

Давлетов А.Е., Ерімбетова А.Т.,
Кисан А., Мухаметкаримов Е.С.

**О модификации метода
ограниченного орбитального
движения для учета
поляризационных эффектов в
процессе зарядки пылевых
частиц в плазме**

Известно, что метод ограниченного орбитального движения в применении к пылевой плазме предполагает, что частицы плазменной среды, а именно электроны и ионы, поглощаются пылинками независимо. В классическом варианте метода ограниченного орбитального движения также считается, что взаимодействие заряженных частиц плазмы с пылинкой является чисто кулоновским, а это означает полное пренебрежение эффектами экранировки поля. Подобное рассмотрение становится возможным, если размер пылевых частиц много меньше характерного радиуса экранирования, который в свою очередь много меньше длин свободного пробега электронов и ионов в плазме. В этом случае только использование законов сохранения энергии и момента импульса позволяет рассчитать сечения поглощения электронов и ионов пылевой частицей. В данной работе предпринята попытка учесть эффекты поляризации самой пылинки при ее взаимодействии с частицами плазмы, и показано, что знание законов сохранения энергии и момента импульса уже недостаточно. Продемонстрировано, что сечение поглощения электронов и ионов плазмы пылинкой определяется условием равенства кинетической энергии налетающих частиц и максимума эффективной потенциальной энергии их взаимодействия.

Ключевые слова: пылевая плазма, метод ограниченного орбитального движения.

Davletov A.Ye., Erimbetova L.T.,
Kisan A., Mukhametkarimov E.S.

**On modification of the orbital
motion limited method for treating
polarization effects in the process
of dust particle charging in plasmas**

It is known that the orbital motion limited method, being applied to dusty plasma, suggests that the particles of the plasma medium, namely electrons and ions, are independently absorbed by a dust grain. It is also assumed in the classic version of the orbital motion limited method that the interaction of the charged plasma particles with the dust is purely Coulomb, which means complete disregard of field screening phenomena. Such assumptions are only valid if the size of the dust particle is much smaller than the characteristic screening radius, which in turn is much less than the mean free paths of the electrons and ions in the plasma. In this case, application of the conservation laws of energy and angular momentum is enough to calculate the absorption cross section of electrons and ions by the dust particle. Herein an attempt is made to take into account the polarization of the dust particle itself in its interaction with the plasma particles, and it is shown that the knowledge of the conservation laws of energy and angular momentum turns insufficient. It is demonstrated that the absorption cross sections of electrons and ions of the plasma are determined by the condition that the kinetic energy of the incoming plasma particle should be equal to the maximum of the effective potential energy of their interaction with the dust grain.

Key words: dusty plasma, the orbital motion limited method.

Давлетов А.Е., Ерімбетова А.Т.,
Қисан А., Мухаметкаримов Е.С.

**Плазмадағы тозақ бөлшектердің
зарядталу процессі кезіндегі
поляризациялық эффектілерді
ескеретін шектелген орбиталдық
қозғалыс әдісінің
модификациясы**

Шектелген орбиталдық қозғалыс әдісін тозаңды плазмаға қатысты айтқанда, плазма электрондары мен иондары тозаңды бөлшектерде тәуелсіз жұтылатынын сипаттайтыны белгілі. Шектелген орбиталдық қозғалыс әдісінің классикалық қарастыруында тозаңды бөлшек және плазмадағы зарядталған бөлшектердің арасындағы әсерлесу таза Кулондық деп қарастырылады. Оның өзі өрістің экрандау эффектілерін әдісте ескерілмейтігін көрсетеді. Бұл жуықтауды, тозаңды бөлшектердің өлшемі экрандалу радиусынан кіші болған жағдайда қолдануға болады. Айтылған жағдайда энергия мен импульстің сақталу заңдарын пайдалана отырып, электрон және ионның тозаңды бөлшекте жұтылуының қимасын есептеуге болады. Жұмыста тозаңды бөлшектің, плазмадағы зарядталған бөлшектермен әсерлескендегі поляризациялық эффектілерді ескеру мүмкіндігі қарастырылып, энергия мен импульстің сақталу заңдарын ғана білу бұл жағдайда жеткіліксіз екендігі көрсетіледі. Плазмадағы электрон және ионның тозаңды бөлшекте жұтылу қимасы, олардың арасындағы әсерлесуінің эффективті потенциалды энергиясының максимумының шамасы ұшып келген бөлшектердің кинетикалық энергиясына тең болу шартымен анықталатыны көрсетілген.

Түйін сөздер: тозаңды плазма, шектелген орбиталдық қозғалыс әдісі.

**О МОДИФИКАЦИИ
МЕТОДА
ОГРАНИЧЕННОГО
ОРБИТАЛЬНОГО
ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ УЧЕТА
ПОЛЯРИЗАЦИОННЫХ
ЭФФЕКТОВ
В ПРОЦЕССЕ ЗАРЯДКИ
ПЫЛЕВЫХ ЧАСТИЦ
В ПЛАЗМЕ**

Введение

Вполне очевидно, что для понимания всех физических свойств пылевой плазмы необходимо уметь определять заряд пылинок, которые представляют собой макроскопические частицы, помещенные в обычную плазменную среду. Для этого необходимо изучить процесс зарядки пылевых частиц, обусловленный потоками электронов и ионов на ее поверхность. С этой целью широко применяется метод ограниченного орбитального движения, который был впервые предложен еще Ленгмюром и Моттом [1]. Гораздо позже Альперт и др. [2] и Лафрамбуа [3] дали современную формулировку метода, который позволяет предсказать заряд пылевых частиц разного размера [4-6], несмотря на упрощающее предположение об отсутствии столкновений между частицами плазмы.

В стандартной модели метода ограниченного орбитального движения взаимодействие электронов и ионов с пылевой частицей описывается либо потенциалом Кулона, либо экранированным потенциалом типа Дебая-Хюккеля. В данной работе впервые учитываются эффекты поляризации пылевой частицы, которые приводят к дополнительному притяжению плазменных частиц пылинками.

Параметры плазмы

В работе рассматривается буферная плазма с концентрацией электронов n_e и протонов $n_p = n_e = n$, в которую помещена одна сферическая частица радиуса R , электрический заряд которой равен $-Z_d e$. Так как пылевая частица является уединенной, то она не влияет на нейтральность буферной плазмы, что приводит к выполнению условия $n_e = n_p = n$.

Состояние электронной компоненты буферной плазмы описывается параметром плотности:

$$r_s = \frac{a}{a_B}, \quad (1)$$

где $a = (3/4\pi n)^{1/3}$ – среднее расстояние между частицами, $a_B = \hbar^2 / m_e e^2$ – первый борковский радиус, \hbar – постоянная Планка, e – элементарный заряд.

Другой безразмерный параметр, описывающий состояние буферной плазмы, называется параметром неидеальности и определяется выражением:

$$\Gamma = \frac{e^2}{a k_B T}, \quad (2)$$

где k_B – постоянная Больцмана, T – температура среды. Следует отметить, что параметр неидеальности (2) является общепринятым и представляет собой отношение средней кулоновской энергии взаимодействия электронов к их средней энергии хаотического теплового движения.

Для учета конечности размера пылевых частиц введем параметр

$$D = \frac{a}{R}. \quad (3)$$

который показывает во сколько раз среднее расстояние между частицами буферной плазмы меньше радиуса пылевой частицы.

Отметим, что для определения заряда пылевых частиц в классическом случае достаточно знания лишь одного параметра

$$\Gamma_R = \frac{e^2}{R k_B T} = D\Gamma. \quad (4)$$

Движение в центрально-симметричном поле

Рассмотрим движение точечной частицы массой m в центральном силовом поле с потенциальной энергией $U(r)$. Известно, что движение происходит в плоскости, а выражение для функции Лагранжа в полярных координатах (r, φ) имеет вид

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - U(r). \quad (5)$$

Координата φ является циклической, то есть $\partial L / \partial \varphi = 0$, а соответствующее уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial L}{\partial \varphi}, \quad (6)$$

легко интегрируется и дает закон сохранения момента импульса M относительно рассеивающего центра

$$M = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi} = const. \quad (7)$$

Выразив $\dot{\varphi}$ из уравнения (7) и подставляя его в выражение для полной энергии, получаем

$$E = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + U(r) = \frac{m \dot{r}^2}{2} + U(r) + \frac{M^2}{2mr^2}. \quad (8)$$

Из (8) можно заключить, что движение в центральном силовом поле можно рассматривать как одномерное с эффективной потенциальной энергией

$$U^{eff}(r) = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2}. \quad (9)$$

Пусть частица в начальный момент времени движется на большом расстоянии от силового центра со скоростью v_0 и прицельным параметром ρ , тогда ее момент импульса равен

$$M = m v_0 \rho. \quad (10)$$

а так как полная энергия частицы равна $E = m v_0^2 / 2$, то выражение для эффективной энергии переписывается в виде

$$U^{eff}(r) = U(r) + E \frac{\rho^2}{r^2}. \quad (11)$$

Очевидно, что границы области движения по координате r определяются из уравнения

$$U^{eff}(r) = E. \quad (12)$$

Схематически процесс рассеяния на пылевой частице с указанием введенных параметров представлен на рисунке 1.

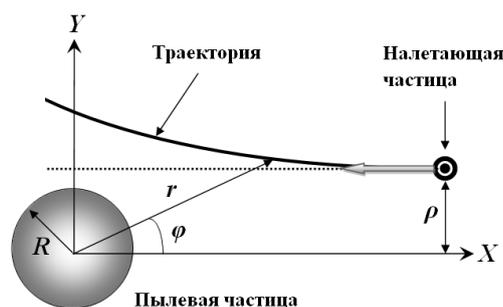


Рисунок 1 – Рассеяние в центрально-симметричном поле пылевой частицы

Поглощение протонов и электронов пылевой частицей

Для определения заряда пылевых частиц используется приближение ограниченного орбитального движения, которое широко применяется в теории зондов и позволяет, исходя из законов сохранения энергии и момента импульса, рассчитать сечения поглощения электронов и протонов пылевой частицей [7]. При этом считается, что электроны и протоны движутся в поле пылевой частицы независимо друг от друга и взаимодействуют с ней по закону Кулона, поэтому должны соблюдаться условия:

$$R \ll r_D \ll \ell_{e(p)}, \quad (13)$$

где $r_D = \sqrt{k_B T / 4\pi(n_e + n_p)e^2}$ – дебаевский радиус экранирования, а $\ell_{e(p)}$ – длины свободного пробега электронов и протонов соответственно. Первое неравенство в (13) позволяет пренебречь эффектами экранировки поля, а второе – считать движение частиц плазмы в поле пылинки независимыми друг от друга.

При выполнении условий (13) сечения поглощения электронов и протонов пылевой частицей известны и легко находятся в аналитическом виде. В данной работе учитываются эффекты поляризации пылевой частицы налетающими электронами и протонами в рамках метода электростатических изображений. Это приводит к существенной модификации схемы расчета заряда пылевой частицы методом ограниченного орбитального движения.

Рассмотрим взаимодействие протона со сферической пылевой частицей радиуса R и зарядом Z_d , которая сделана из проводящего вещества. Для учета эффектов поляризации пылевой частицы, определим потенциальную энергию

взаимодействия с помощью метода электростатических изображений, который дает (см. [8])

$$U_{dp}(r) = -\frac{Z_d e^2}{r} - \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}\right) \frac{e^2 R^3}{2r^2(r^2 - R^2)}, \quad (14)$$

тогда как потенциальная энергия взаимодействия электрона с пылевой частицей имеет вид

$$U_{de}(r) = \frac{Z_d e^2}{r} - \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}\right) \frac{e^2 R^3}{2r^2(r^2 - R^2)}. \quad (15)$$

Здесь ε – относительная диэлектрическая проницаемость вещества, из которого изготовлена пылинка. В дальнейшем для простоты будем предполагать, что пылинка является проводящей, а значит формально в выражениях (14) и (15) можно положить $\varepsilon = \infty$.

Рассмотрим процесс поглощения пылевой частицей протона с некоторой фиксированной энергией E и прицельным параметром ρ , который в данном случае определяется эффективной потенциальной энергией

$$U_{dp}^{eff}(r, \rho, E) = -\frac{Z_d e^2}{r} - \frac{e^2 R^3}{2r^2(r^2 - R^2)} + E \frac{\rho^2}{r^2}. \quad (16)$$

При прицельном параметре $\rho = 0$, эффективная потенциальная энергия взаимодействия протона с пылевой частицей является монотонно возрастающей функцией расстояния между ними, всюду отрицательна и стремится к $-\infty$ при приближении протона к поверхности пылевой частицы. Такие протоны, очевидно, поглощаются пылинкой. При фиксированной энергии и увеличении прицельного параметра на кривой эффективной потенциальной энергии появляется максимум, величина которого растет с увели-

чением ρ . При малых значениях прицельного параметра протоны будут поглощаться пылевой частицей, но при некотором значении ρ_{dp} величина максимума эффективной потенциальной энергии сравняется с полной энергией протона и произойдет его отражение от этого максимума. Очевидно, что это значение ρ_{dp} и определяет сечение поглощения, равное $\sigma_{dp} = \pi\rho_{dp}^2$. Это

продемонстрировано на рисунке 2, из которого видно, что протон с энергией $E/k_B T = 1$ и прицельными параметрами $\rho = 0$ и $\rho = 1$ поглощается пылевой частицей, а при прицельном параметре $\rho = 2$ – отражается. Значению $\rho \approx 1.6$ соответствует черная линия на рисунке 2, которая разделяет области поглощения и отражения протона с энергией $E/k_B T = 1$ пылевой частицей.

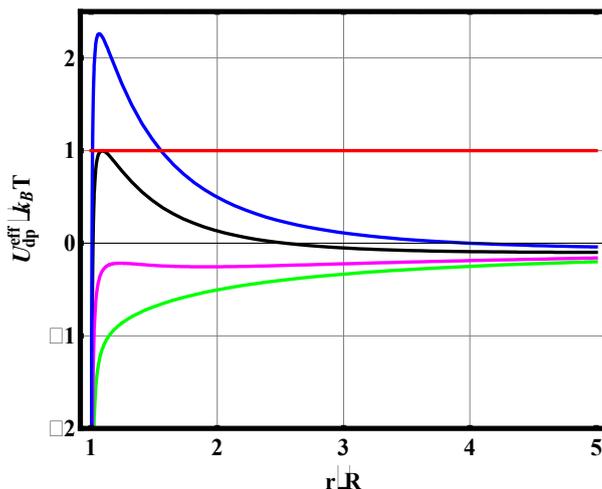


Рисунок 2 – Движение протона с полной энергией $E/k_B T = 1$ в центрально-симметричном поле пылевой частицы и разными значениями прицельного параметра при $\Gamma_R = 0.1$ и $Z_d = 10$. Зеленая линия: $\rho = 0$; пурпурная линия: $\rho = 1$; черная линия: $\rho \approx 1.6$ – соответствует критическому значению, при котором начинается отражение протона пылевой частицей; синяя линия: $\rho = 2$; красная линия: полная энергия частицы $E/k_B T = 1$

Таким образом, ρ_{dp} находится из следующего условия

$$\max U_{dp}^{eff}(r, \rho_{dp}, E)_{r \geq R} = E. \quad (17)$$

Численное решение уравнения (17) выглядит следующим образом. При фиксированном значении энергии E надо найти такое $\rho = \rho_{dp}$, чтобы максимум на кривой эффективной потенциальной энергии (16) в точности был равен полной энергии E .

На рисунках 3 и 4 показаны зависимости прицельного параметра ρ_{dp} от энергии налетающего протона при различных значениях заряда пылевых частиц и параметра связи плазмы Γ_R . Видно, что с увеличением заряда пылинки и

параметра связи буферной плазмы прицельный параметр ρ_{dp} для протонов возрастает.

Для взаимодействия электрона с пылевой частицей есть существенное отличие, которое состоит в том, что ввиду взаимного отталкивания поглощение возможно только при достижении критической энергии, определяемой выражением

$$E_c = \max U_{de}(r). \quad (18)$$

На рисунках 5 и 6 показана зависимость критической энергии от величины заряда пылевой частицы и параметра связи буферной плазмы. Обе зависимости являются практически линейными.

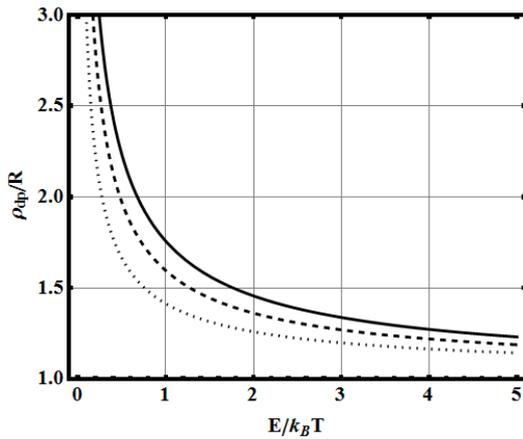


Рисунок 3 – Зависимость прицельного параметра ρ_{dp} от энергии налетающего протона при $\Gamma_R = 0.1$. Точечная линия: $Z_d = 5$; штриховая линия: $Z_d = 10$; сплошная линия: $Z_d = 15$

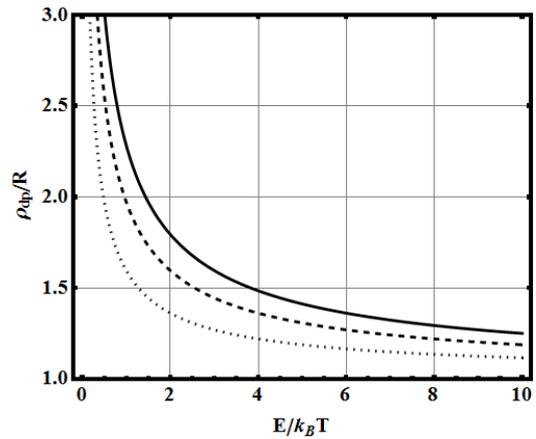


Рисунок 4 – Зависимость прицельного параметра ρ_{dp} от энергии налетающего протона при $Z_d = 10$. Точечная линия: $\Gamma_R = 0.1$; штриховая линия: $\Gamma_R = 0.2$; сплошная линия: $\Gamma_R = 0.3$

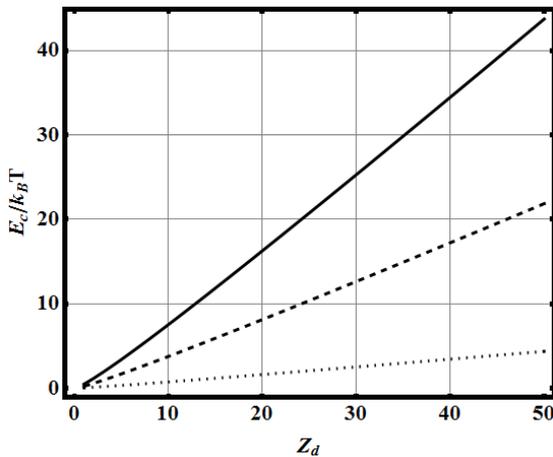


Рисунок 5 – Зависимость критической энергии электрона от заряда пылевой частицы. Точечная линия: $\Gamma_R = 0.1$; штриховая линия: $\Gamma_R = 0.5$; сплошная линия: $\Gamma_R = 1.0$

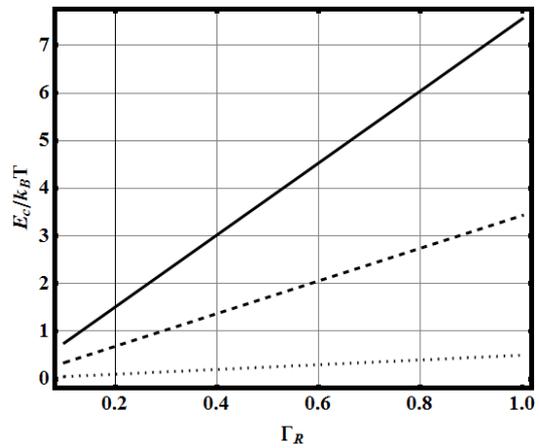


Рисунок 6 – Зависимость критической энергии электрона от параметра связи. Точечная линия: $Z_d = 1$; штриховая линия: $Z_d = 5$; сплошная линия: $Z_d = 10$

Рассмотрим процесс поглощения электрона с некоторой фиксированной энергией E и прицельным параметром ρ пылевой частицей, который в данном случае определяется эффективной потенциальной энергией

$$U_{dpe}^{eff}(r, \rho, E) = \frac{Z_d e^2}{r} - \frac{e^2 R^3}{2r^2(r^2 - R^2)} + E \frac{\rho^2}{r^2}. \quad (19)$$

При прицельном параметре $\rho = 0$ электроны поглощаются пылевой частицей, только если они имеют энергию выше критической, так как на кривой потенциальной энергии имеется максимум. При фиксированной энергии величина

максимума на кривой эффективной потенциальной энергии (19) растет с увеличением прицельного параметра ρ , а значит при некотором значении ρ_{de} произойдет отражении электрона от максимума. Это значение ρ_{de} и определяет сечение поглощения, равное $\sigma_{de} = \pi \rho_{de}^2$. Это продемонстрировано на рисунке 7, из которого видно, что электрон с энергией $E/k_B T = 5$ и прицельными параметрами $\rho = 0$ и $\rho = 0.5$ поглощается пылевой частицей, а при прицельном параметре $\rho = 1.4$ – отражается. Значению $\rho \approx 1$ соответствует черная линия на рисунке 7, которая разделяет области поглощения и отражения электрона пылевой частицей.

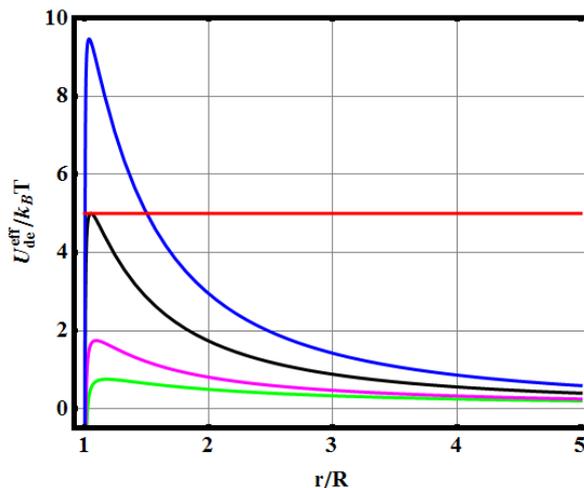


Рисунок 7 – Движение электрона с полной энергией $E/k_B T = 5$ в центрально-симметричном поле пылевой частицы и разными значениями прицельного параметра при $\Gamma_R = 0.1$ и $Z_d = 10$. Зеленая линия: $\rho = 0$; пурпурная линия: $\rho = 0.5$; черная линия: $\rho \approx 1$ – соответствует критическому значению, при котором начинается отражение электрона пылевой частицей; синяя линия: $\rho = 1.4$; красная линия: полная энергия частицы $E/k_B T = 5$

Таким образом, ρ_{de} находится из следующего условия

$$\max U_{de}^{eff}(r, \rho, E)_{r \geq R} = E. \quad (20)$$

Численное решение уравнения (20) выглядит следующим образом. При фиксированном значении энергии $E > E_c$ надо найти такое $\rho = \rho_{de}$, чтобы максимум на кривой эффективной

потенциальной энергии (19) в точности был равен полной энергии E .

На рисунках 8 и 9 показаны зависимости прицельного параметра ρ_{de} от энергии налетающего электрона при различных значениях заряда пылевых частиц и параметра связи плазмы Γ_R . Видно, что с увеличением заряда пылинки и уменьшения параметра связи буферной плазмы прицельный параметр ρ_{de} для электронов возрастает.

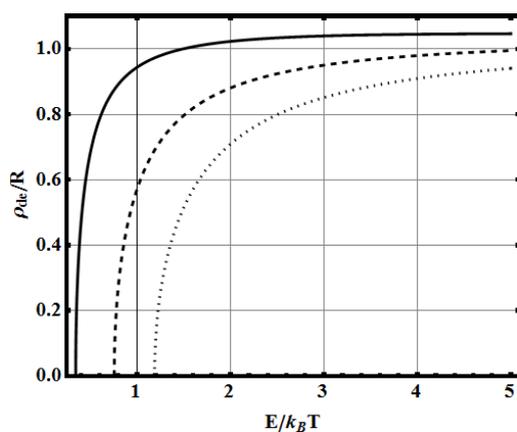


Рисунок 8 – Зависимость прицельного параметра ρ_{de} от энергии налетающего электрона при $\Gamma_R = 0.1$. Точечная линия: $Z_d = 5$; штриховая линия: $Z_d = 10$; сплошная линия: $Z_d = 15$

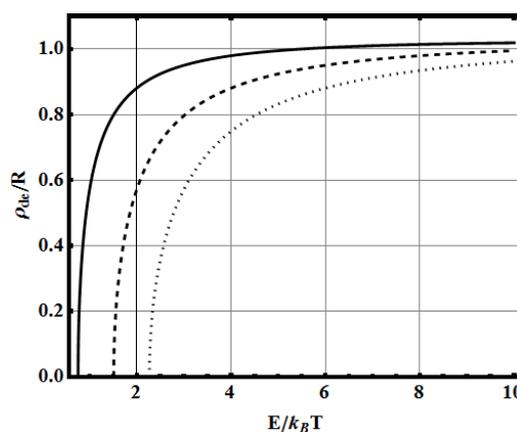


Рисунок 9 – Зависимость прицельного параметра ρ_{de} от энергии налетающего электрона при $Z_d = 10$. Точечная линия: $\Gamma_R = 0.3$; штриховая линия: $\Gamma_R = 0.2$; сплошная линия: $\Gamma_R = 0.1$

Заклучения и выводы

В данной работе исследовался процесс поглощения протонов и электронов плазмы помещенной в нее пылевой частицей. Для этого использовался метод ограниченного орбитального движения, который в простейшем случае основан на независимом рассмотрении движения плазменных частиц в электрическом поле пылинки. В данной работе, в отличие от проведенных ранее исследований, пылевая частица считается поляризуемой, что приводит к существенной модификации расчета.

Пылевая частица считается заряженной отрицательно, что приводит к отталкиванию электронов и притяжению протонов. В результате, поглощение пылевой частицей электронов возможно только при достижении ими некото-

рой критической энергии, которая зависит от заряда пылинки и параметра связи плазмы практически линейным образом. Установлено, что значения прицельных параметров, при которых происходит поглощение протонов и электронов пылевой частицей сильно зависят от ее заряда и параметра связи буферной плазмы. В частности, прицельный параметр поглощения протонов растет с увеличением заряда пылевой частицы и параметра связи плазмы, что объясняется их взаимным притяжением. Противоположная картина наблюдается для поглощения электронов, которые отталкиваются пылевой частицей.

Работа выполнена при финансовой поддержке МОН РК по программе грантового финансирования научных исследований, грант 3120/ГФ4.

Литература

- 1 Mott-Smith H.M., Langmuir I. The theory of collectors in gaseous discharges// Phys. Rev. – 1926. – Vol. 28. – P. 727.
- 2 Al’pert Ya.L., Gurevich A.V., Pitaevskii L.P., Space Physics with Artificial Satellites (Plenum Press, New York, 1965).
- 3 Laframboise J. Theory of Spherical and Cylindrical Langmuir Probes in a Collisionless, Maxwellian Plasma at Rest, Technical Report, Toronto University (Institute for Aerospace Studies, 1966)
- 4 Willis C.T.N., Coppins M., Bacharis M., Allen J. E. The effect of dust grain size on the floating potential of dust in a collisionless plasma// Plasma Sources Sci. Technol. – 2010. – Vol. 19. – P. 065022.
- 5 Delzanno G.L., Camporeale E., Moulton J.D., Borovsky J.E., MacDonald E.A., Thomsen M. CPIC: A Curvilinear Particle-in-Cell Code for Plasma–Material Interaction Studies// IEEE Trans. Plasma Sci. – 2013. – Vol. 41. – P. 3577.
- 6 Tang X.-Z., Delzanno G.L. Orbital-motion-limited theory of dust charging and plasma response// Phys. Plasmas – 2014. – Vol. 21. – P. 123708.
- 7 Фортвов В.Е., Храпак А.Г., Храпак С.А., Молотков В.И., Петров О.Ф. Пылевая плазма// УФН – 2004. – Том 174. – С. 495.
- 8 Саранин В.А. О взаимодействии двух электрически заряженных проводящих шаров// УФН – 1999. – Том 169. – С. 453.

References

- 1 Mott-Smith H.M., Langmuir I. The theory of collectors in gaseous discharges// Phys. Rev. – 1926. – Vol. 28. – P. 727.
- 2 Al’pert Ya.L., Gurevich A.V., Pitaevskii L.P., Space Physics with Artificial Satellites (Plenum Press, New York, 1965).
- 3 Laframboise J. Theory of Spherical and Cylindrical Langmuir Probes in a Collisionless, Maxwellian Plasma at Rest, Technical Report, Toronto University (Institute for Aerospace Studies, 1966)
- 4 Willis C.T.N., Coppins M., Bacharis M., Allen J. E. The effect of dust grain size on the floating potential of dust in a collisionless plasma// Plasma Sources Sci. Technol. – 2010. – Vol. 19. – P. 065022.
- 5 Delzanno G.L., Camporeale E., Moulton J.D., Borovsky J.E., MacDonald E.A., Thomsen M. CPIC: A Curvilinear Particle-in-Cell Code for Plasma–Material Interaction Studies// IEEE Trans. Plasma Sci. – 2013. – Vol. 41. – P. 3577.
- 6 Tang X.-Z., Delzanno G.L. Orbital-motion-limited theory of dust charging and plasma response// Phys. Plasmas – 2014. – Vol. 21. – P. 123708.
- 7 Fortov V.E., Hrapak A.G., Hrapak S.A., Molotkov V.I., Petrov O.F. Pylevaja plazma// UFN – 2004. – Tom 174. – S. 495.
- 8 Saranin V.A. O vzaimodejstvii dvuh jelektricheski zarjazhennyh provodjashhih sharov// UFN – 1999. – Tom 169. – S. 453.