

Момынов С.Б.,
Мухаметкаримов Е.С.,
Габитов И.Р., Давлетов А.Е.

**Параметрические
взаимодействия волн
в анизотропных
метаматериалах**

Одним из основных факторов, сдерживающих дальнейший прогресс в области приложений метаматериалов, являются значительные энергетические потери, обусловленные явлением плазменного резонанса, а их компенсация представляется наиболее актуальной проблемой современной науки о метаматериалах. В связи с этим в настоящей работе исследуется параметрическое взаимодействие электромагнитных волн, в частности, изучается процесс генерации и усиления второй гармоники в метаматериалах с отрицательным показателем преломления. Получены уравнения, описывающие параметрическое взаимодействие волн для случая неколлинеарного фазового синхронизма и найдены их точные решения при отсутствии потерь энергии путем установления законов сохранения. Рассчитана зависимость интенсивности результирующей волны второй гармоники от разности фаз сигнальной волны и волны накачки и исследован закон сохранения для случая наличия потерь энергии в метаматериале. Установлено, что фундаментальные волны в процессе генерации второй гармоники не могут обмениваться энергией через вторую гармонику при неколлинеарном согласовании фазы, а значит требуется учет эффекта оптического выпрямления поля в нелинейном метаматериале.

Ключевые слова: метаматериал, генерация второй гармоники, фундаментальная волна, фазовый синхронизм.

Momynov S.B.,
Mukhametkarimov E.S.,
Gabitov I.R., Davletov A.E.

**The parametric interaction of
waves in anisotropic
metamaterials**

One of the main factors impeding further progress in the field of application of metamaterials are significant energy losses due to the phenomenon of plasmon resonance, and their compensation is the most urgent problem of the modern science of metamaterials. Therefore, in this paper the parametric interaction of electromagnetic waves, in particular, to study the process of generation and amplification of the second harmonic in metamaterials with negative refractive index. The equations that describe the parametric interaction of waves in the case of non-collinear phase matching and found them accurate decisions in the absence of energy loss by establishing conservation laws. The dependence of the intensity of the resulting wave of the second harmonic of the phase difference between the signal wave and the pump wave and investigated for the case of the law of conservation of energy losses in the presence of a metamaterial. It was found that the fundamental wave in the process of second harmonic generation can not exchange energy through the second harmonic at the noncollinear phase matching, and thus requires consideration of the effect of the optical rectification of the field in the nonlinear metamaterials.

Key words: metamaterial, the fundamental wave, the second harmonic.

Момынов С.Б.,
Мухаметкаримов Е.С.,
Габитов И.Р., Давлетов А.Е.

**Анизотроптық
метаматериалдардағы
толқындардың
өзара параметрлік әсерлесуі**

Метаматериалдардың дамуын ұстап тұрған негізгі факторлардың бірі энергетикалық жұтылулардың пайда болуы, бұл процесс плазмалық резонанс құбылысымен түсіндіріледі. Осы мақсат негізінде, берілген жұмыста электромагниттік толқындардың өзара параметрлік әсерлесуі зерттеледі. Негізінен генерация процесі мен теріс сыну корсеткіші негізіндегі метаматериалдағы екінші гармониканың күшеюі қарастырылады. Түсетін толқындар шамаларының негізінде екінші гармониканың тәуелдік графигі көрсетілді және коллинеарлы емес фазалық синхронизм жағдайындағы толқындардың параметрлік әсерлеуін сипаттайтын теңдеу алынды, жұтылу энергиясы жоқ жағдайдағы шешім қарастырылып, энергияның сақталуы көрсетілді. Алынған нәтижелердің негізінде, келесідей қорытындыға келуге болады екінші ретті гармоника процесінің негізінде фундаментальды толқын мен екінші гармоника энергия алмаса алмайды.

Түйін сөздер: метаматериал, фундаментальды толқын, екінші гармоника.

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОЛН В АНИЗОТРОПНЫХ МЕТАМАТЕРИАЛАХ

Введение

На сегодняшний день метаматериалы в антенной технике применяются для изготовления подложек и излучателей как с целью компенсации их реактивности, так и для работы на поверхностных электромагнитных волнах. Большие достижения в области получения метаматериалов привели к развитию новой области науки – трансформационной оптики [1], принципы которой позволяют направлять световую волну по определенным заданным траекториям, создавать плоские усиливающие линзы и даже материалы-невидимки [1-3].

Обычно под метаматериалами понимаются структурированные материалы, причем само структурирование может быть осуществлено иерархически, то есть с использованием тех же структурированных элементов. В настоящее время существует большое разнообразие структурированных материалов, к которым относятся материалы на основе металло-диэлектрических [4,5], металло-органических [6,7], биологических [8] и других структур. Структурирование позволяет достичь две цели: уникальность характеристик и многофункциональность материалов. К уникальным свойствам относятся и свойство отрицательности показателя преломления, которое достигается путем введения резонансных структур (плазмонных или фононных – карбид кремния), киральных структур [9], а также анизотропных материалов – гиперболических материалов [10, 11].

Рассмотрим процесс генерации второй гармоники (ГВГ) в метаматериале с отрицательным показателем преломления, фазовый синхронизм в котором достигается в результате неколлинеарного взаимодействия двух волн фундаментальной частоты с волной второй гармоники, так что $\mathbf{k}_1^+ + \mathbf{k}_1^- + \mathbf{k}_2 = 0$, где \mathbf{k}_1^\pm , \mathbf{k}_2 – волновые вектора, соответствующие волнам накачки и второй гармоники. Данная задача является обобщением случая коллинеарной генерации второй гармоники, рассмотренного в работе [12].

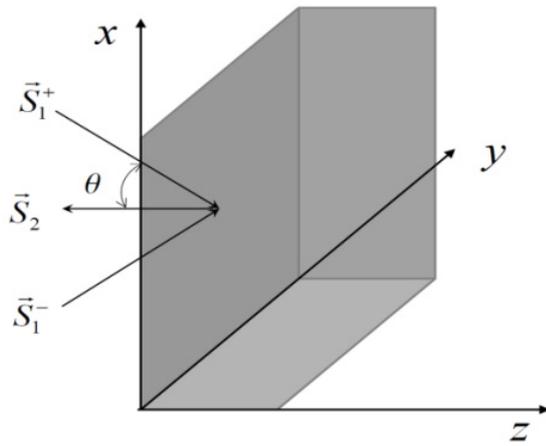


Рисунок 1 – Схема неколлинеарной синхронизации в процессе ГВГ

Две волны накачки падают под углом по отношению к нормали поверхности образца из метаматериала с отрицательным показателем преломления для частоты волны накачки.

Направление соответствующих потоков энергии характеризуется векторами Умова-Пойнтинга \mathbf{S}_1^\pm .

Поток энергии волны второй гармоники S_2 направлен вдоль нормали к поверхности в «противоположном» направлении

В случае неколлинеарной генерации второй гармоники в метаматериале волна накачки и волна второй гармоники могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned} E_1(t, \mathbf{r}) &= e_1^{(+)}(t, x, z) \exp[-i\omega t + i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}] + \\ &+ e_1^{(-)}(t, x, z) \exp[-i\omega t + i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}], \\ E_2(t, \mathbf{r}) &= e_2(t, x, z) \exp[-2i\omega t + i\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r}]. \end{aligned} \quad (1)$$

Предполагается, что на фундаментальной частоте ω показатель преломления метаматериала имеет отрицательный знак, а на частоте второй гармоники 2ω он является положительным. Волна второй гармоники распространяется вдоль биссектрисы волновых векторов падающих волн накачки. При этом направление вектора Умова-Пойнтинга \mathbf{s}_2 второй гармоники противоположно направлению сумме векторов

Умова-Пойнтинга \mathbf{S}_1^\pm волн накачки, которая направлена по биссектрисе (см.рис. 1). То есть волновой вектор второй гармоники \mathbf{k}_3 направлен вдоль оси Z , а волновые вектора падающих на метаматериал волн \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 лежат в плоскости XZ , так что

$$\mathbf{k}_1 = k_1 \begin{pmatrix} \eta_x \\ -\eta_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k}_2 = k_2 \begin{pmatrix} -\eta_x \\ -\eta_z \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где $\eta_x = \sin \theta$, $\eta_z = \cos \theta$, θ – угол между векторами \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_3 .

Система уравнений, описывающая неколлинеарную синхронизацию фаз при генерации второй гармоники, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} (-\eta_z \partial_z + \eta_x \partial_x + \nu_1^{-1} \partial_t) E_1^{(+)} &= i\gamma_1 E_1^{(-)*} E_2 e^{i\Delta \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \\ (-\eta_z \partial_z - \eta_x \partial_x + \nu_1^{-1} \partial_t) E_1^{(-)} &= i\gamma_1 E_1^{(+)*} E_2 e^{i\Delta \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \\ (\partial_z + \nu_2^{-1} \partial_t) E_2 &= i\gamma_2 E_1^{(-)} E_1^{(+)} e^{-i\Delta \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $E_1^{(\pm)}$ и E_2 – комплексные огибающие электрических полей волн накачки и второй гармоники с соответствующими групповыми скоростями $\nu_{1,2}$, $\gamma_{1,2}$ – коэффициенты нелинейного взаимодействия.

Рассогласование векторного синхронизма $\Delta \mathbf{k}$ в рассматриваемых координатах имеет вид:

$$\Delta k = k_z(2\omega) + 2k(\omega)\eta_z. \quad (4)$$

Если рассмотреть медленно меняющиеся $E_1^{(\pm)}$ и E_2 :

$$\begin{aligned} E_1^{(\pm)}(x, z, t) &= \Phi_1^{(\pm)}(x) A_1^{(\pm)}(z, t), \\ E_2(x, z, t) &= \Phi_2(x) A_2(z, t), \end{aligned} \quad (5)$$

то уравнение для E_2 можно переписать следующим образом:

$$\Phi_2(x) \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{\nu_2} \frac{\partial}{\partial t} \right) A_2(z, t) = i\gamma_2 \Phi_1^{(-)}(x) \Phi_1^{(+)}(x) A_1^{(-)}(z, t) A_1^{(+)}(z, t) e^{-i\Delta k z}. \quad (6)$$

Последнее уравнение приводится к виду

$$\frac{(\partial_z + (1/v_2)\partial_t)A_2(z,t)}{i\gamma_2 A_1^{(-)}(z,t)A_1^{(+)}(z,t)e^{-i\Delta kz}} = \frac{\Phi_1^{(-)}(x)\Phi_1^{(+)}(x)}{\Phi_2(x)}, \quad (7)$$

из которого можно заметить, что правая часть уравнения (7) зависит только от z , а левая яв-

ляется функцией x . Это означает, что левая часть (7) есть некоторая постоянная, то есть:

$$\frac{\Phi_1^{(-)}(x)\Phi_1^{(+)}(x)}{\Phi_2(x)} = const. \quad (8)$$

Уравнения для падающих волн можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Phi_1^{(\pm)}(x) \left(-\eta_z \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{v_1} \frac{\partial}{\partial t} \right) A_1^{(\pm)}(z,t) \pm \eta_x \frac{\partial \Phi_1^{(\pm)}}{\partial x} A_1^{(\pm)}(z,t) = \\ = i\gamma_1 \Phi_1^{(\mp)*}(x) \Phi_2(x) A_2(z,t) A_1^{(\mp)*}(z,t) e^{+i\Delta kz}. \end{aligned} \quad (9)$$

Деление последнего выражения на $\Phi_1^{(\pm)}$ дает

$$\frac{\Phi_2(x)\Phi_1^{(\pm)*}(x)}{\Phi_1^{(\mp)}(x)} = m \left| \Phi_1^{(\mp)}(x) \right|^2. \quad (10)$$

Предположим, что $\left| \Phi_1^{(\mp)}(x) \right|^2 = 1$, тогда уравнения для падающих волн запишется как

$$\begin{aligned} \left(-\eta_z \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{v_1} \frac{\partial}{\partial t} \right) A_1^{(\pm)}(z,t) \pm \eta_x \frac{1}{\Phi_1^{(\pm)}} \frac{\partial \Phi_1^{(\pm)}}{\partial x} A_1^{(\pm)}(z,t) = \\ = i\gamma_1 m A_2(z,t) A_1^{(\mp)*}(z,t) e^{+i\Delta kz}, \end{aligned} \quad (11)$$

и после разделения переменных дает

$$\frac{1}{\Phi_1^{(\pm)}} \frac{\partial \Phi_1^{(\pm)}}{\partial x} = const^{(\pm)}, \quad (12)$$

а значит $\Phi_1^{(\pm)} = C^{(\pm)} e^{\pm const^{(\pm)} x}$.

Принимая во внимание, что $\left| \Phi_1^{(\mp)}(x) \right|^2 = 1$, имеем $\Phi_1^{(\pm)} = e^{\pm i l_1 x}$, где l_1 – произвольная постоянная. Окончательно, с учетом всех замен, уравнение (11) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \left(-\eta_z \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{v_1} \frac{\partial}{\partial t} \right) A_1^{(\pm)}(z,t) \pm i l_1 \eta_x A_1^{(\pm)}(z,t) = \\ = i\gamma_1 m A_2(z,t) A_1^{(\mp)*}(z,t) e^{+i\Delta kz}. \end{aligned} \quad (13)$$

Используя фазовый сдвиг $A_1^{(\pm)} = A_1^{(\pm)} \exp(i l_1 \eta_x / \eta_z)$, можно из уравнения (13) исключить левую часть, а параметр m для простоты выберем равным единице. Таким образом, получается система уравнений, описывающих неколлинеарное взаимодействие трех волн в нанокompозитной среде, то есть в метаматериале с отрицательным показателем преломления:

$$\begin{aligned}
 \left(-\eta_z \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{\nu_1} \frac{\partial}{\partial t} \right) A_1^{(+)}(z, t) &= i\gamma_1 A_2(z, t) A_1^{(-)*}(z, t) e^{+i\Delta k z}, \\
 \left(-\eta_z \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{\nu_1} \frac{\partial}{\partial t} \right) A_1^{(-)}(z, t) &= i\gamma_1 A_2(z, t) A_1^{(+)*}(z, t) e^{+i\Delta k z}, \\
 \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{\nu_2} \frac{\partial}{\partial t} \right) A_2(z, t) &= i\gamma_2 A_1^{(+)}(z, t) A_1^{(-)}(z, t) e^{-i\Delta k z}.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Рассмотрим стационарный случай, в котором система уравнений (14) переписывается в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 -\eta_z \frac{\partial}{\partial z} A_1^{(+)}(z) &= i\gamma_1 A_2(z) A_1^{(-)*}(z), \\
 -\eta_z \frac{\partial}{\partial z} A_1^{(-)}(z) &= i\gamma_1 A_2(z) A_1^{(+)*}(z), \\
 \frac{\partial}{\partial z} A_2(z) - i\Delta k A_2(z) &= i\gamma_2 A_1^{(+)}(z) A_1^{(-)}(z).
 \end{aligned} \tag{15}$$

После подстановки $A_2(z) = a_2 \exp(-i\Delta k z)$, $z/z_0 = x$, $\Delta k = \Delta$, $\eta_z = \alpha$, система уравнений (15) запишется так

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial}{\partial x} e_1^{(+)}(x) &= i e_2(x) e_1^{(-)*}(x), \\
 -\frac{\partial}{\partial x} e_1^{(-)}(x) &= i e_2(x) e_1^{(+)*}(x), \\
 \frac{\partial}{\partial x} e_2(x) - i\delta e_2(x) &= i e_1^{(+)}(x) e_1^{(-)}(x).
 \end{aligned} \tag{16}$$

Нормировочные амплитуды взаимодействующих волн определены здесь как $A_1^{(\pm)} = (1/z_0) \sqrt{\alpha/\gamma_1 \gamma_2} e_1^{(\pm)}$, $a_2 = (\alpha \Delta / \gamma_1 z_0) e_2$ и $\delta = \Delta z_0$.

Если задать длину исследуемого образца как l , то необходимо также задать следующие граничные условия:

$$e_1^{(\pm)}(0) = e_{10}^{(\pm)} \exp(i\phi_{10}), \quad e_2(l) = 0. \tag{17}$$

Таким образом, имеем систему дифференциальных уравнений (16), описывающих неколлинеарную синхронизацию волн в процессе

ГВГ, с граничными условиями (17), заданными на разных концах образца.

Система уравнений (16) может быть переписана через амплитуды и фазы, путем постановки $e_1^{(\pm)} = u^{(\pm)} \exp(i\varphi_1^{(\pm)})$, $e_2 = v \exp(i\varphi_2)$ и последующего разделения на мнимые и вещественные части, в виде:

$$\begin{aligned}
 \partial_z u^+ &= \nu u^- \sin \theta, \\
 \partial_z u^- &= \nu u^+ \sin \theta, \\
 \partial_z v &= u^+ u^- \sin \theta, \\
 \partial_z \theta &= (\nu u^- / u^+ + \nu u^+ / u^- + u^+ u^- / v) \cos \theta - \delta, \\
 u^\pm(0) &= u_0^\pm, \quad v(l) = 0, \quad \theta(l) = -\pi/2,
 \end{aligned} \tag{18}$$

где $\theta = \varphi_2 - \varphi_1^+ - \varphi_1^-$, φ_1^\pm и φ_2 – фазы волн первой накачки и второй гармоники.

Наличие общего множителя $\sin \theta$ в уравнениях для полей волн (2.49) означает, что обмен энергией между гармониками происходит таким образом, что обе фундаментальные волны либо одновременно теряют, либо одновременно приобретают энергию, то есть обмен энергиями

между волнами u^- и u^+ через вторую гармонику невозможен.

Система уравнений (18) имеет три первых интеграла, среди которых можно выделить соотношения Мэнли-Роу, то есть закон сохранения энергии:

$$\begin{aligned}
 (u^+)^2 - v^2 &= m_1^2, \\
 (u^-)^2 - v^2 &= m_2^2, \\
 (u^+)^2 - (u^-)^2 &= m_1^2 - m_2^2,
 \end{aligned} \tag{19}$$

где $m_{1,2} = u_1^\pm(l)$.

Рассмотрим для начала случай идеальной фазовой синхронизации $\delta = 0$. На рисунке 2 представлены результаты численного расчета интенсивностей падающих волн и волны второй гармоники при следующих значениях входных амплитуд и длины образца $u_{10}^+ = 1, u_{10}^- = 0.9, \delta = 0, l = 1$. Из рисунка видно, что волны накачки одновременно передают энергию второй гармонике, не взаимодействуя между собой.

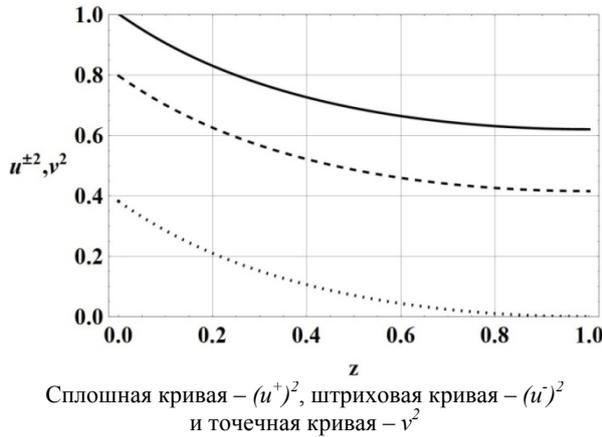


Рисунок 2 – Пространственные профили интенсивностей полей волн накачки и второй гармоники при $u_{10}^+ = 1, u_{10}^- = 0.9, \delta = 0, l = 1$

На рисунке 3 представлены трехмерные графики зависимостей интенсивности фундаментальных волн $u^\pm(l)$ на правом конце образца от их значений u_0^\pm на левом конце. Рисунок 4 иллюстрирует зависимость u_0^\pm от значения интенсивности второй гармоники на левом конце образца. Из рисунка видно, что интенсивность второй гармоники принимает максимальные значения в тот момент, когда амплитуды u_0^\pm приблизительно равны, то есть $u_0^- \approx u_0^+$.

Зависимость коэффициента преобразования $K = v(0) / (u^+(l) + u^-(l))$ от значений амплитуд падающих волн u_0^\pm представлена на рисунке 5, из которого видно, что максимально эффективное преобразование фундаментальных волн во вторую гармонику происходит при $u_0^- \approx u_0^+$.

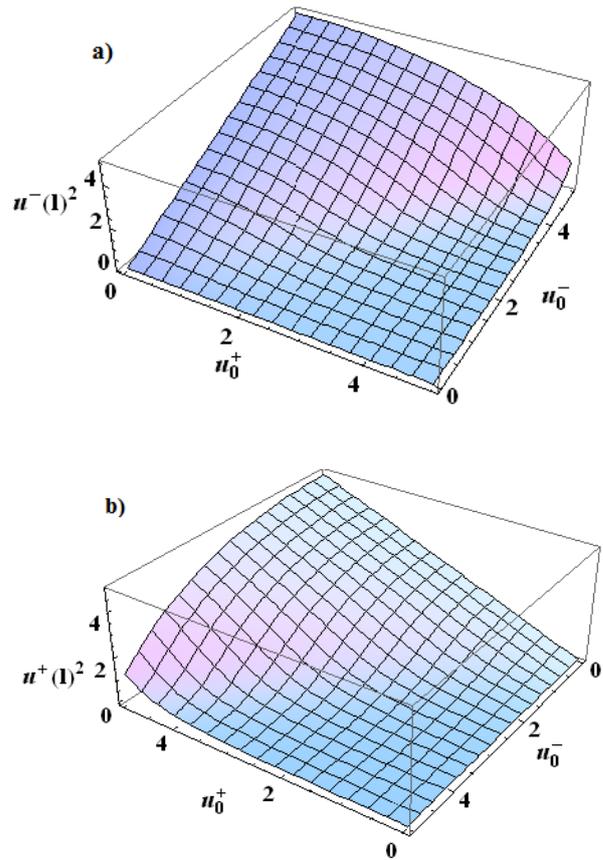


Рисунок 3 – Трехмерный график зависимостей входных значений амплитуд волн накачки u_0^\pm от значения интенсивности поля на выходе $u^\pm(l)$

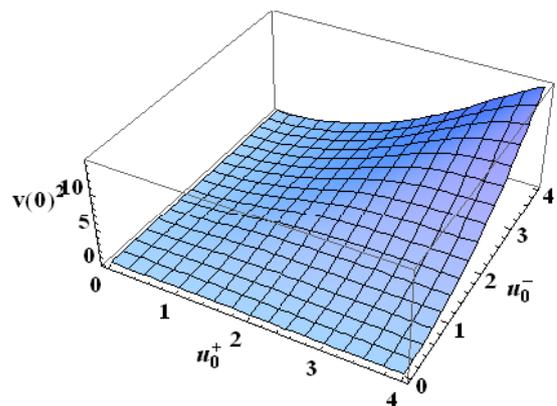


Рисунок 4 – Трехмерный график зависимостей значений амплитуд волн накачки от интенсивности волны второй гармоники на левом конце образца

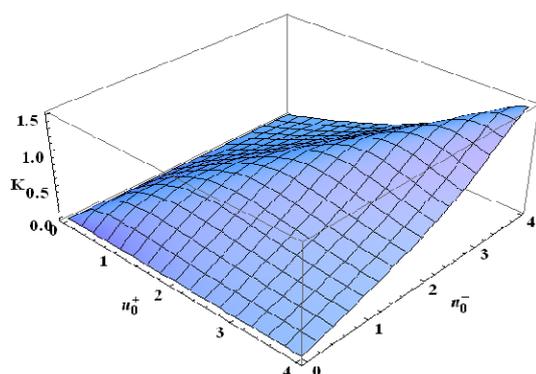


Рисунок 5 – Зависимость коэффициента преобразования от входных значений амплитуд волн накачки

Заключение

В заключении можно отметить, что при неколлинеарном согласовании фазы в процессе генерации второй гармоники в метаматериале с отрицательным показателем преломления обе фундаментальные волны одновременно либо теряют, либо приобретают энергию, то есть обмен энергией между ними через вторую гармонику невозможен. Тем не менее обмен энергией между падающими волнами накачки будет происходить при учете оптического выпрямления, то есть постоянного поля, которое всегда присутствует в процессе генерации второй гармоники.

References

- 1 Shalaev V.M. Physics: Transforming Light // Science – 2008. – Vol. 322(5900) – P. 384-386.
- 2 Schurig D., Mock J. J., Justice B. J., Cumber S. A., Pendry J. B., Starr A. F., and Smith D. R. Metamaterial electromagnetic cloak at microwave frequencies // Science – 2006 – Vol. 314 – P.977.
- 3 Cai W., Chettiar U. K., Kildishev A. V., and Shalaev V. M. Optical cloaking with metamaterials // Nature Photonics – 2007 – Vol.1 – P.224
- 4 Noginov, M. A. et al. Enhancement of surface plasmons in an Ag aggregate by optical gain in a dielectric medium // Opt. Lett. – 2006. –Vol 31. –P. 3022–3024.
- 5 Noginov, M. A. et al. The effect of gain and absorption on surface plasmons in metal nanoparticles. Appl. Phys. B - 2007. –Vol. 86. –P. 455–460.
- 6 ZokanJaksicet. al. Functionalization of plasmonic metamaterials utilizing metal–organic framework thin films //Phys. Scr. – 2012. – P.014051.
- 7 Gliemann H.,Wöll C. Epitaxially grown metal-organic frameworks // Materials today // – 2012. –Vol. 15(3). – P. 110–116.
- 8 Mauri A. Kostianen, PanuHiekkataipale, Ari Laiho et.al. Synthetic and biological nanoparticles combined to produce new metamaterials // Nature Nanotechnology. – 2013. –Vol. 8. –P.52–56.
- 9 Bingnan Wang, Jiangfeng Zhou, Thomas Koschny, Maria Kafesaki and Soukoulis C.M. Chiral metamaterials: simulations and experiments // J. Opt. A: Pure Appl. – 2009. Vol.11. –P.10.
- 10 Poddubny A., Iorsh I., Belov P., and Kivshar Y. Hyperbolic metamaterials // Nat. Photonics -2013. –Vol. 7(12). – P. 948–957.
- 11 Noginov M., Lapine M., Podolskiy V., and Kivshar Y. Focus issue: hyperbolic metamaterials // Opt. Express – 2013. –Vol. 21(12). – P.14895–14897.
- 12 Kudyshev Zh., Gabitov I.R., Maimistov A. Effect of phase mismatch on second-harmonic generation in negative-index materials // Physical Review A. – 2013. – Vol. 87. – P. 063840.