осы жұмыста толқындық фронттың пішінінің деформациясын талдау әдісі қолданылды. Бұл әдіс арқылы электромагниттік сәулелер магнитардың магнитосферасынан өткенде, олардың фронтының бастапқы айналық симметриясы эллипстік конфигурацияға өзгертіндігі анықталды. Сандық

шешімдер негізінде біз геометриялық оптика әдістерін пайдаланып, гравитациялық және дипольдік-магниттік өрістердің әсерінен ЭМ сәуле фронтының деформациясын есептедік. Бұл есептеулер бастапқы және соңғы координаталарға сүйене отырып, фронттың пішіндік өзгерістерін сандық түрде бағалауға мүмкіндік берді. Фронттың деформациясын келесі өрнек арқылы анықтауға болады:

$$\Delta = \frac{r_{\max} - r_{\min}}{r_{\max}}. \quad (10)$$

мұндағы $r_{\max}$, $r_{\min}$ – сәйкесінше шыққан электромагниттік сәулелер эллипсінің үлкен және кіші жарты осьтері. Мұнда бұрылу бұрышының үлкен мәнінде Δ -шамасы 0.07-ге тең, ал бұл гравитациялық линзалану мәніне салыстырғанда эллипсті пішінге сәйкестігін көрсетеді.

Бұрылу бұрыштарының үлестірілімі мен жарықтың таралу жылдамдығының анизотропиясы энергия тығыздығының үлестірілімін анықтауға мүмкіндік береді. Ол үшін магнитардың магнетосферасынан 30 км қашықтықтан кіретін және шығатын жарық фотондарының аудандарының аудандарының қатынастары анықталады және сол ауданға сәйкес келетін фотондар санының үлестірілімі табылады [24]. Келесі 4-суретте осы үлестірілімнің графигі тұрғызылған. Мұнда магнитарға жақын аумақтарда жарықтың энергия тығыздығы күрт артып, нысаннан алыс қашықтыққа қарай қарқынды азайтындығын көруге болады. Сонымен бірге, осы үлестірілім негізінде магнит өрісінің критикалық мәнінде ($B = 10^{13}$ Гс) және пост-максвеллді параметрдің $\eta = 5.1 \cdot 10^{-5}$ шамасында магнетарға жақын аумақтардан енген жарық фронтының энергия тығыздығы 1.83 есе артатындығы анықталды.

Қорытынды

Бұл жұмыста біз магнитардың комбинацияланған гравитациялық және күшті дипольді магнит өрісі арқылы өтуші ЭМ сәуле үшін эффективті геодезиялық теңдеулер жүйесінің сандық шешімдеріне шолу жасадық. Сандық шешімдерді онтайландыру мақсатында мұнда вакуумның сызықты емес электродинамикасының қарапайым моделі ретінде Борн-Инфельд теориясы қарастырылған. Барлық алынған нәтижелер алдыңғы жұмыстардағы алынған аналитикалық шешімдермен салыстырылған.

Магнитардың дипольді магнетосферасы ЭМ сәулені оған жақын аумақтарда көбірек майыстырады. Гравитациялық өрісте, Шварцшильд метрикасы бойынша, нысанға 30 км жақын аумақта экваториалды жазықтықта сыну бұрышының шамасы 55 градусты қамтыса, комбинацияланған дипольді магнит өрісі оны 30 пайызға артық бұрышқа бұрады. Бұл дипольді магнит өрісінің құрылымы мен оның магнит моментінің сәуленің таралу бағытына перпендикуляр болуымен түсіндіріледі. Алайда, Эйлер-Гейзенберг моделі үшін магнитардан 100 км

қашықтықтан кіруші сәуленің бұрылу бұрышының СЕЭ-ның үлесі 30 пайызды қамтыған.

Магнит өрісі күшті болған сайын фронттың деформациясы арта түседі. Бастапқы жарық фронты магнетарға жақындаған сайын комбинацияланған гравитациялық және магнит өрістерінің әсерінен қарқынды түрде майысады. Осы жұмыста нысанға 30 км қашықтықтан кірген сәуле фронтының деформациясының шамасы 0.07-ге тең болды. Бұл комбинацияланған дипольді өрістің жарықтың таралуының анизотропиясымен түсіндіріледі, яғни магнетарға жақын аумақтарда жарықтың таралуының фазалық жылдамдықтары анағұрлым өзгереді. Осы жұмыстағы алынған нәтиже алдыңғы жұмыстарда қарастырылмаған.

Алдыңғы жұмыстарда қарастырылмаған соңғы нәтиже, осы жарық жылдамдығының анизотропиясының салдарынан туындайтын энергия тығыздығының өзгерісіне баға беріледі. Ықшам нысанға жақын аумақтарда энергия тығыздығы 1.86 есе артып, одан алыстаған сайын кеми түсетіндігі анықталды. Бұл ЭМ сәуленің магнитардың комбинациялық дипольді өрісі арқылы өткен соң шоғырлануымен түсіндіріледі. Яғни, сәулелердің бір жерге түйісуі энергияның қайта таралуына және жарықтың анизотропты үлестіріліміне алып келеді, бұл магнетар ортасындағы физикалық процестерге айтарлықтай әсер етуі мүмкін.

Бұл жұмыстағы зерттеу нәтижелері магнитарлардағы комбинацияланған гравитациялық және магниттік линзалану эффектілерін сандық түрде сипаттай отырып, экстремалды астрофизикалық жағдайларда жарықтың таралу ерекшеліктерін болжауға мүмкіндік береді. Алынған нәтижелер гамма сәулелерінің энергия тығыздығының үлестірілімін түсінуге және олардың бақылау деректерімен салыстыруға көмектеседі. Бұл жұмыс болашақта жоғары энергиялы астрофизика, нейтрондық жұлдыздар физикасы және кванттық электродинамика аясындағы туындайтын жаңа теориялық модельдерді дамыту үшін маңызды рөл атқарады. Сонымен қатар, алынған нәтижелер күшті магнит өрістері жағдайында электромагниттік сәулелердің таралу заңдылықтарын зерттейтін болашақ бақылауларды жоспарлауға көмектеседі.

Алғы сөз

Бұл зерттеу Қазақстан Республикасының Ғылым және жоғары білім министрлігінің (Грант № AP23490322) қаржыландыруымен жүзеге асырылды.

Әдебиеттер

- 1 Bone W.A., Lamont F.G. The influence of pressure upon the flame spectra of hydrogen and carbonic oxide // *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character.* – 1934. – Vol. 144, no. 852. – P.250–256.
- 2 Fradkin E. S., Tseytlin A. A. Non-linear electrodynamics from quantized strings // *Physics Letters B.* – 1985. – Vol. 163. – P. 123–130.
- 3 Gibbons G. W., Rasheed D. A. Electric–magnetic duality rotations in nonlinear electrodynamics // *Nuclear Physics B.* – 1995. – Vol. 454. – P. 185–206. arXiv:hep-th/9506035.
- 4 Stedman G. E. Ring lasers and rotation sensing // *Reports on Progress in Physics.* –1997. –Vol.60.–P.615–688.
- 5 Bialynicka-Birula Z., Bialynicki-Birula I. Nonlinear effects in quantum electrodynamics. Photon propagation and photon splitting in an external field // *Physical Review D.* – 1970. – Vol. 2. – P. 2341–2345.
- 6 Heisenberg W., Euler H. Consequences of Dirac’s theory of positrons // *Zeitschrift für Physik.* – 1936. – Vol. 98. – P. 714–732.
- 7 Cadene A., Fouché M., Rivère A., Battesti R., Coriani S., Rizzo A., Rizzo C. Circular and linear magnetic birefringences in xenon at $\lambda=1064$ nm // *The Journal of Chemical Physics.* – 2015. – Vol. 142, No. 12.
- 8 Udem T., Holzwarth R., Hänsch T. W. Optical frequency metrology // *Nature.* – 2002. – Vol.416.– P.233–237.
- 9 Della F., Valle E., Milotti E., Ejlli A., Messineo G., Piemontese L., Zavattini G., Gastaldi U., Pengo R., Ruoso G. First results from the new PVLAS apparatus: A new limit on vacuum magnetic birefringence // *Physical Review D.* – 2014. – Vol. 90, No. 9. – P. 092003.
- 10 Kaspi M., Beloborodov A. M. Magnetars // *Annual Review of Astronomy and Astrophysics.* – 2017. – Vol. 55. – P. 261–301. arXiv:1703.00068.
- 11 Pereira J. P., Coelho J. G., de Lima R. C. Modified gravity and neutron stars: TOV equations and Casimir energy // *European Physical Journal C.* – 2018. – Vol. 78. – P. 361. arXiv:1804.10182.
- 12 Esposito P., Rea N., Israel G. L. Magnetars: A short review and some sparse considerations in Timing Neutron Stars: Pulsations, Oscillations and Explosions // *Astrophysics and Space Science Library.* – 2021. – Vol. 461. – P. 97–142. arXiv:1803.05716.
- 13 Newman E., Penrose R. An approach to gravitational radiation by a method of spin coefficients // *Journal of Mathematical Physics.* – 1962. – Vol. 3, No. 3. – P. 566–578.
- 14 Denisov V. I., et al. Pulsar radiation in post-Maxwellian vacuum nonlinear electrodynamics // *Physical Review D.* – 2016. – Vol. 94, No. 4. – P. 045021.
- 15 Yernazarov T., Abishev M., Aimuratov Y. Numerical modeling of vacuum electrodynamics in strong fields // *The Sixteenth Marcel Grossmann Meeting.* – 2023. – P. 4401–4409.
- 16 Abishev M. E., Denisov V. I., Denisova I. P., Kechkin O. V. Evaluation of electromagnetic forward radiations during the propagation of gravitational waves through the dipole field of the magnetar // *Astroparticle Physics.* – 2018. – Vol. 103. – P. 94–97.
- 17 Abishev M., Aimuratov Y., Aldabergenov Y., Beissen N., Bakytzhan Z., Takibayeva M. Some astrophysical effects of nonlinear vacuum electrodynamics in the magnetosphere of a pulsar // *Astroparticle Physics.* – 2016. – Vol. 73. – P. 8–13.
- 18 Abishev M., Beissen N., Belissarova F., Boshkayev K., Mansurova A., Muratkhan A., and Toktarbay S. Approximate perfect fluid solutions with quadrupole moment // *International Journal of Modern Physics D.* – 2021. – Vol. 30, no. 13. – Art.No 2150096.
- 19 Abishev M., Toktarbay S., Beissen N., Belissarova F., Khassanov M., Kudussov A., Abylayeva A. On gravitational lensing by compact objects in nonlinear electrodynamics // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society.* – 2018. – Vol. 481. – P. 36–43.
- 20 Kruglov S.I. Black hole solution in the framework of arctan-electrodynamics // *International Journal of Modern Physics D.* – 2017. – Vol. 26, No. 08. – P. 1750075.
- 21 Habibina A. S., Ramadhan H. S. Geodesic of nonlinear electrodynamics and stable photon orbits // *Physical Review D.* – 2020. – Vol. 101, No. 12. – P. 124036.
- 22 Kim J. Y. Deflection of light by a compact object with electric charge and magnetic dipole in Einstein–Born–Infeld gravity // *The European Physical Journal C.* – 2024. – Vol. 84, No. 10. – P. 1–7.
- 23 Beissen N., Yernazarov T., Khassanov M., Toktarbay S., Taukenova A., Talkhat A. Bending of light by magnetars within generalized Born–Infeld electrodynamics: Insights from the Gauss–Bonnet theorem // *Symmetry.* – 2024. – Vol. 16, no. 1. – P.132.
- 24 Beissen N., Abishev M., Toktarbay S., et al Exploring nonlinear vacuum electrodynamics beyond Maxwell’s equations // *International Journal of Mathematics and Physics.* – 2023. – Vol. 14, no.1. – P. 61–70.
- 25 Beissen N.A., Utepova D.S., Kossov V.N., Toktarbay S., Khassanov M.K., Yernazarov T., Seydaliyeva M. // The influence of deformation in compact objects on redshift and radar echo delay // *Recent Contributions to Physics.* – 2024. – Vol. 88, no. 1. – P.4-11.
- 26 Beissen N., Abishev M., Toktarbay S., Yernazarov T., Khassanov M., Utepova D., and Abduali A. An overview of light ray deflection calculation by magnetars in nonlinear electrodynamics // *Bulletin of the Karaganda University:*

Physics Series. – 2024. – Vol. 11429, no. 2. – P.65–71.

27 Beissen N.A., Utepova D.S., Kossov V.N., Toktarbay S., Khassanov M.K., Yernazarov T., and Imanbayeva A.K, Comparing the efficiency of GPU and CPU in gravitational lensing simulation // International Journal of Mathematics and Physics. – 2024. – Vol.15, no. 1. – P.49–56.

References

- 1 W.A. Bone and F.G. Lamont, Proc. R. Soc. Lond. A 144, 852, 250–256 (1934).
- 2 E.S. Fradkin and A.A. Tseytlin, Phys. Lett. B 163, 123–130 (1985).
- 3 G.W. Gibbons and D.A. Rasheed, Nucl. Phys. B 454, 185–206 (1995).
- 4 G.E. Stedman, Rep. Prog. Phys. 60, 615–688 (1997).
- 5 Z. Bialynicka-Birula and I. Bialynicki-Birula, Phys. Rev. D 2, 2341–2345 (1970).
- 6 W. Heisenberg and H. Euler, Z. Phys. 98, 714–732 (1936).
- 7 A. Cadene, M. Fouché, et al, J. Chem. Phys. 142, 12 (2015).
- 8 T. Udem, R. Holzwarth, and T. W. Hänsch, Nature 416, 233–237 (2002).
- 9 F. Della Valle, E. Milotti, et al, Phys. Rev. D 90, 092003 (2014).
- 10 M. Kaspi and A. M. Beloborodov, Annu. Rev. Astron. Astrophys. 55, 261–301 (2017).
- 11 J.P. Pereira, J.G. Coelho, and R. C. de Lima, Eur. Phys. J. C 78, 361 (2018).
- 12 P. Esposito, N. Rea, and G. L. Israel, Astrophys. Space Sci. Libr. 461, 97–142 (2021).
- 13 E. Newman and R. Penrose, J. Math. Phys. 3, 566–578 (1962).
- 14 V.I. Denisov et al., Phys. Rev. D 94, 045021 (2016).
- 15 T. Yernazarov, et al, in Proc. of the Sixteenth Marcel Grossmann Meeting, 4401–4409 (2023).
- 16 M.E. Abishev, V.I. Denisov, I.P. Denisova, and O.V. Kechkin, Astropart. Phys. 103, 94–97 (2018).
- 17 M. Abishev, Y. Aimuratov, Y. et al, Astropart. Phys. 73, 8–13 (2016).
- 18 M. Abishev, N. Beissen, F. et al, Int. J. Mod. Phys. D 30, 2150096 (2021).
- 19 M. Abishev, S. Toktarbay, N. Beissen, F. Belissarova, M. Khassanov, A. Kudussov, and A. Abylayeva, Mon. Not. R. Astron. Soc. 481, 36–43 (2018).
- 20 S.I. Kruglov, Int. J. Mod. Phys. D 26, 1750075 (2017).
- 21 A.S. Habibina and H. S. Ramadhan, Phys. Rev. D 101, 124036 (2020).
- 22 J. Y. Kim, Eur. Phys. J. C 84, 1–7 (2024).
- 23 N. Beissen, T. Yernazarov, et al, Symmetry 16, 132 (2024).
- 24 N. Beissen, M. Abishev, S. et al, Int. J. Math. Phys. 14, 61–70 (2023).
- 25 N. A. Beissen, D. S. Utepova, et al, Rec. Contr. Phys. 1 (88), 4–11 (2024).
- 26 N. Beissen, M. Abishev, et al, Bull. Karaganda Univ. Phys. Ser. 11429, 65–71 (2024).
- 27 N.A. Beissen, D.S. Utepova, et al, Int. J of Math. and Phys. 15 (1), 19-56 (2024).

Article history:

Received 04 March 2025

Received in revised form 18 March 2025

Accepted 20 March 2025

Мақала тарихы:

Түсті – 04.03.2025

Түзетілген түрде түсті – 18.03.2025

Қабылданды – 20.04.2025

Information about authors:

1. **Nurzada Beissen** – Cand. of Phys. and Math. Sc., Prof., Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan, email: nurzada.beissen@kaznu.edu.kz.

2. **Saken Toktarbay** – PhD, Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan, email: Saken.Toktarbay@kaznu.edu.kz.

3. **Madina Alimkulova** – PhD student, Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan, email: m.alimkulova@mail.ru.

4. **Tursynbek Yernazarov** – PhD, Al-Farabi Kazakh National University, Almaty Kazakhstan, email: Tursynbek.Yernazarov@kaznu.edu.kz.

5. **Nurkamal Shynggyskhan** (corresponding author) – PhD student, Al-Farabi Kazakh National University, Almaty Kazakhstan, email: nurkamal8503@gmail.com

Авторлар туралы мәлімет:

1. **Нұрзада Бейсен** – физ.-мат.ғыл. канд, проф., әл-Фараби ат. Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан, email: nurzada.beissen@kaznu.edu.kz.

2. **Сәкен Тоқтарбай** – PhD, әл-Фараби ат. Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан, email: Saken.Toktarbay@kaznu.edu.kz.

3. **Мадина Алимкулова** – PhD студент, әл-Фараби ат. Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан, email: m.alimkulova@mail.ru.

4. **Тұрсынбек Ерназаров** – PhD, әл-Фараби ат. Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан, email: Tursynbek.Yernazarov@kaznu.edu.kz.

5. **Нұркамал Шыңғысхан** (автор-корреспондент) – PhD студент, әл-Фараби ат. Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан, email: nurkamal8503@gmail.com.