

Молдабеков Ж.А.,  
Рамазанов Т.С., Габдулин А.Ж.

**Продольные колебания  
в системе заряженных частиц  
с дипольным моментом**

Moldabekov Zh.A.,  
Ramazanov T.S., Gabdulin A.Zh.

**Longitudinal oscillations in  
system of charged particles with  
dipole moment**

Молдабеков Ж.А.,  
Рамазанов Т.С., Габдулин А.Ж.

**Дипольдік моменті бар  
зарядталған бөлшектер  
жүйесінің бойлық тербелістері**

В данной работе мы исследуем влияние дополнительного слабого диполь-дипольного взаимодействия на колебания плотности в системе заряженных частиц, где потенциал взаимодействия имеет экранированный характер типа потенциала Юкава. В исследованиях мы использовали метод молекулярной динамики. Были построены автокорреляционные функции скоростей частиц (АКФ) для исследования динамических свойств системы. Не монотонный характер АКФ частиц указывает на присутствие колебаний плотности в системе. Частоту продольных колебаний можно определить при помощи Фурье образа АКФ, так как пик спектра АКФ при частотах ближе к плазменной частоте соответствует продольным колебаниям. Было найдено, что в двумерной Юкава жидкости частота продольных колебаний частиц становится чувствительным к изменениям параметра связи, если даже существует слабое дополнительное диполь-дипольное взаимодействие между частицами.

**Ключевые слова:** пылевая плазма, система Юкава, диполь-дипольное взаимодействие.

In this paper, we investigate the effect of an additional weak dipole-dipole interaction on the density oscillations of charged particles system where the interaction potential is screened Yukawa potential. In the studies, we used the method of molecular dynamics. We constructed autocorrelation function of the particle velocities (ACF) to study the dynamic properties of the system. In the same vein we studied the frequency of longitudinal vibrations with the help of Fourier transform of the autocorrelation function of the velocities. It was found that in two-dimensional Yukawa fluid frequency of longitudinal oscillations of the particles becomes sensitive with changing of coupling parameter, if even there is a little additional dipole-dipole interaction between the particles.

**Key words:** Dusty plasmas, Yukawa system, dipole-dipole interaction.

Бұл жұмыста бөлшектердің өзара әсерлесу потенциалы диполь-дипольдік әсерлесуді ескергендегі екі еселі Юкава жүйесінің бойлық тербелісі зерттелді. Айта кететін жайт, электрондардан, иондардан және нейтрал атомдардан тұратын тозаңды плазма, әдетте үш өлшемді. Бірақ, тозаңды бөлшектердің қозғалысы екі өлшемді. Зерттеу барысында молекулалық динамика әдісін қолдандық. Жүйенің динамикалық қасиеттерін зерттеу үшін, бөлшектер жылдамдықтарының авто корреляциялық функциялары (АКФ) салынды. Жылдамдықтарының авто корреляциялық функцияның (АКФ) монотонды емес сипаттамасы жүйедетербелістер бар екенін көрсетеді. Жылдамдықтардың автокорреляциялық функциясының Фурье түрінің көмегімен бойлық тербелістердің жиілігі зерттелінді. Өйткені плазмалық жиілікке жақын АКФ спектрінің шыңы бойлық тербелістің жиілігіне сәйкес келеді. Екі еселі Юкава сұйығының бойлық тербелістерінің жиілігі, бөлшектердің арасындағы монополь-монопольдік әсерлесуіне қарағанда, өзара әлсіз диполь-дипольдік әсерлесуінесезімтал екендігі анықталды.

**Түйін сөздер:** тозаңды плазма, Юкава жүйесі, диполь-дипольдік әсерлесу.

**ПРОДОЛЬНЫЕ  
КОЛЕБАНИЯ  
В СИСТЕМЕ  
ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ  
С ДИПОЛЬНЫМ  
МОМЕНТОМ**

**Введение**

Исследование двумерных систем с потенциалом взаимодействия Юкава важно из-за его отношение к физике плазмы, физики коллоидов и физики конденсированных сред [1-3]. В данной работе мы представляем исследование колебаний в двумерной Юкава жидкости, где потенциал взаимодействия между частицами учитывает диполь-дипольное взаимодействие. Потенциал взаимодействия выражен как [4,5]:

$$V(r) = \frac{Q^2}{r} \exp(-r / \lambda_s) + \frac{d^2}{r^3} (1 + r / \lambda_s) \exp(-r / \lambda_s), \quad (1)$$

где  $Q$  – заряд пылевой частицы,  $d$  – дипольный момент пылевой частицы,  $\lambda_s$  – длина экранирования.

Потенциал взаимодействия (1) было получено при помощи мультипольного разложения экранированного потенциала Юкава, принимающий во внимание ненулевой дипольный момент пылевой частицы. Это способно схож с хорошо знакомым мультипольным разложением Кулоновского потенциала. Мы рассматриваем дипольный момент всех частиц, как равны и параллельны между собой. В результате вклад заряд-дипольного взаимодействия на общий потенциал взаимодействия частиц равен нулю [6]. В пылевой плазме такое взаимодействие между частицами может возникнуть в результате создания составных частиц (заряженная пылинка + фокусированное ионное облако) в связи с индуцированным ионным потоком [7,8] (например, в экспериментах, где дополнительное внешнее постоянное поле прикладывается к ВЧ разряду [9]). Частица может также иметь дипольный момент, индуцированный во внешнем электрическом поле [10], или постоянный дипольный момент, выровненный вдоль внешнего электрического поля [11].

Для того чтобы охарактеризовать систему Юкавы мы используем следующие безразмерные параметры: (i) параметр связи заряд-заряда  $\Gamma = Q^2 / a k_B T$  (где  $a = (\pi n)^{-1/2}$  радиус Вигнера-Зейтцаи  $k_B T$  тепловая энергия), (ii) параметр связи диполь-диполь  $\Gamma = d^2 / a^3 k_B T$ , и (iii) параметр экранирования  $k_S = a / \lambda_s$ .

Рассматриваемый диапазон плазменных параметров:  $\Gamma = 40 - 160$ ,  $\Gamma_d = 0, 5, 10$ , и  $k_s = 1.0, 1.5, 2.0$ .

Относительно текущему эксперименту по пылевой плазме [12], мы рассмотрим случай, когда член взаимодействия заряд-заряд является доминирующим и диполь-дипольное взаимодействие приводит к возмущению основного состояния частиц, взаимодействующие потенциалом Юкава. Однако, в принципе, в противоположной ситуации может быть, что частица имеет большой дипольный момент и относительно малую величину заряда (например, из-за внешнего излучения). Предвидя будущие исследования таких систем, мы вводим параметр  $\xi = \Gamma_d / (\Gamma + \Gamma_d)$ , который характеризует какие взаимодействия, заряд-заряд или диполь-дипольное, является доминирующим. Случай  $\xi = 0$  соответствует чисто Юкава системе, а  $\xi = 1$  соответствует системе только с диполь-дипольным взаимодействием. В данной работе мы рассматриваем  $0 \leq \xi \leq 0.2$ .

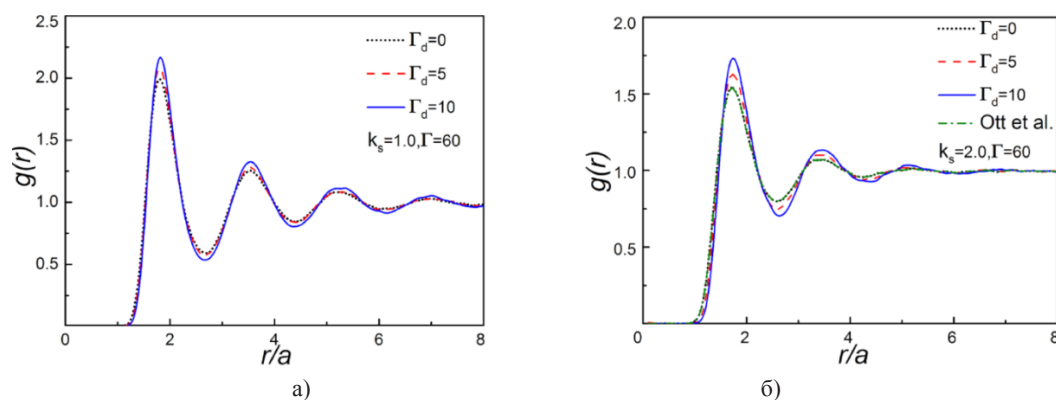
Частота продольных колебаний изучается с помощью Фурье преобразования автокорреляционной функции скоростей. Автокорреляционная функция скоростей (АКФ) рассчитывали стандартным образом методом молекулярной динамики (МД) [13-15]. Так как мы заинтересованы в точном определении позиции макси-

муму Фурье образа АКФ, мы применили весовую функцию Гаусса  $\exp(-t^2 / 2\sigma^2)$ , чтобы конечная длина временных рядов, которые преобразованы в Фурье, менее влияли на результаты. Полная длина времени АКФ  $\omega_p t = 100$  (на рисунках АКФ показано  $\omega_p t = 25$ ).

МД моделирование совершено для  $N = 1500$  частиц. Ниже, время приведено в единицах плазменной частоты  $\omega_p = (2\pi n Q^2 / ma)^{1/2}$  и расстояния в единицах радиуса Вигнера-Зейтца  $a$ .

## Результаты МД

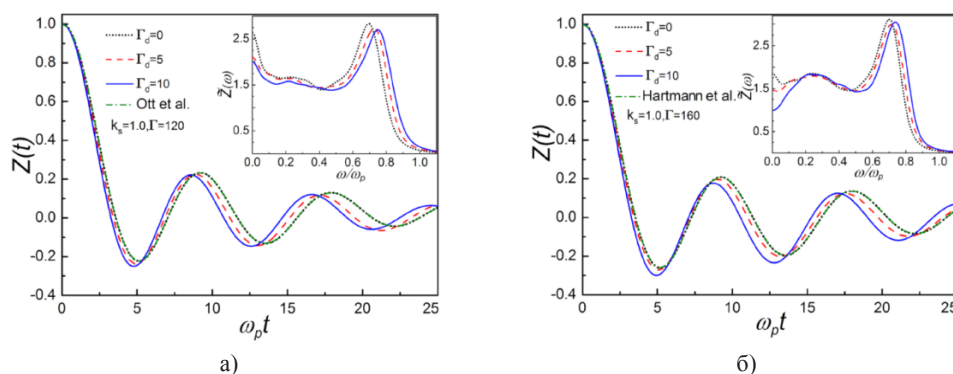
Структурные свойства рассматриваемой системы были изучены в [4]. Было найдено, что даже маленький вклад диполя может иметь значительный эффект на структурные свойства системы. Это проиллюстрировано на рисунке 1 а), б), где парная корреляционная функция ПКФ при одном и том же  $\Gamma = 60$ , но при различных  $k_s$ . При системе Юкава, то есть  $\Gamma_d = 0$ , ПКФ на рисунке 1 б) имеет согласие с результатами МД моделирования Отта и др. [16]. Увеличение параметра связи диполь-диполь от нуля до пяти вызывает видимое увеличение высот максимумов и глубин минимумов. Дальнейшее увеличение  $\Gamma_d$  до десяти приводит к усилению этого эффекта.



**Рисунок 1** – Парная корреляционная функция двумерной Юкава жидкости для различных значений параметра связи диполь-диполя  $\Gamma_d$  при  $\Gamma = 60$  и а)  $k_s = 1.0$ , б)  $k_s = 2.0$ . В Юкава системе,  $\Gamma_d = 0$ , ПКФ на рисунке 1 б) имеет согласие с результатами МД моделирования Отта и др. [16]

Рисунок 2 показывает значение АКФ  $Z(t)$ , для  $k_s = 1.0$ ,  $\Gamma = 120$  и  $\Gamma = 160$ . На рисунке 2 а) и б) при  $\Gamma_d = 0$  АКФ имеет согласие с результатами Отта и др. [16] и Хартманна и др. [17]. Вставленные графики показывают Фурье преобразование АКФ  $\tilde{Z}(\omega)$ . Отметим, что положение максимума

Фурье преобразование АКФ на рисунке 2 б) является таким же, как получено в [17]. Положение пика Фурье образа АКФ указывает частоту продольных колебаний, в то время как низкое затухание при уменьшении частоты относится к поперечным колебаниям [18].



**Рисунок 2** – Автокорреляционная функция скоростей двумерной Юкава жидкости для различных значений параметра связи диполь-диполя  $\Gamma_d$  при  $k_s = 1.0$  и а)  $\Gamma = 120$ , б)  $\Gamma = 160$ .

Вставленные графики показывают соответствующий Фурье образ.

На рисунке 2 а) и б) при  $\Gamma_d = 0$  АКФ имеет согласие с результатами Отта и др. [16] и Хартманна и др. [17]. Позиция максимумов Фурье образа АКФ при  $\Gamma_d = 0$  на рисунке 2 б) является таким же, как получено в [17].

Как видно из рисунка 2 дополнительное диполь-дипольное взаимодействие смещает частоту колебаний к более высоким значениям по отношению к системе Юкава. Колебания АКФ, соответственно, сместятся влево. Рисунок 3 и 4 показывают влияние диполь-дипольного взаимодействия на частоту колебаний частиц при различных значениях параметров  $\Gamma$  и  $k_s$ . На рисунках 3 а) и 4 а) показаны АКФ, а соответствующие Фурье образы представлены на рисунках 3 б) и 4 б).

Из рисунка 3 ясно видно, что увеличение параметра связи заряд-заряда при постоянном  $\Gamma_d$  снижает влияние диполь-дипольного взаимодействия, но даже при  $\Gamma = 120$  для  $\Gamma_d = 5$  ( $\xi = 0.04$ ) и  $\Gamma_d = 10$  ( $\xi = 0.077$ ) сдвиг частоты колебаний хорошо различимы. Интересно отметить, что позиция пика Фурье образа АКФ при заданном параметре связи диполь-диполь  $\Gamma_d$ , при увеличении параметра связи заряд-заряда, смещается в область низких частот.

Изменение частоты колебаний из-за увеличения параметра экранирования от одного до двух можно увидеть на рисунке 4. С увеличением параметра экранирования положение максимума Фурье образа АКФ смещается в область низких частот в системе Юкава ( $\Gamma_d = 0$ ) и в системе Юкава + дипольного взаимодействие ( $\Gamma_d \neq 0$ ).

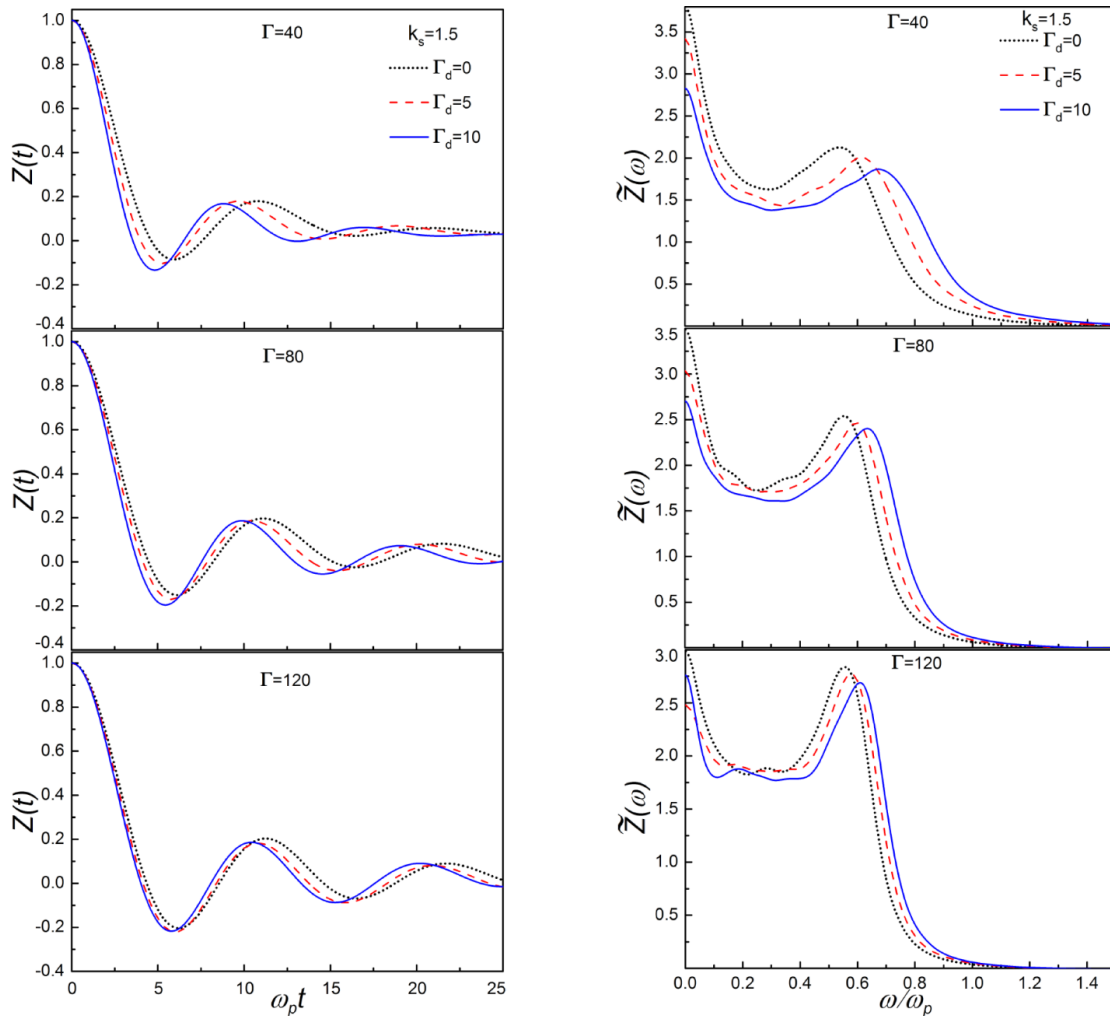
Таким образом, физическая интерпретация уменьшения частоты колебания с увеличением параметра экранирования является одинаковым для обоих случаев. Это обусловлено сочетанием между движением отдельной частицы и коллективных возмущений [17].

Рисунки 3 и 4 показывают, что в системе Юкава с дополнительным возмущением, вызванный диполь-дипольным взаимодействием между частицами, характерная частота колебаний частиц является чувствительным к изменениям параметра связи  $\Gamma$  и параметра экранирования  $k_s$ , тогда как в чисто Юкава системе это частота практически не зависит от  $\Gamma$  [17, 19]. Это продемонстрировано на рисунке 5 а), где  $\Gamma$  изменяется от 40 до 120 при  $\Gamma_d = 0$ , пока положения максимумов преобразования Фурье АКФ практически не меняется.

Рисунок 5 показывает зависимость позиций  $\omega'$  максимумов Фурье образов АКФ  $\tilde{Z}(\omega)$  от значения параметра связи диполь-диполь  $\Gamma_d$ , при постоянном  $\Gamma$ , где верхние оси указывают соответствующие значения параметра  $\xi(\Gamma, \Gamma_d) = \Gamma_d / (\Gamma + \Gamma_d)$ . Эта зависимость приблизительно линейна для  $\xi \ll 1$ . Тем не менее,  $\Gamma = 40$  с увеличением  $\Gamma_d$ , позиции максимумов  $\omega'$  резко возрастает при  $\Gamma_d > 6$  ( $\xi > 0.13$ ), после чего в диапазоне  $7 \leq \Gamma_d \leq 9$  ( $0.15 \leq \xi \leq 0.18$ ) насыщается перед дальнейшим увеличением на  $\Gamma_d > 9$  ( $\xi > 0.18$ ).

### Обсуждение и заключение

В экспериментах с пылевой плазмой, парная корреляционная и автокорреляционная функция скоростей могут быть точно получены при помощи видеозаписи [20, 21]. Как обсуждалось в [16], ПКФ и АКФ могут быть использованы для определения  $\Gamma$  и  $k_s$  независимо от дополнительных физических величин, такие как температура, масса, заряд или плотность.



а) б)

**Рисунок 3** – а) Автокорреляционная функция скоростей  $Z(t)$  и б) их Фурье образы  $\tilde{Z}(\omega)$  для различных  $\Gamma_d$  при  $k_s = 1,5$  и ряд значений  $\Gamma_d$

Эксперимент над пылевой плазмой в ВЧ разряде с дополнительным смещением постоянного тока является отличным кандидатом [9, 12] для исследования влияния дополнительного диполь-дипольного взаимодействия в двумерной системе Юкавы, так как дипольный момент пылинки можно регулировать путем регулирования постоянным внешним полем. Результаты МД, представленные в этой работе и в [4], по-видимому, показывают, что: *если при изменении газоразрядных параметров, сохраняя  $k_s$  постоянным, высота пика ПКФ и позиции максимумов Фурье образа АКФ увеличиваются одновременно, это может быть признаком на*

*дополнительное диполь-дипольное взаимодействие между частицами пыли (или составных частиц).* Полученное измеримое изменение ПКФ и АКФ с маленьким изменением параметра связи диполь-диполь стимулирует на будущие экспериментальные исследования диполь-дипольного взаимодействия в пылевой плазме. Тем не менее, там и определение частоты плазмы и параметр экранирования имеет неопределенность, и они могут маскировать эффект дополнительного дипольного взаимодействия. Однако, частота плазмы и параметр экранирования имеет неопределенность, и они могут маскировать эффект дополнительного дипольного взаимодействия.

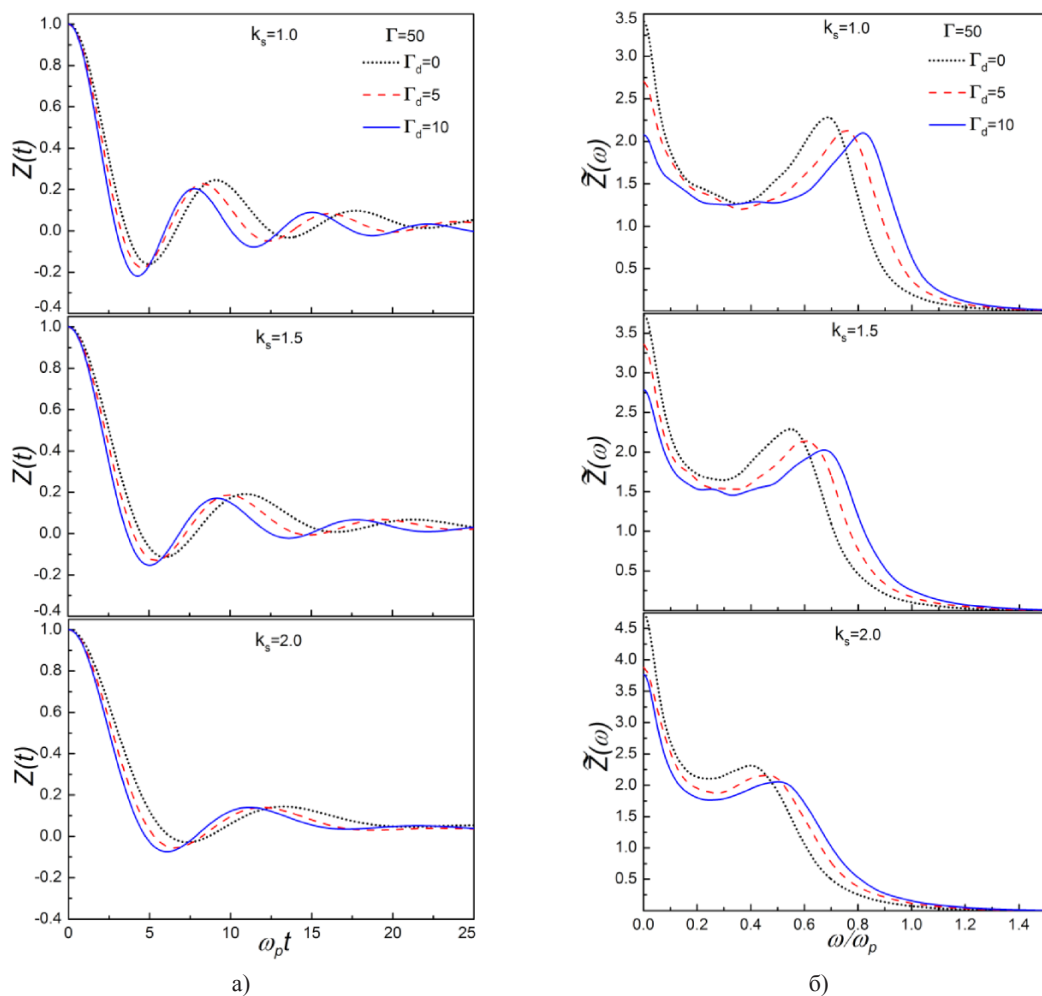


Рисунок 4 – а) Автокорреляционная функция скоростей  $Z(t)$  и б) их Фурье образы  $\tilde{Z}(\omega)$  для различных  $\Gamma_d$  при  $\Gamma = 50$  и ряд значений  $k_s$

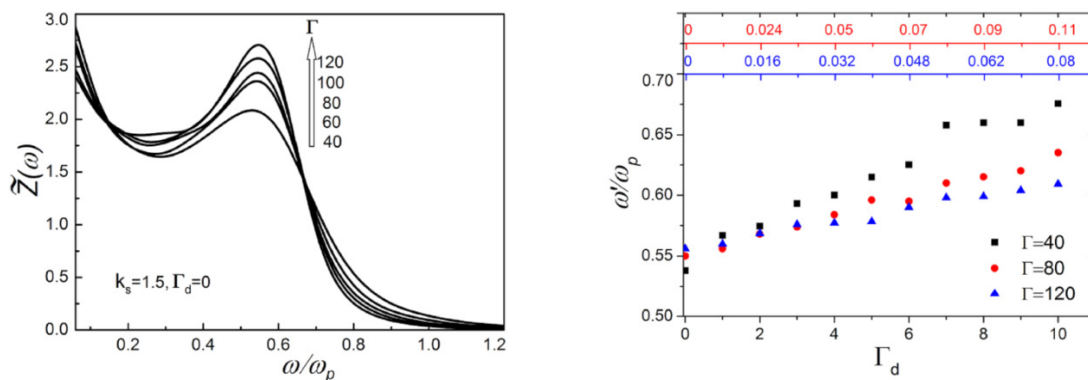


Рисунок 5 – а) Преобразования Фурье  $\tilde{Z}(\omega)$  автокорреляционных функций скоростей для различных значений  $\Gamma$  при  $k_s = 1,5$  ясно показывает почти независимость позиции максимумов от  $\Gamma$  в рассматриваемом диапазоне параметра. б) Позиции пиков Фурье образов АКФ  $\tilde{Z}(\omega)$  в зависимости от параметра связи диполь-диполь  $\Gamma_d$  при постоянной  $\Gamma$  (верхняя ось указывают соответствующее значение параметра  $\xi(\Gamma, \Gamma_d) = \Gamma_d / (\Gamma + \Gamma_d)$ ).



В двумерной Юкава жидкости с дополнительным диполь-дипольным взаимодействием наблюдалось нелинейное поведение колебания и ПКФ [4] при малых значениях  $\Gamma_d$ . Эти аспекты требуют дальнейшего изучения. В частности, продольные волны могут быть исследованы более детально, рассматривая спектры флуктуаций тока [3] и структурные свойства могут быть изучены путем рассмотрения угловой корреляционной функции в дополнение к ПКФ [22].

Как было сказано во введении, существуют системы с доминирующим взаимодействием Юкава ( $\xi \ll 1$ ) и системы с доминирующим диполь-дипольным взаимодействием ( $\xi \approx 1$ ). Поэтому интересно изучать динамические и статические свойства в промежуточных случаях,  $0 < \xi < 1$ , создавая мост между физикой сильно связанных кулоновских систем и физикой систем с дипольным взаимодействием [23].

### Литература

- 1 Nunomura S., Goree J., Hu S., Wang X., and Bhattacharjee A. Dispersion relations of longitudinal and transverse waves in two-dimensional screened Coulomb crystals // *Phys. Rev. E.* – 2002. – Vol. 65. – P. 066402.
- 2 Grimes C.C. and Adams G. Observation of Two-Dimensional Plasmons and Electron-Ripplon Scattering in a Sheet of Electrons on Liquid Helium // *Phys. Rev. Lett.* – 1976. – Vol. 36. – P. 145.
- 3 Donko Z., Hartmann P., Kalman G.J., and Rosenberg M. Static and dynamic properties of 2-dimensional strongly coupled Yukawa liquids // *Contrib. Plasma Phys.* – 2003. – Vol. 43. – P. 282.
- 4 Ramazanov T.S., Gabdulin A.Zh., and Moldabekov Zh.A. MD Simulation of Charged Dust Particles With Dipole Moments // *IEEE Trans. Plasma Sci.* – 2015. – Vol. 43, no. 12. – P. 4187.
- 5 Ramazanov T.S., Moldabekov A.Zh., and Gabdullin M.T. Multipole expansion and effective interaction potentials of plasma particles // to be published in *Phys. Rev. E.*
- 6 Kodanova S.K., Ramazanov T.S., Bastykova N.K., and Moldabekov Z.A. Effect of dust particle polarization on scattering processes in complex plasmas // *Phys. Plasmas.* – 2015. – Vol. 22, no. 6. – P. 063703.
- 7 Sukhinin G.I. and Fedoseev A.V. Formation of a trapped-ion cloud around a dust particle in low-density plasma // *IEEE Trans. Plasma Sci.* – 2010. – Vol. 38, no. 9. – P. 2345–2352.
- 8 Lisin E.A., Lisina I.I., Vaulina O.S., and Petrov O.F. Solution of the inverse Langevin problem for open dissipative systems with anisotropic interparticle interaction // *Phys. Plasmas.* – 2015. – Vol. 22, no. 3. – P. 033704.
- 9 Bastykova N.Kh., Kovacs A.Zs., Korolov I., Kodanova S.K., Ramazanov T.S., Hartmann P., and Donko Z. Controlled Levitation of Dust Particles in RF+DC Discharges // *Contrib. Plasma Phys.* – 2015. – Vol. 55. – P. 671.
- 10 Yousefi R., Davis A.B., Carmona-Reyes J., Mattheews L.S., and Hyde T.W. Measurement of net electric charge and dipole moment of dust aggregates in a complex plasma // *Phys. Rev. E.* – 2014. – Vol. 90. – P. 033101.
- 11 Chai K.-B. and Bellan P.M. Study on morphology and growth of water-ice grains spontaneously generated in a laboratory plasma // *J. Atmos. Solar-Terrestrial Phys.* – 2015. – Vol. 127. – P. 83–91.
- 12 Dosbolayev M.K., Utegenov A.U., and Ramazanov T.S. Structural Properties of Buffer and Complex Plasmas in RF Gas Discharge-Imposed Electrostatic Field // *IEEE Trans. Plasma Sci.* – 2015. – Vol. 44, no. 4. – P. 469.
- 13 Allen M.P. and Tildesley D.J. *Computer Simulation of Liquids.* – New York, NY, USA: Oxford Univ. Press, 1991.
- 14 Baimbetov F.B., Ramazanov T.S., Dzhumagulova K.N., Kadyrsizov E.R., Petrov O.F. and Gavrikov A.V. Modelling of dusty plasma properties by computer simulation methods // *J. Phys. A: Math. Gen.* – 2006. – Vol. 39. – P. 4521.
- 15 Ramazanov T.S. and Dzhumagulova K.N. Shear Viscosity of Dusty Plasma Obtained on the Basis of the Langevin Dynamics // *Contrib. Plasma Phys.* – 2008. – Vol. 48. – P. 357.
- 16 Ott T., Stanley M., and Bonitz M. Non-invasive determination of the parameters of strongly coupled 2D Yukawa liquids // *Phys. Plasmas.* – 2011. – Vol. 18, no. 6. – P. 063701.
- 17 Hartmann P., Kalman G.J., Donko Z., and Kutasi K. Equilibrium properties and phase diagram of two-dimensional Yukawa systems // *Phys. Rev. E.* – 2005. – Vol. 72. – P. 026409.
- 18 Schmidt P., Zwirnagel G., Reinhard P.-G., and Toepffer C. Longitudinal and transversal collective modes in strongly correlated plasmas // *Phys. Rev. E.* – 1997. – Vol. 56. – P. 7310.
- 19 Hansen J.P., Levesque D., Weis J.J. Self-Diffusion in the Two-Dimensional, Classical Electron Gas // *Phys. Rev. Lett.* – 1979. – Vol. 43. – P. 979.
- 20 Ramazanov T.S., Dzhumagulova K.N., Jumabekov A.N., and Dosbolayev M.K. Structural properties of dusty plasma in direct current and radio frequency gas discharges // *Phys. Plasmas.* – 2008. – Vol. 15. – P. 053704.
- 21 Ramazanov T.S., Dzhumagulova K.N., Kodanova S.K., Daniyarov T.T., and Dosbolayev M.K. Thermodynamic properties of dusty plasma on the basis of the Langevin dynamics // *Contrib. Plasma Phys.* – 2009. – Vol. 49, nos. 1–2. – P. 15–20.
- 22 Halperin B.I. and Nelson D.R. Theory of Two-Dimensional Melting // *Phys. Rev. Lett.* – 1978. – Vol. 41. – P. 121.
- 23 Golden K.I., Kalman G.J., Hartmann P., and Donko Z. Dynamics of two-dimensional dipole systems // *Phys. Rev. E.* – 2010. – Vol. 82. – P. 036402.

### References

- 1 S. Nunomura, J. Goree, S. Hu, X. Wang, and A. Bhattacharjee, Phys. Rev. E 65,066402, (2002).
- 2 C.C. Grimes and G. Adams, Phys. Rev. Lett., 36, 145, (1976).
- 3 Z. Donko, P. Hartmann, G.J. Kalman, and M. Rosenberg, Contrib. Plasma Phys., 43, 282, (2003).
- 4 T.S. Ramazanov, A.Zh. Gabdulin, and Zh.A. Moldabekov, IEEE Trans. Plasma Sci., 43(12), 4187, (2015).
- 5 T.S. Ramazanov, A.Zh. Moldabekov, and M.T. Gabdullin, *Multipole expansion and effective interaction potentials of plasma particles*, To be published in Phys. Rev. E.
- 6 S.K. Kodanova, T.S. Ramazanov, N.K. Bastykova, and Z.A. Moldabekov, Phys. Plasmas, 22(6), 063703, (2015).
- 7 G.I. Sukhinin and A.V. Fedoseev, IEEE Trans. Plasma Sci., 38(9), 2345–2352, (2010).
- 8 E.A. Lysin, I.I. Lisina, O.S. Vaulina, and O.F. Petrov, Phys. Plasmas, 22(3), 033704, (2015).
- 9 N.Kh. Bastykova, A.Zs. Kovacs, I. Korolov, S.K. Kodanova, T.S. Ramazanov, P. Hartmann, and Z. Donko, Contrib. Plasma Phys., 55, 671, (2015).
- 10 R. Yousefi, A.B. Davis, J. Carmona-Reyes, L.S. Mattheews, and T.W. Hyde, Phys. Rev. E 90, 033101, (2014).
- 11 K.-B. Chai and P.M. Bellan, J. Atmos. Solar-Terrestrial Phys., 127, 83-91, (2015).
- 12 M.K. Dosbolayev, A.U. Utegenov, and T.S. Ramazanov, IEEE Trans. Plasma Sci., 44(4), 469, (2015).
- 13 M.P. Allen and D.J. Tildesley *Computer Simulation of Liquids*. New York, NY, USA: Oxford Univ. Press, 1991.
- 14 F.B. Baimbetov, T.S. Ramazanov, K.N. Dzhumagulova, E.R. Kadyrsizov, O.F. Petrov and A.V. Gavrikov, J. Phys. A: Math. Gen., 39, 4521, (2006).
- 15 T.S. Ramazanov and K.N. Dzhumagulova, Contrib. Plasma Phys. 48, 357, (2008).
- 16 T. Ott, M. Stanley, and M. Bonitz, Phys. Plasmas, 18(6), 063701, (2011).
- 17 P. Hartmann, G.J. Kalman, Z. Donkó, and K. Kutasi, Phys. Rev. E 72, 026409, (2005).
- 18 P. Schmidt, G. Zwicknagel, P.-G. Reinhard, and C. Toepffer, Phys. Rev. E 56, 7310, (1997).
- 19 J.P. Hansen, D. Levesque, J.J. Weis, Phys. Rev. Lett., 43, 979, (1979).
- 20 T.S. Ramazanov, K.N. Dzhumagulova, A.N. Jumabekov, and M.K. Dosbolayev, Phys. Plasmas, 15, 053704, (2008).
- 21 T.S. Ramazanov, K.N. Dzhumagulova, S.K. Kodanova, T.T. Daniyarov, and M.K. Dosbolayev, Contrib. Plasma Phys., 49(1-2), 15-20, (2009).
- 22 B.I. Halperin and D.R. Nelson, Phys. Rev. Lett., 41, 121, (1978).
- 23 K.I. Golden, G.J. Kalman, P. Hartmann, and Z. Donko, Phys. Rev. E 82, 036402, (2010).