

Кудышев Ж.А., Давлетов А.Е.,
Габитов И.Р., Кисан А.,
Мухаметкаримов Е.С.

**Генерация второй гармоники
в метаматериалах с нулевым
показателем преломления**

На основе классических уравнений Максвелла выведены уравнения, описывающие многоволновое взаимодействие в переходных метаматериалах, показатель преломления которых меняется вдоль образца от положительных до отрицательных значений. Предсказано явление генерации второй гармоники в переходном слое, вблизи которого коэффициент преломления обращается в нуль, даже при слабых интенсивностях фундаментальной волны накачки. Получены аналитические решения соответствующих уравнений и разработаны конкретные рекомендации для создания компактного генератора второй гармоники на переходном метаматериале. С помощью математического моделирования методом FDTD (finite difference time domain) установлено, что эффективность генерации второй гармоники в переходном метаматериале зависит от угла падения и толщины слоя.

Ключевые слова: метаматериал с нулевым показателем преломления, генерация второй гармоники, метод FDTD.

Kudyshev Zh.A., Davletov A.Ye.,
Gabitov I.R., Kisan A.,
Mukhametkarimov Ye.S.

**Second harmonic generation in
metamaterials with zero
refractive index**

On the basis of the classical Maxwell's equations the corresponding wave equations are derived for description of multiwave interactions in transition met materials whose refractive index varies along the sample from positive to negative values. The phenomenon of second harmonic generation is predicted in the transition layer near the point at which the refractive index turns zero, even at low intensities of the fundamental pumping wave. An analytical solution of the corresponding equations are found and specific recommendations are developed for the construction of a compact second harmonic generator based on transition met materials. With the help of FDTD (finite difference time domain) mathematical modeling method it is found that the efficiency of the second harmonic generation in transition met materials strongly depends on the angle of incidence and the thickness of the transition layer.

Key words: met material with zero refractive index, second harmonic generation, FDTD method.

Кудышев Ж.А., Давлетов А.Е.,
Ғабитов И.Р., Қисан А.,
Мухаметкаримов Е.С.

**Сыну көрсеткіші нөлге тең
метаматериалдардағы екінші
ретті гармониканың
генерациясы**

Максвелл теңдеулерінің негізінде, сыну көрсеткіші оң мәннен теріс мәнге дейін өзгертін метаматериалдардағы көптолқындардың әсерлесуін сипаттайтын теңдеулер қорытылып шығарылды. Түскен толқынның аз интенсивтілігінде де байқалатын, сыну көрсеткіші нөлге ұмтылатын шекаралық қабаттағы екінші ретті гармониканың генерациясы құбылысын байқау мүмкіндіктері қарастырылды. Алынған теңдеулердің аналитикалық шешімдері анықталып, ауыспалы метаматериалдардың негізінде екінші ретті гармониканың шағын генераторын жасау нұсқаулары келтірілді. FDTD (finite difference time domain) математикалық моделдеу әдісін пайдаланып ауыспалы метаматериалдарда, екінші ретті гармониканың генерациясының тиімділігі түсу бұрышы мен ауысым қабатының қалыңдығына тәуелділігі анықталды.

Түйін сөздер: сыну көрсеткіші нөлге тең метаматериал, екінші ретті гармониканың генерациясы, FDTD әдісі.

**ГЕНЕРАЦИЯ ВТОРОЙ
ГАРМОНИКИ
В МЕТАМАТЕРИАЛАХ
С НУЛЕВЫМ
ПОКАЗАТЕЛЕМ
ПРЕЛОМЛЕНИЯ****Введение**

В настоящее время особенный фундаментальный интерес представляют так называемые переходные метаматериалы, в которых диэлектрическая и магнитная проницаемости постепенно меняются вдоль образца от положительных до отрицательных значений. При этом, очевидно, аналогичное поведение наблюдается и для коэффициента преломления. Изучение распространения света в подобных структурах может оказаться важным с точки зрения приложений, так как становится возможным сильное усиление электрического поля при неколлинеарном падении на границу вблизи точки, в которой коэффициент преломления близок к нулю [1-3]. Это явление открывает новые возможности для наращивания эффективности нелинейных волновых взаимодействий, таких как генерация второй гармоники, генерация волн суммарной и разностной частот, другие параметрические взаимодействия, даже при слабых интенсивностях падающих волн.

Физика явления резонансного усиления поля в переходных метаматериалах может быть описана следующим образом. Для падающих поперечных магнитных волн (так называемые ТМ-волны) тонкий слой, вблизи которого показатель преломления близок к нулю, может быть рассмотрен как очень тонкий конденсатор, способный накапливать значительную энергию электрического поля, которая ограничена на практике диссипативными явлениями и дисперсией волн. При этом особо следует подчеркнуть, что накопление энергии возможно только при касательном падении света на слой с нулевым показателем преломления, так как в этом случае электрическое поле волны имеет компоненту, совпадающую с направлением преимущественного распространения волны. В силу того, что вектор электрического смещения должен оставаться непрерывным, электрическое поле должно неограниченно возрастать, так как диэлектрическая проницаемость стремится к нулю.

Это и приводит к возможности сильного увеличения напряженности электрического поля и проявлению нелинейных эффектов даже при слабых интенсивностях падающих волн.

До настоящего времени все исследования распространения электромагнитных волн в метаматериалах ограничивались только изучением линейных эффектов. Однако сильное локальное увеличение электрических полей вблизи «нулевой» точки (в которой показатель преломления близок к нулю) должно привести к осуществлению совершенно нового режима нелинейного взаимодействия волн при слабых интенсивностях изначально падающих волн. В обычных материалах нелинейная восприимчивость и линейные дисперсионные характеристики в значительной степени фиксированы и не могут меняться вдоль образца. С другой стороны, в метаматериалах электродинамические характеристики могут изменяться независимо и контролироваться процессом изготовления [4-6] так, что нелинейный отклик материала можно даже увеличить, а линейные оптические свойства существенным образом варьировать вдоль образца, тем самым меняя показатель преломления от положительных до отрицательных значений.

Нелинейное взаимодействие волн является наиболее общим и важным процессом в нелинейной оптике [7, 8]. Если две электромагнитные волны с частотами ω_1 и ω_2 распространяются в квадратично нелинейной среде, характеризующейся нелинейной восприимчивостью $\chi^{(2)}$, то в процессе их взаимодействия будут сгенерированы волны с частотами, равными сумме и разности частот распространяющихся волн, а также две волны второй гармоники. Последний процесс привлекает особый интерес в настоящее время как со стороны теоретиков, так и экспериментаторов [9-11].

Генерация второй гармоники в переходном слое метаматериала

Изучим резонансное усиление поля в переходных метаматериалах с квадратичной нелинейностью, которое способно привести к созданию очень компактных генераторов второй гармоники при слабых интенсивностях падающих волн. На рисунке 1(a) схематически показано касательное падение электромагнитной волны на переходный слой метаматериала. На частоте фундаментальной волны ω_1 реальная часть линейного коэффициента преломления $n(\omega_1, x) = \varepsilon_1(\omega_1, x)\mu_1(\omega_1, x)$ постепенно меняется от положительного до отрицательного значения, как показано на рисунке 1(b), в то время как мнимая часть возрастает с координатой, как показано на рисунке 1(c). Для волны второй гармоники $\omega_2 = 2\omega_1$ считается, что знак реальной части коэффициента преломления остается положительным вдоль всего образца. Вдоль оси y переходный слой считается однородным. Отметим, что отрицательность показателя преломления обычно достигается использованием плазмонного резонанса в металлических наноструктурах, а значит распространение волн должно сопровождаться значительными потерями энергии. Поэтому мы считаем, что потери энергии на фундаментальной частоте существенно выше, чем на частоте волны второй гармоники, как показано на рисунке 1(c). Нелинейная компонента коэффициента преломления предполагается пространственно однородной и определяется нелинейной восприимчивостью второго порядка $\chi^{(2)}$.

В дальнейшем считается, что волна накачки и генерируемая ей волна второй гармоники представляют собой ТМ-поляризованные волны со следующими компонентами: $\vec{H}^{(j)} = \{0, 0, H_x^{(j)}\}$ и $\vec{E}^{(j)} = \{E_x^{(j)}, E_y^{(j)}, 0\}$, где индексы $j = 1, 2$ соответствуют фундаментальной волне и второй гармонике соответственно. В этом случае система волновых уравнений, описывающих данный процесс, принимает вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(x) \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{\varepsilon_1(x)} \frac{d\tilde{H}_z^{(1)}}{dx} \right] + \frac{d^2 \tilde{H}_z^{(1)}}{dy^2} + \frac{\omega_1^2}{c^2} \varepsilon_1(x) \mu_1(x) \tilde{H}_z^{(1)} = \\ = 4\pi \frac{i\omega_1}{c} \left[\varepsilon_1(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{\tilde{P}_y^{(1)}}{\varepsilon_1(x)} \right) - \frac{d\tilde{P}_x^{(1)}}{dy} \right], \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{d^2 \tilde{H}_z^{(2)}}{dx^2} + \frac{d^2 \tilde{H}_z^{(2)}}{dy^2} + \frac{\omega_2^2}{c^2} \varepsilon_2 \mu_2 \tilde{H}_z^{(2)} = 4\pi \frac{i\omega_1}{c} \left[\frac{d\tilde{P}_y^{(2)}}{dx} - \frac{d\tilde{P}_x^{(2)}}{dy} \right]. \quad (2)$$

Здесь $\tilde{P}^{(j)}$ – нелинейная поляризация фундаментального поля $\tilde{P}^{(1)} = \chi^{(2)}(\tilde{E}^{(1)})^*$ и поля

волны второй гармоники $\tilde{P}^{(2)} = \chi^{(2)}(\tilde{E}^{(1)})^2$, c – скорость света в вакууме.

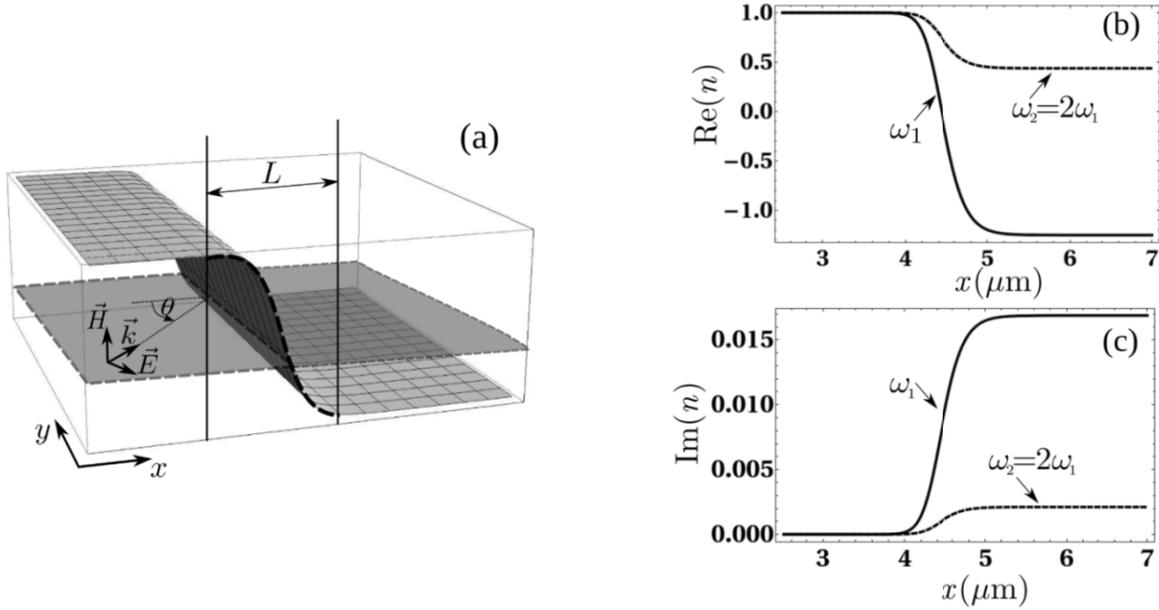


Рисунок 1 – (а) Схема падения ТМ-поляризованной волны внутри переходного слоя толщиной L ; (б) Пространственное распределение реальной части коэффициента преломления $n_j(x) = \sqrt{\varepsilon_j(x)\mu_j(x)}$ на фундаментальной частоте (сплошная линия) и частоте волны второй гармоники (штриховая линия); (с) Пространственное распределение мнимой части коэффициента преломления на фундаментальной частоте (сплошная линия) и частоте волны второй гармоники (штриховая линия)

Так как среда является однородной вдоль оси y , то магнитные компоненты полей волн могут быть записаны в виде

$\tilde{H}_z^{(j)} = \Phi_j(x) \exp(ik_y^{(j)}y)$. Тогда уравнения (1) и (2) можно переписать в виде:

$$\frac{d^2 \Phi_1}{dx^2} - \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{d\varepsilon_1}{dx} \frac{d\Phi_1}{dx} + \frac{\omega_1^2}{c^2} (\varepsilon_1 \mu_1 - \sin^2(\theta_0)) \Phi_1 = 4\pi \frac{i\omega_1}{c} \left[\varepsilon_1 \frac{d}{dx} \left(\frac{\tilde{P}_y^{(1)}}{\varepsilon_1} \right) - \frac{d\tilde{P}_x^{(1)}}{dy} \right] e^{-ik_y^{(j)}y}, \quad (3)$$

$$\frac{d^2 \Phi_2}{dx^2} + \left(\frac{\omega_2^2}{c^2} \varepsilon_2 \mu_2 - (k_y^{(2)})^2 \right) \Phi_2 = 4\pi \frac{i\omega_2}{c} \left[\frac{d\tilde{P}_y^{(2)}}{dx} - \frac{d\tilde{P}_x^{(2)}}{dy} \right] e^{-ik_y^{(j)}y}. \quad (4)$$

Если волна накачки падает продолжительное время, а нелинейные эффекты малы, то правую часть уравнения (3) можно положить равной нулю и оно становится независимым от уравнения (4). Следует отметить, что в этом случае дифференциальное уравнение (3) описывает распространение электромагнитной волны

через переходный слой, которое было рассмотрено в [1].

Уравнение (4) для волны второй гармоники может быть приведено к следующему виду:

$$\frac{d^2 \Phi_2}{d\zeta^2} + \kappa^2 \Phi_2 = F(\zeta), \quad (5)$$

где $\kappa^2 = \frac{\omega_2^2}{c^2} \varepsilon_2 \mu_2 - (k_y^{(2)})^2$, $\zeta = x/L$ – безразмерная координата, а L – эффективная толщина переходного слоя.

Это известное дифференциальное уравнение, описывающее вынужденные колебания ос-

$$F(\zeta) = 8\pi\chi^{(2)} \frac{i\omega_2}{c} \left[\tilde{E}_y^{(1)} \frac{d\tilde{E}_y^{(1)}}{d\zeta} - i\beta_0 \sin(\theta_0) (\tilde{E}_y^{(1)})^2 \right] \exp(-i\Delta k_y y), \quad (6)$$

где $\Delta k_y = k_y^{(2)} - 2k_y^1 = k_y^{(2)} - 2k_0 \sin(\theta_0)$ – фазовая расстройка между y -компонентами волновых векторов фундаментальной волны и волны второй гармоники, а $\beta_0 = k_0 L$ – безразмерный волновой вектор k_0 . Здесь мы предположи-

ли, что $\Delta k_y = 0$, а соответствующее пространственное распределение $F(\zeta)$ показано на рисунке 2(a).

Общее решение уравнения (5) может быть получено в следующей форме:

$$\Phi_2(\zeta) = \Phi_2^+ + \Phi_2^- = C_+(\zeta) \exp(ik\zeta) + C_-(\zeta) \exp(-ik\zeta), \quad (7)$$

$$\text{где } C_+(\zeta) = \frac{1}{2ik} \int_{E_{min}}^{\zeta} F(\eta) \exp(-ik\eta) d\eta, \quad C_-(\zeta) = -\frac{1}{2ik} \int_{E_{min}}^{\zeta} F(\eta) \exp(ik\eta) d\eta.$$

Это решение показывает, что порождаемая волна второй гармоники представляет собой суперпозицию волн, сгенерированных в прямом и обратном направлениях с амплитудами $C_+(\zeta)$ и $C_-(\zeta)$ соответственно. Пространственные распределения реальных частей поля волн второй гармоники $\tilde{H}_z^{(2)}$, порожденных в прямом и обратном направлениях, показаны на рисунке 2 (b).

Используя материальные уравнения для волны второй гармоники, электрические компоненты могут быть найдены в виде:

$$E_x^{(2)} = \frac{1}{\varepsilon_2} \left[\frac{ic}{\omega_2 L} \frac{\partial \tilde{H}_z^{(2)}}{\partial \xi} - 4\pi\chi^{(2)} (\tilde{E}_x^{(1)})^2 \right], \quad (8)$$

$$E_y^{(2)} = -\frac{1}{\varepsilon_2} \left[\frac{ic}{\omega_2 L} \frac{\partial \tilde{H}_z^{(2)}}{\partial \xi} + 4\pi\chi^{(2)} (\tilde{E}_y^{(1)})^2 \right], \quad (9)$$

где $\xi = y/L$ – безразмерная координата.

Как видно из полученных выше выражений, в случае наклонного падения волн в области

«нулевой» точки ζ_0 второй член, пропорциональный $(\tilde{E}_x^{(1)})^2$, дает главный вклад в x -компоненту поля волны второй гармоники. Пространственное распределение абсолютной величины $E_x^{(2)}$ показано на рисунке 2(c). Поэтому можно сделать вывод, что при непрерывной накачке взаимодействие фундаментальных волн приводит к сильному усилению волны второй гармоники вблизи «нулевой» точки.

Для проверки полученных в приближении непрерывной накачки результатов и для детального анализа процесса генерации второй гармоники внутри нелинейного переходного слоя, система уравнений Максвелла была промоделирована численно с использованием метода FDTD – finite difference time domain. В качестве граничных условий использовалось приближение неаксиального, идеально подходящего слоя (uniaxial perfectly matched layer – UPML), имеющих вид:

$$\nabla \times \vec{E}^{(j)} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}^{(j)}}{\partial t}, \quad \nabla \times \vec{H}^{(j)} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}^{(j)}}{\partial t}. \quad (10)$$

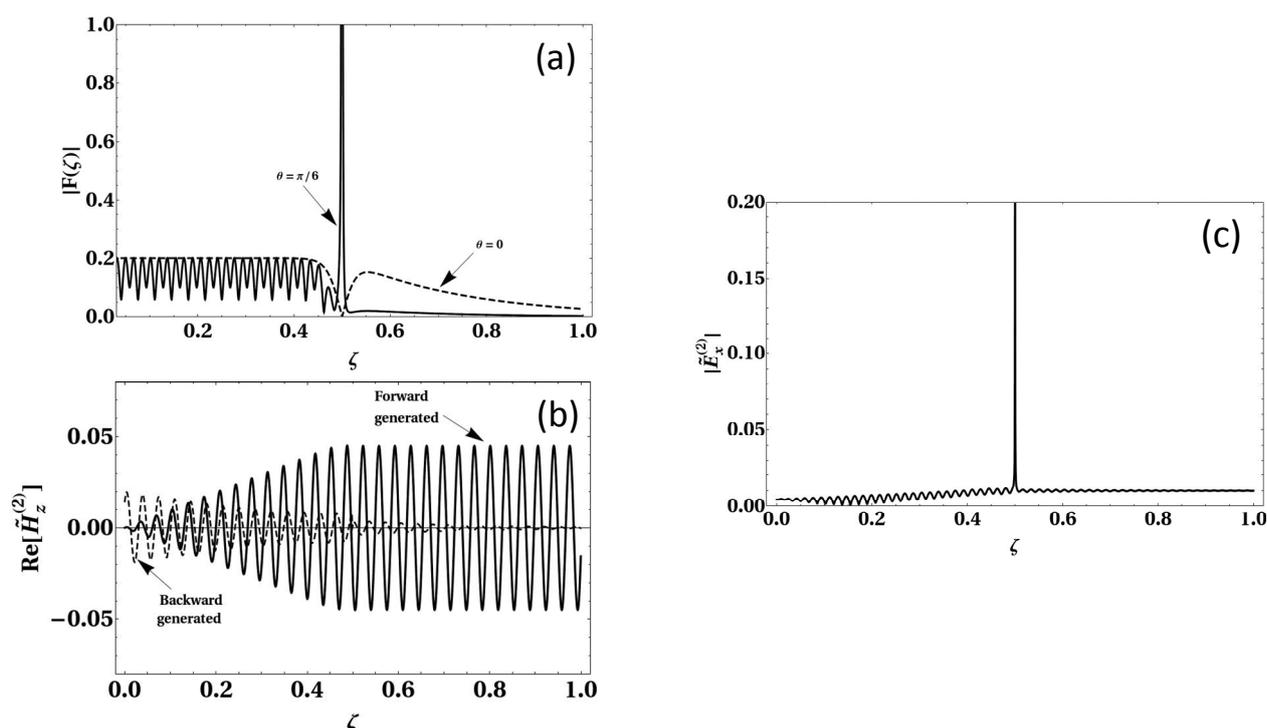


Рисунок 2 – (а) Зависимость абсолютной величины внешнего $|F(\zeta)|$ от ζ при фиксированной величине $\chi^{(2)} = 0.001$ и различных значений углов падения: сплошная линия – $\theta = 30^\circ$; штриховая линия – $\theta = 0$;
 (б) Пространственное распределение реальной части $\tilde{H}_z^{(2)}$ волны второй гармоники, сгенерированной в прямом (сплошная линия) и обратном (штриховая линия) направлениях при фиксированном угле падения $\theta = 30^\circ$;
 (с) Пространственные распределения абсолютной величины электрического поля $E_x^{(2)}$ волны второй гармоники от ζ при фиксированном угле падения $\theta = 30^\circ$

Здесь вектор электрического смещения и напряженность электрического поля связаны соотношением $\tilde{D}^{(1)} = \varepsilon(\omega_1, x)\tilde{E}^{(1)} + \chi^{(2)}\tilde{E}^{(1)}\tilde{E}^{(2)}$ и $\tilde{D}^{(2)} = \varepsilon(\omega_2, x)\tilde{E}^{(2)} + \chi^{(2)}(\tilde{E}^{(1)})^2$, в то время как соотношение между магнитной индукцией и напряженностью магнитного поля имеет вид $\tilde{B}^{(j)} = \mu(\omega_j, x)\tilde{H}^{(j)}$.

Выше было использовано предположение, что диэлектрическая и магнитная проницаемости переходного слоя определяются функциональной зависимостью $f(\omega, x) = 1 - \omega_0^2(x)/(\omega^2 + i\omega\Gamma)$, где $\omega_0(x) = 0.75\omega_1(1 + \tanh(a - bx))$, a, b – некоторые постоянные, а потери энергии в переходном слое определяются параметром $\Gamma = \omega/\delta$, который в дальнейшем предполагается равным 200. Подобный выбор функциональной зависимости приводит к постепенному изменению электрической и магнитной проницаемостей вдоль всего образца, как показано на рисунках 1(б) и 1(с). Также для простоты будем считать, что нелинейная восприимчивость $\chi^{(2)}$ однородной вдоль образца и равной

$\chi^{(2)} = 5 \times 10^{-10}$ м/В, что соответствует случаю хромофорного полимерного композита. Тем не менее отметим, что в общем случае нелинейная восприимчивость должна быть анизотропной и описываться соответствующим тензором.

Можно ожидать, что для линейной системы усиление поля сильно зависит от угла падения фундаментальной волны. На рисунке 3(а) показан результат моделирования для коэффициента усиления поля, обезразмеренного на величину поля фундаментальной волны $E_0^{(1)} = 1,5 \times 10^6$ В/м, как функции угла падения θ при различных размерах переходного слоя L . Падающая фундаментальная волна считается ТМ-поляризованной с длиной волны $\lambda_0 = 1$ мкм. Рисунок 3(а) показывает, что абсолютная величина усиления фундаментальной волны достигает максимума при величине угла $\theta \approx 30^\circ$ и в дальнейшем уменьшается. Обнаружено, что при увеличении толщины переходного слоя L абсолютная величина усиления фундаментальной волны уменьшается, а соответствующий макси-

мум сдвигается в сторону меньших углов. На рисунке 3(b) показана зависимость x -компоненты генерируемой волны второй гармоники вблизи «нулевой» точки от угла падения θ . Таким образом можно заключить, что зависимость $E_x^{(2)}$ от θ и L получается из соответствующего поведения фундаментальной волны. Это значит, что напряженность электрического поля $E_x^{(2)}$ волны

второй гармоники обратно пропорциональна толщине переходного слоя L . Отметим, что когда размер переходного слоя становится достаточно малым по сравнению с длиной волны и сравнимой с характерными размерами структур метаматериала, то становится необходимым учет нелокальных эффектов вблизи «нулевой» точки.

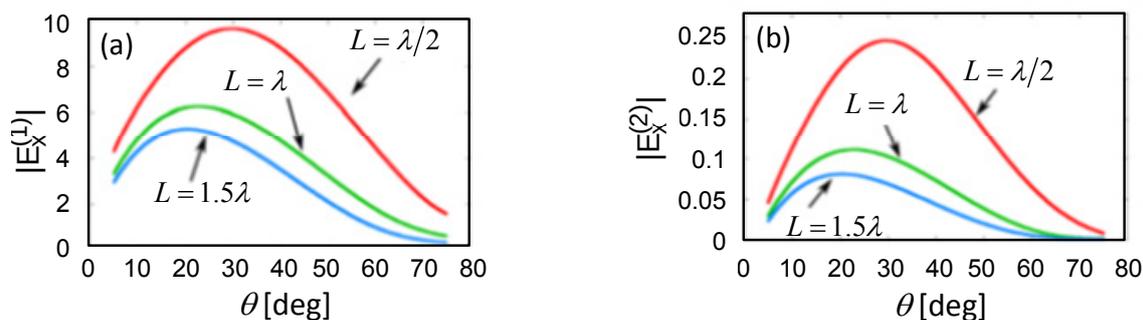


Рисунок 3 – (а) Абсолютная величина усиленного поля фундаментальной волны $E_x^{(1)}$ вблизи «нулевой» точки как функция угла падения θ и толщины переходного слоя L ; (б) Абсолютная величина электрического поля волны второй гармоники $E_x^{(2)}$ вблизи «нулевой» точки как функция угла падения θ и толщины переходного слоя L

Заключение

В данной работе исследовался процесс генерации второй гармоники в метаматериалах, коэффициент преломления которых меняется от отрицательных до положительных значений. Показано, что вблизи точки с нулевым показателем преломления резко возрастает величина поля фундаментальной волны накачки, что приводит к появлению нелинейных эффектов даже для слабых интенсивностей падающих на образец волн.

Изучена зависимость интенсивности поля волны второй гармоники от угла падения на образец и толщины переходного слоя в метаматериале. Наличие максимума на кривой зависимости от угла падения свидетельствует о том, что наиболее эффективная генерация второй

гармоники достигается при неколлинеарном взаимодействии волн. При этом, очевидно, с увеличением толщины переходного слоя соответствующие интенсивности уменьшаются вследствие потерь энергии, поэтому чем тоньше слой, тем лучше будет построенный генератор. С практической точки зрения, однако, создание очень тонких метаматериальных слоев с высоким градиентом оптических свойств является нетривиальной технической задачей. Кроме этого, при достижении длиной волны характерных размеров структур в метаматериале, становится необходим учет нелокальных эффектов. В связи с этим следует отметить, что существует некоторая оптимальная толщина переходного слоя, при которой эффективное преобразование энергии во вторую гармонику позволит сконструировать соответствующий генератор.

References

- 1 Litchinitser N. M., Maimistov A. I., Gabitov I. R., Sagdeev R. Z., and Shalaev V. M. Metamaterials: electromagnetic enhancement at zero-index transition // Opt. Lett. – 2008. – Vol.33. – P. 2350-2352.
- 2 Mozjerin I., Gibson E. A., Furlani E. P., Gabitov I. R., Litchinitser N. M. Electromagnetic enhancement in lossy optical transition metamaterials // Opt. Lett. – 2010. – Vol. 35. – P. 3240-3242.
- 3 Alali F. and Litchinitser N. M. Gaussian Beams in Near-Zero Transition Metamaterials // Opt.Comm. – 2013. – Vol. 291. – P. 179-183.
- 4 Zheludev N.I. and Kivshar Y.S. From metamaterials to metadevices // Nature Materials – 2012. – Vol. 11. – P. 917-924.

- 5 Poutrina E., Huang D., and Smith D. R. Analysis of nonlinear electromagnetic metamaterials // *N. J. Phys.* – 2010. – Vol. 12. – P. 093010.
- 6 Poutrina E., Huang D., Urzhumov Y., and Smith D.R. Nonlinear oscillator metamaterial model: numerical and experimental verification // *Opt. Express* – 2011. – Vol.19. – P. 8312-8319.
- 7 Boyd R.W., *Nonlinear optics*. 2nd ed. 2003, Academic Press: San Diego, CA. – 255 p.
- 8 Franken P.A. and Ward J.F. Optical Harmonics and Nonlinear Phenomena // *Rev. Mod. Phys.* – 1963. – Vol. 35. – P. 23.
- 9 Niesler F. B. P., Feth N., Linden S., and Wegener M. Second-harmonic optical spectroscopy on split-ring-resonator arrays // *Opt. Lett.* – 2011. – Vol.36. – P. 1533-1535.
- 10 Rose A. A., Huang D., and Smith D. R. Controlling the Second Harmonic in a Phase-Matched Negative-Index Metamaterial // *Phys. Rev. Lett.* – 2011. – Vol.107. – P. 063902.
- 11 Kudyshev Zh., Gabitov I., and Maimistov A. Effect of phase mismatch on second-harmonic generation in negative-index materials // *Phys. Rev. A* – 2013. – Vol.87. – P. 063840.