Иманбаева А.К.,
Сыздыкова Р.Н.

Методика формирования понятия динамического хаоса в вузе

Хаос представляет собой типичное свойство динамических систем, он весьма распространен и проявляется практически во всех областях современной физики. Можно сказать, что системы, демонстрирующие только регулярное поведение, являются редкими. Исследования хаоса по-новому высветили и дали новые импульсы к изучению целого ряда вопросов, имеющих общефизическое и общенаучное значение. Эти изменения вызвали ряд проблем методологического характера, которые необходимо решать в процессе разработки методики преподавания современных понятий и явлений. Изначально важно проведение тщательного отбора материала и его адаптация, чтобы добиться совмещения научности и доступности для студентов. В данной статье представлены методические приёмы обучения динамическому хаосу на основе опыта авторов. Данная методика позволяет формировать современные представления о физической картине мира, навыки работы с нелинейными моделями физики, а также развивать практические навыки работы с компьютерными моделями.

Ключевые слова: динамический хаос, методика преподавания, компьютерное моделирование, аттрактор, бифуркационная диаграмма.

Imanbayeva A.K.,
Syzdykova R.N.

Methodology of the concept of dynamic chaos in the university

Chaos is a typical property of the dynamical systems, it is quite common and is manifested in almost all areas of modern physics. We can say that the systems, showing only the regular behavior are rare. Research of chaos on a new show and gave new impulses to explore of a number of issues of general physical and scientific importance. These modifications have caused a number of problems of methodological sorts, that to be solved in during the development methods of teaching of modern concepts and phenomena. Initially, it is important to conduct a careful selection of the material and its adaptation for achieve alignment of scientific and availability to students. This article presents the methodological techniques of teaching dynamic chaos on the experience of the authors. This methodology allows forming a contemporary idea of the physic image of the world, experience in working with nonlinear physic models, and to develop practical skills of work with computer models.

Key words: dynamic chaos, methods of teaching, computer modeling, attractor, bifurcation diagram.

Иманбаева А.К.,
Сыздықова Р.Н.

Жоғары оқу орындарда динамикалық хаос түсінігін қалыптастыру әдістемесі

Хаос динамикалық жүйелердің типтік қасиеті болып табылады, ол кең таралған және заманауи физиканың барлық салаларында байқалады. Тек тұрақты тәртіпке ие жүйелер өте сирек кездесті деп айтуға болады. Хаосты зерттеу жалпы физикалық және жалпы ғылыми мәні бар бірнеше сұрақтарды жаңаша қарастыруға және зерделеуге жаңа импульс берді. Мұндай өзгерістер заманауи түсініктер мен құбылыстарды оқыту әдістемесін құрастыру кезінде шешуге қажет көп әдістемелік мәселелерді тудырады. Студенттерге ғылымдық пен қолжетімділікті қатар қолдануын жеткізу үшін бастапқыда қажетті материалды мұқият таңдау және оны бейімдеу маңызды. Бұл мақалада аворлардың өз тәжірибесіне негізделіп, динамикалық хаосты оқыту әдістемелік тәсілдері көрсетілген. Бұл әдістеме студенттерде әлемнің физикалық бейнесінің заманауи көрінісін, физикадағы бейсызық модельдермен жұмыс жасау дағдысын қалыптастыруға мүмкіндік береді, сондай-ақ, компьютерлік бағдарламалармен практикалық икемділіктерін арттырады.

Түйін сөздер: динамикалық хаос, оқыту әдістемесі, компьютерлік модельдеу, аттрактор, бифуркациялық диаграмма.

УДК 378.016:53

[1*]Иманбаева А.К., [2]Сыздыкова Р.Н.

[1]Казахский национальный университет им. аль-Фараби,
Республика Казахстан, г. Алматы
[2]Алматинский университет энергетики и связи,
Республика Казахстан, г. Алматы
*E-mail: akmaral@physics.kz

МЕТОДИКА ФОРМИРОВАНИЯ ПОНЯТИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО ХАОСА В ВУЗЕ

Введение

Одно из значимых открытий в современной науке – это динамический хаос. Динамический, или детерминированный хаос, представляет собой непериодические колебания в нелинейных детерминированных системах, показывающих высокую чувствительность к начальным условиям [1]. С самого начала формирования динамического хаоса как научного направления большой интерес проявлялся к исследованию этого явления в широком диапазоне прикладных задач – от физики, астрономии, радиоэлектроники, телекоммуникации, биологии, в частности, нейродинамики, до финансового анализа. Причины этого интереса заключались как в изучении фундаментальных свойств хаоса, так и в поиске путей применения этого явления. Изучение динамического хаоса не потеряло актуальности до сих пор [2-4]. Оно привело к концептуальным изменениям в основаниях научного знания, и это существенно повлияло на научную картину мира в целом. Исследования хаоса дополнили существующую естественнонаучную картину мира. Ранее считалось, что устройство мира в общих чертах можно объяснить на основе небольшого числа фундаментальных принципов. Всё остальное воспринималось как извлечение следствий. Исследования хаоса показали, что получение следствий может привести к глубоким концептуальным изменениям в науке. В работе [5] на основе изучения развития концепции динамического хаоса показано, что новая область (исследования хаоса) привела к формированию нового языка и новой системы понятий, поновому высветила и дала новые импульсы к изучению целого ряда проблем, имеющих общефизическое и общенаучное значение. Также важно отметить, что исследования хаоса имеют междисциплинарный характер.

Таким образом, актуальность нашего исследования определяется формированием представлений у студентов о явлении динамического хаоса и недостаточной степенью разработанности методики формирования данного понятия в вузе.

Целью исследования данной статьи является обоснование методики преподавания динамического хаоса при обучении физики, астрономии, электроники и смежных предметов в вузе.

Понятия хаоса и динамической системы

Динамический хаос является одним из базовых понятий нелинейной физики [6-7]. В своих работах по развитию современной физики Лауреат Нобелевской премии В.Л. Гинзбург особое внимание уделял неравновесным процессам, хаосу, аттракторам, отмечая их важность и фундаментальность в науке. В [1] приведены слова В.Л. Гинзбурга: «Эта область (её можно назвать нелинейной физикой) занимает всё более видное место, и такова, трудно сомневаться в этом, тенденция развития физики в наши дни».

В литературе имеются несколько различных определений понятия хаоса. Мы исходим из следующего определения, что хаос определяется как некоторый случайный процесс, который наблюдается в динамических системах, не подверженных влиянию шумов или каких-либо случайных сил. Отметим главные свойства хаотической системы [1]:

– непредсказуемость (экспоненциальная неустойчивость),

– неразложимость (транзистивность),

– элемент нерегулярности (плотность циклов).

Теорию хаоса обычно рассматривают как часть теории динамических систем.

Для динамической системы указывают набор динамических переменных, которые описывают состояние системы во времени до и после использования начального состояния, а так же подчиняющиеся некоторому правилу, задающимся оператором эволюции:

$$\frac{dx_1}{dt} = F_1(x_1, \dots, x_N, \mu),$$

$$\frac{dx_2}{dt} = F_2(x_1, \dots, x_N, \mu),$$

$$\frac{dx_N}{dt} = F_N(x_1, \dots, x_N, \mu),$$

здесь величины $x_1, x_2, \dots, x_N$ – переменные системы, μ – вектор управляющих параметров, $F_1, F_2, \dots, F_N$ – некоторые функции. Если рассматривать величины $x_1, x_2, \dots, x_N$ как координаты точки х в N-мерном пространстве, то получается наглядное геометрическое представление состояния в виде этой точки. Эта точка называется изображающей или фазовой точкой, величины $x_1, x_2, \dots, x_N$ – фазовыми координатами точки или фазовыми переменными системы, а пространство состояний – фазовым пространством системы. Изменению состояния системы во времени отвечает движение фазовой точки вдоль некоторой линии, называемой фазовой траекторией. $F_1, F_2, \dots, F_N$ определяют скорость движения изображающей точки в N-мерном фазовом пространстве.

Динамические системы классифицируются как консервативные и диссипативные. Консервативной система будет, если энергия ее постоянна. Диссипативная система проявляется рассеиванием энергии под воздействием внешних условий. Основным свойством диссипативных систем является сжатие фазового объема. Это означает, что с течением времени, исходя из динамических уравнений, исходный объем уменьшается. Выражается оно в виде неравенства $div\ v<0$.

Важное отличие диссипативной системы от консервативной является то, что в фазовом пространстве первыми возникают притягивающие множества, не проявляющихся в консервативной. При $t\to\infty$ все фазовые траектории будут сходиться к некоторому подмножеству нулевого объема, которое называется аттрактором динамической системы. Простые примеры аттракторов – устойчивое состояние равновесия (точка) и устойчивый предельный цикл (замкнутая фазовая траектория, к которой стремятся с течением времени все близкие траектории). Предельный цикл соответствует режиму периодических колебаний. На рисунке 1 приведён такой вид аттрактора.

Движение на предельном цикле отражает сложный процесс энергетических изменений во времени, происходящий в системе. Если внешним возмущением сместить траекторию на фазовой плоскости внутрь предельного цикла, то вносимая энергия будет в среднем превосходить рассеиваемую. Среднее значение дивергенции здесь окажется положительным. Вне предельного цикла дивергенция отрицательна, что ведет к стремлению фазовых траекторий к предельному циклу извне.

Обычно считается, что динамическая система обладает странным аттрактором, если в ее фазовом пространстве имеется предельное множество, состоящее из хаотических траекторий. Странные аттракторы – это сложно устроенные фрактальные множества, притягивающие к себе все траектории из некоторой прилегающей области [8]. На рисунке 2 пример странного аттрактора системы с хаотической динамикой.

Методические аспекты формирования у студентов представлений о динамическом хаосе

Изучение явления динамического хаоса можно проводить в четыре этапа. Ниже приведены этапы изучения явления в рамках 15-недельного курса объёмом в 3 кредита с лекциями и лабораторными работами. Данная дисциплина предназначена для студентов бакалавриата 3 курса специальности 5D071900-«Радиотехника, электроника и телеокммуникации» в Казахском национальном университете им. аль-Фараби.

1 этап. Динамические системы и хаос

На данном этапе, продолжительностью 3 недели, преподаватель знакомит студентов с историей, этапами развития концепции динамического хаоса и его роли в современной науке, основными понятиями теории динамических систем и хаоса, проводит классификацию динамических систем. Также даются общие сведения о методах, подходах и математическом аппарате, применяемые для изучения детерминированного хаоса.

2 этап. Одно- и многомерные отображения

Здесь идёт рассмотрение хаоса в простых моделях динамических систем, описываемых рекуррентными отображениями [9]. Это одномерные отображения: «зуб пилы», «тент» и логистическое. Двумерные отображения: простое и обобщенное отображения «baker's map», «кот Арнольда». Данные системы являются искусственно созданными.

Изучаются бифуркационные явления на основе логистического отображения.

Далее идёт рассмотрение и изучение одного из основных понятий диссипативных динамических систем – аттракторов. Показывается, что четырём состояниям динамической системы: равновесия, периодического, квазипериодического и хаотического движения соответствуют аттракторы в виде устойчивого равновесия, предельного цикла, квазипериодического аттрактора и странного аттрактора.

Для данного этапа отводится 4 недели.

3 этап. Радиотехнические генераторы хаотических сигналов

Известно множество типов динамических систем, которые выдают хаотические сигналы. Изучение генераторов хаотических колебаний начинается с классической модели Лоренца. Хотя данная модель изначально была создана для описания задачи о конвекции в подогреваемом снизу слое жидкости, она хорошо применима и к другим системам, например, к диссипативному осциллятору с инерционным возбуждением. Подробно аналитически и численно изучаются вывод уравнений Лоренца и динамика системы.

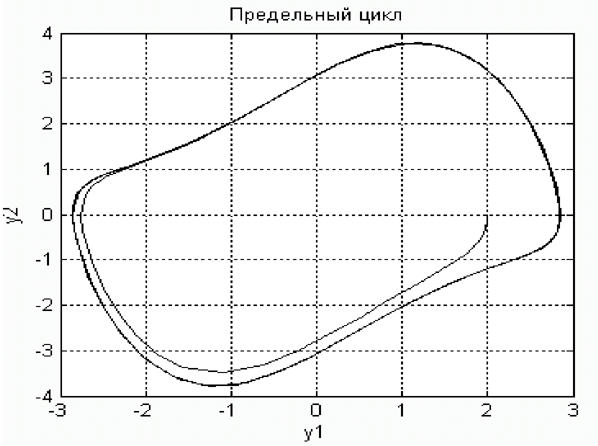

Рисунок 1 – Предельный цикл, возникающий в классическом нелинейном осцилляторе Ван-дер-Поля

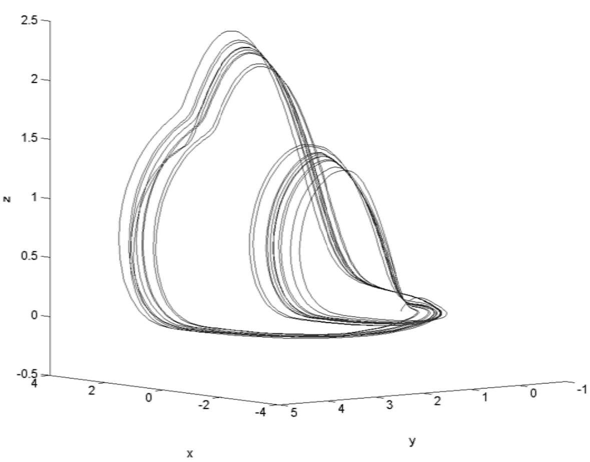

Рисунок 2 – Странный аттрактор хаотической системы

Следующие лекции в курсе посвящены моделям реальных физических систем. Рассматриваются отображения Хенона, Икеды, Заславского.

Далее рассматриваются наиболее известные генераторы хаотических колебаний:

1. Система Ван-дер-Поля – это «эталонная» модель теории колебаний и нелинейной динамики, которая описывает автоколебания и простейший вариант бифуркации Андронова-Хопфа.

2. Генератор Кияшко-Пиковского-Рабиновича – первая электронная схема, в которой целенаправленно был реализован режим хаотических колебаний.

3. Цепь Чуа – известная простая электронная схема, демонстрирующая целый ряд бифуркационных явлений и аттракторов.

4. Генератор Анищенко-Астахова – в схеме генератора имеется нелинейный усилитель для генерации хаотического сигнала.

5. Генератор Кислова-Дмитриева – физическая схема этого генератора представляет собой замкнутую систему в виде кольца, которая содержит нелинейный усилитель, RLC-фильтр, инерционный элемент.

Для каждого генератора рассматривается электронная схема и изучается динамика системы с помощью математической модели, описываемой системой дифференциальных уравнений; численными методами на компьютере находятся режимы динамического хаоса, т.е. строятся временные реализации сигналов, фазовый портрет, аттракторы.

3-й этап занимает 6 недель.

4 этап. Математические методы анализа динамического хаоса

Изучение методов анализа динамического хаоса начинается с рассмотрения сценариев перехода к хаосу, затем вводятся понятия перемежаемости, сечения Пуанкаре, и, наконец, показатели Ляпунова. На данный этап отведено 2 недели.

Каждый этап лекционных занятий сопровождается лабораторным компьютерным практикумом [9]. Студенты проводят исследование в рамках изложенной темы и представляют результаты. При проведении компьютерного эксперимента используются методы и модели динамического программирования, метод визуализации данных, анализ.

Все лабораторные работы проводятся в компьютерном классе. Для моделирования используется система MatLab.

В качестве примера рассмотрим одну из таких лабораторных работ и опишем результаты, которые должны получить сами студенты.

Компьютерная лабораторная работа.

Бифуркационный анализ режимов работы непрерывных источников хаотических колебаний

Цель. Изучение предхаотических или послехаотических изменений динамической системы при вариации её параметров с помощью бифуркационных диаграмм.

Краткое теоретическое введение

Реакция динамической системы на малое возмущение определяется её состоянием, и в одних случаях возмущающие факторы влияют на режим функционирования системы незначительно, в других – приводят к резкому отличию характера возмущенного движения по сравнению с исходным. В первом случае состояние системы устойчиво, во втором – нет.

Большинство физических задач при их математическом описании приводит к дифференциальным уравнениям, зависящим от параметров. Изменение параметра может вызвать потерю устойчивости одним режимом движения и переход системы в другое состояние. Это явление называется бифуркацией, а значение параметра, при котором оно происходит, – точкой бифуркации. Особо интересны такие бифуркации, в результате которых при прохождении точки бифуркации в системе возникают новые устойчивые режимы движения.

Математической основой элементарной теории бифуркаций является теория устойчивости. С помощью теорий устойчивости и бифуркаций становится возможным рассмотрение задачи о разбиении фазового пространства динамической системы на типичные траектории, анализ структуры этого разбиения, выявление областей в пространстве параметров с характерными типами предельных множеств. Практически это дает возможность построения бифуркационных диаграмм, поясняющих механизмы перестроек режимов движения в фазовом пространстве динамической системы при вариации ее параметров.

Вопрос об устойчивости и бифуркациях периодических траекторий может быть рассмотрен как непосредственно в отношении дифференциальных уравнении, когда частному решению отвечает предельный цикл, так и путем анализа устойчивости неподвижных точек соответствующего отображения Пуанкаре.

1. Бифуркация логистического отображения

Наиболее наглядным и удобным для численного исследования является метод анализа отображения. Рассмотрим логистическое уравнение – задачу, описывающую модель роста популяции, или

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n),\ n = 1,2,...,N, \qquad (1)$$

где x_n – реализация физической величины, r – управляющий параметр. Реализация данного уравнения приведена на рисунке 3 (порядок нумерации рисунков изменена в соответствии с данной статьей). Бифуркационная диаграмма логистического отображения приведена на рисунке 4.

2. Бифуркация в системе с инерционностью

Опишем систему, демонстрирующую возникновение хаоса в результате последовательного увеличения периода колебаний по закону натурального ряда.

Система с инерционностью описывается следующей системой уравнений:

$$\dot{X} = Y + (m_1 - m_2)X - XZ, X \le q,$$
$$\dot{X} = Y - m_2 X - qZ, X > q, \qquad (2)$$
$$\dot{Y} = -X,$$
$$\dot{Z} = -gZ + gF(X)X^2,$$

где F(X) – функция Хевисайда; m_1, m_2, q, g – параметры возбуждения, диссипации, ограни-чения и инерционности, соответственно. Эту систему отличает от ГИН Анищенко-Астахова форма динамической характеристики нелинейного усилителя, которая имеет линейный участок при X ≤ q и участок с насыщением при X > q. Четвертое уравнение описывает инерционный однополупериодный инерционный преобразователь. Таким образом, динамика системы определяется двумя механизмами ограничения колебаний. Первый механизм – безынерционный и связан с нелинейностью характеристики усилительного элемента. Второй – инерционный, обусловлен влиянием напряжения с выхода инерционного преобразования на крутизну нелинейного усилителя.

На рисунке 5 фрагмент бифуркационной диаграммы (рис. 7) изменения максимальных значений [X] колебательного процесса X(t) при изменении параметра g.

Задания

1. Напишите программы для реализации логистического отображения и его бифуркационной диаграммы. Из диаграммы определите, при каких значениях управляющего параметра наблюдается режим удвоения периода. Определите значения r, при которых наблюдаются траектории с периодом 1 и 3.

2. Напишите программы и постройте зависимости динамической переменной от времени. Подберите такие параметры системы, при которых возможны колебательные режимы. Постройте бифуркационную диаграмму изменения максимальных значений колебательного процесса в зависимости от параметра инерционности g, такую, как представлена на рис. 5. Увеличив участок бифуркационной диаграммы, найдите значение бифуркационной точки.

Анализ результатов лабораторной работы

Здесь коротко приведём те основные результаты, которые должны получить студенты в ходе выполнения данной работы.

Ниже представлена программа в MatLab, результатом которой является рисунок 3.

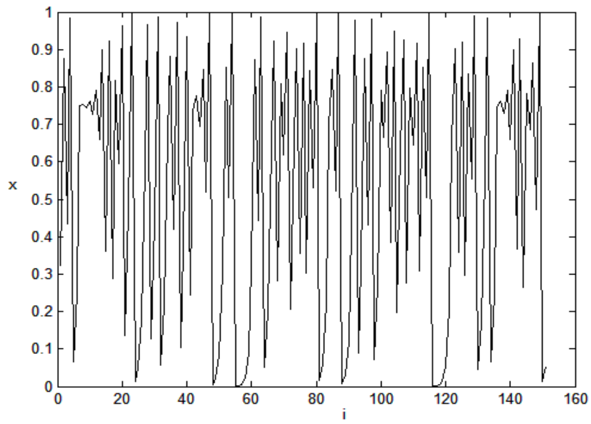

Рисунок 3 – Реализация логистического уравнения

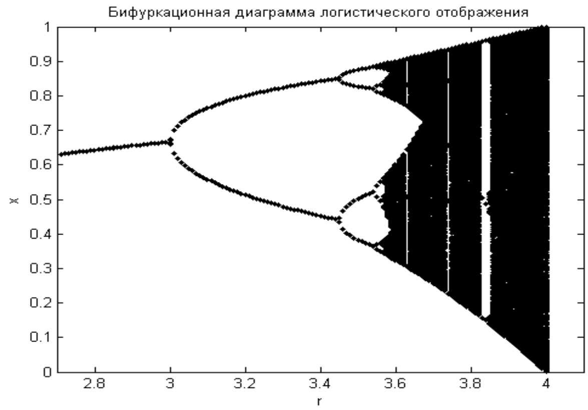

Рисунок 4 – Бифуркационная диаграмма логистического отображения

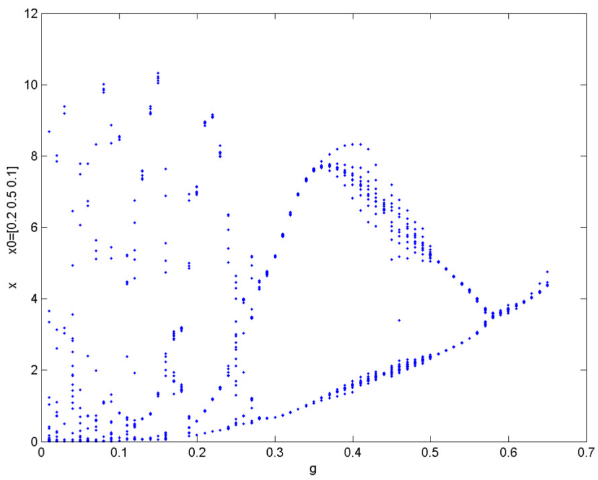

Рисунок 5 – Бифуркационная диаграмма системы (2)

% *Листинг файл-программы для построения реализации логистического уравнения clear;*

```
N=1000;
M=850;
r=4;
h=0.01;
x(1)=0.1;
for i = 1:N-1
    x(i+1)=r.*x(i).*(1-x(i));
end
j=M:N;
plot(x(j))
```

Аналитический анализ уравнения (1) приводит к следующему выводу. При r > 1 имеются две точки равновесия (т.е. x = rx(1–x)). Для выяснения устойчивости отображения xn+1 = f (xn) следует вычислить величину наклона |f'(x)| в точке покоя. Если |f'(x)| > 1, точка покоя неустойчива. При 1 < r < 3 логистическое уравнение имеет две точки покоя: x=0, (r–1)/r; при этом начало координат – неустойчивая точка, а вторая точка покоя устойчива. Однако при r = 3 наклон при x = (r–1)/r превышает единицу (f '= 2– r) и обе точки равновесия становятся неустойчивыми. При значениях параметра r, заключенных между 3 и 4, это простое разностное уравнение описывает множество многопериодических и хаотических движений. При r = 3 становится неустойчивым стационарное решение, но остается устойчивым бицикл или двупериодическая орбита. При дальнейшем увеличении r двупериодическая орбита становится неустойчивой и возникает цикл с периодом 4, который вследствие бифуркации быстро заменяется циклом с периодом 8 при ещё больших значениях r. Этот процесс удвоения периода продолжается до тех пор, пока r не достигает значения r = 3,56994…

Графический анализ бифуркационной диаграммы приводит студентов к следующему. Студенты находят точки бифуркаций удвоений периода. Наблюдается при значениях ниже r = 3,57. Участок, где каждая ветвь дерева расщепляется на две. Начав с r < 3, могут увидеть траекторию с периодом 1. Чтобы увидеть более длинные траектории, студенты отмечают первые 30 – 50 итераций точками, а последующие итерации – другим символом. Хаотические траектории можно обнаружить при 3,57 < r < 4,0. В окрестности r = 3,83 можно обнаружить траекторию с периодом 3.

При анализе системы (2) студенты приходят к следующим результатам. Развитие колебательно процесса происходит при параметрах m_1 = 1.6, m_2 = 0.1, q = 0.05. Малое изменение значений [X] на бифуркационной диаграмме соответствует регулярной динамике системы, случайный разброс точек – хаотической динамике. В интервале g $\in$ [0.57; 0.65] динамика системы характеризуется устойчивым предельным циклом. Интервал g $\in$ [0.56; 0.57] соответствует хаотическим колебаниям. Это можно увидеть из рисунка 6.

Точка g = 0.56 является бифуркационной точкой. При каждой бифуркации расстояния между критическими значениями изменяемого параметра уменьшаются, зоны хаотических колебаний располагаются плотнее.

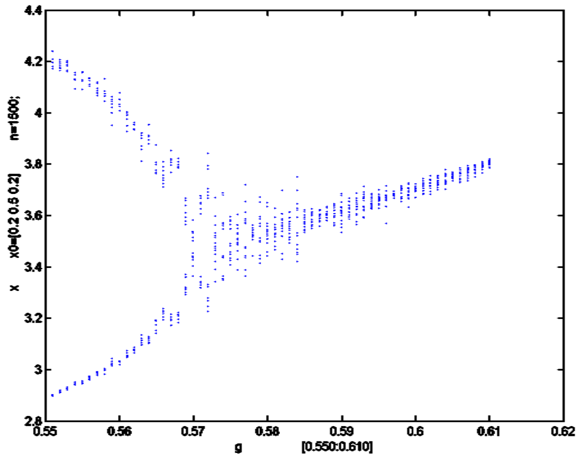

Рисунок 6 – Увеличенный участок бифуркационной диаграммы

Заключение

Лекционный материал и компьютерные лабораторные работы каждый год непрерывно совершенствуются и обновляются. На наш взгляд, предлагаемая методика позволяет добиться лучшего формирования у студентов знаний о динамическом хаосе, сформировать требуемые умения и навыки в научном познании современной физики.

References

1 Loskutov A.Yu. Ocharovaniye khaosa // UFN. – 2010. – T.180. – N.12. – S. 1305-1308.

2 Andreyev Yu.V., Dmitriev A.S., Efremova E.V., Khilinsky A.D., Kuzmin L.V. Qualitative theory of dynamical systems, chaos and contemporary communications // Int. J. Bifurcation and Chaos. – 2005. – Vol. 15, No. 11. – P.3639-3651.

3 Motter A.E., Campbell D.K. Chaos at Fifty // Physics Today. – 2013. – Vol. 66(5). – P. 27-33.

4 Doebeli M., Ispolatov I. Chaos and unpredictability in evolution // Evolution. – 2014. – Vol. 68, No. 5. – P.1365–1373.

5 Mukhin P.P. Yavlyayetsya li mekhanika N'yutona zavershennoy? Teoriya Kolmogorova-Arnol'da-Mozera // Istoriya nauki i tekhniki. – 2010. – № 4. – S. 46-56.

6 Ginzburg V.L. O perspektivakh razvitiya fiziki i astrofiziki v kontse XX veka. / V kn.: /Fizika KHKH veka. Razvitiye i perspektivy. – M.: Nauka, 1984. – S. 288-289.

7 Zhanabayev Z.ZH. Lektsii po nelineynoy fizike: ucheb.posob. – Almaty: Kazakh un-ti, 1997. – 71 s.

8 Kuznetsov S.P. Dinamicheskiy khaos. – M.: Fizmatlit, 2001. – 295 c.

9 Zhanabayev Z.ZH., Imanbayeva A.K., Almasbekov N.Ye. Komp'yuternoye modelirovaniye v radiofizike i elektronike. Uchebnoye posobiye. – Almaty: Kazakh un-ti, 2005. – 144 s.