Кашкаров В.В.

Общая система естественной классификации

Приводятся результаты исследования общих закономерностей, возникающих при количественном описании свойств и отношений между объектами различной природы.

Предлагается развитие метода экспертных оценок, основанное на относительных оценках объектов изучения и естественных свойствах множества всех оценок как совокупности.

Новый способ классификации объектов выявляет структуру их взаимосвязей и количественно определяет место каждого объекта в этой структуре.

Полученные результаты могут найти применение во многих областях, где используются методы квалиметрии.

Ключевые слова: классификация, квалиметрия, естественная структура, инварианты.

Kashkarov V.V.

The general system for natural classification

There are the results of study the general laws that arise in the quantitative description of the properties and relationships between objects of different nature.

It is proposed to develop a method of expert estimations, based on relative estimates of the objects and the natural properties of the set of estimates as a whole.

A new method of object's classification reveals their structure and relationships sothe location of each object in this structure can be determined qualitatively.

The results can be applied in many fields, wherethe methods of qualimetry used.

Key words: classification, quality, natural structure, invariants.

Кашкаров В.В.

Жаратылыс танымының жалпы жүйелік классификациясы

Табиғаты әртүрлі кешендер арасындағы қатынастар мен қасиеттерді сандық сипаттау кезіндегі туындайтын жалпы заңдылықтарды зерттеу нәтижелері келтірілген.

Эксперименттік талдау әдістерін дамыту ұсынылады: зерттеу кешендерін салыстырмалы бағалауға негізделген және барлық бағалауды табиғи қасиеттердің жиынтығы ретінде.

Кешендерді классификациялаудың жаңа әдісі: құрылымдарды анықтайды және олардың өзара байланысын және әрбір кешеннің осы құрылымдағы орнын анықтайды.

Алынған нәтижелер көптеген салалардағы квалиметрия әдістерін пайданылануда қолданылуы мумкін.

Түйін сөздер: классификация, квалиметрия, табиғи құрылым, инварианттар.

УДК 001.5; 51-7; 530.1

Кашкаров В.В.

Казахский национальный университет имени аль-Фараби,
Республика Казахстан, г. Алматы
E-mail: Kashkarov.Vladimir@kaznu.kz

ОБЩАЯ СИСТЕМА ЕСТЕСТВЕННОЙ КЛАССИФИКАЦИИ

Введение

Настоящее исследование предпринято с целью изучения общих закономерностей, присущих количественному описанию свойств и отношений между объектами различной природы. Такими объектами могут быть, например, материальные объекты, свойства и отношения между которыми описываются количественно с помощью физических величин и законов.

В образовании количественному описанию подвергаются знания учащихся, которые измеряются при проведении специальных контролей. В области маркетинга проводят количественную оценку качества товаров и услуг. В спорте объектами количественного описания выступают спортсмены, демонстрирующие свои достижения в соревнованиях. Даже научные проекты и достигнутые результаты исследований сейчас подвергаются попыткам количественного измерения. Существует множество и других подобных примеров, с которыми можно встретиться на практике.

Характерной общей чертой такого рода описания является наличие двух конечных дискретных множеств: множества объектов изучения и множества экспертов, которые дают количественные оценки свойствам объектов.

Количественная характеристика объекта, его оценка, получается в результате процедуры измерения при взаимодействии эксперта с объектом изучения. При этом оценки выражаются, как правило, целыми числами.

Физические измерительные приборы, наборы тестовых заданий, эксперты по оценке качества товаров, бригада спортивных арбитров – вот некоторые примеры множеств, элементы которых выступают в роли экспертов. Оценки являются субъективными характеристиками, так как эталоны и шкалы выбираются экспертами произвольно. Однако, это, по-видимому, единственный способ квантизации свойств объектов, поскольку сама Природа, как правило, не предоставляет готовых количественных оценок.

Можно ли избавиться от этой субъективности? В настоящей работе предлагается метод, позволяющий перейти от субъективного описания к такому, которое основано на относительных характеристиках самих объектов изучения и естественных связях между ними.

Матрица оценок

Пусть есть матрица экспертных оценок множества объектов $\{q_i\}$:

$$
\mathbf{A} \equiv
\begin{array}{c}
 \\ p_1 \\ p_2 \\ \cdots \\ p_m
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{array} \\
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix}
\end{array}.
$$

Элементы матрицы $\mathbf{A}$ – это оценки $a_{\alpha i}$ объектов q_i, данные экспертами p_α. Как уже отмечалось, это набор действительных (чаще – целых) чисел.

Будем рассматривать эту матрицу как две совокупности взаимосвязанных векторов: первая – это n столбцов матрицы $\vec{q}_i = [a_{1i}, a_{2i}, ..., a_{mi}]$, вторая – это m её строк $\vec{p}_\alpha = (a_{\alpha 1}, a_{\alpha 2}, ..., a_{\alpha n})$. Компоненты этих векторов преобразуются при изменении системы координат по известным правилам. При этом нас в первую очередь будут интересовать инварианты – величины, не зависящие отвыбора системы координат.

Особенность матрицы оценок состоит ещё и в том, что она не изменяет своего смысла при любых перестановках её столбцов или строк. Такие перестановки соответствуют замене нумерации объектов и экспертов, которая выполнена нами произвольно и потому не может влиять на объективные отношения между оценками.

Таким образом, любые рассматриваемые ниже функции от матрицы оценок, характеризующие свойства объектов, должны быть инвариантны относительно таких преобразований.

Эта инвариантность есть проявление одного из фундаментальных Принципов Природы:

Принципа Единообразия (Uniformity) – равноправия природных объектов по отношению к закону, выражающему некоторое их общее свойство как совокупности.

Ю.И. Кулаков, который впервые сформулировал этот принцип для физических объектов [1], позднее назвал его *принципом холотропной симметрии* [2].

Все допустимые и соответствующие этому принципу типы количественных взаимосвязей между физическими величинами он назвал *физическими структурами* и поставил задачу их отыскания. Получив ответы для отдельных случаев [2], он нашёл соответствующие физические структуры и показал успешность нового подхода в описании физических явлений, в том числе на ряде конкретных физических задач.

Г.Г.Михайличенко доказал [3], что в соответствии с принципом холотропной симметрии Ю.И.Кулакова, на множестве действительных чисел существует только четыре (!) типа бинарных физических структур, нашёл для них явные аналитические выражения и провёл их полную классификацию.

В данной работе мы будем иметь дело с физическими структурами Ю.И. Кулакова ранга (m, m).

Пространство представления оценок

Рассмотрим матрицу оценок как совокупность n векторов $\vec{q}_i = [a_{1i}, a_{2i}, ..., a_{mi}]$, – столбцов матрицы – в m-мерном линейном векторном пространстве.

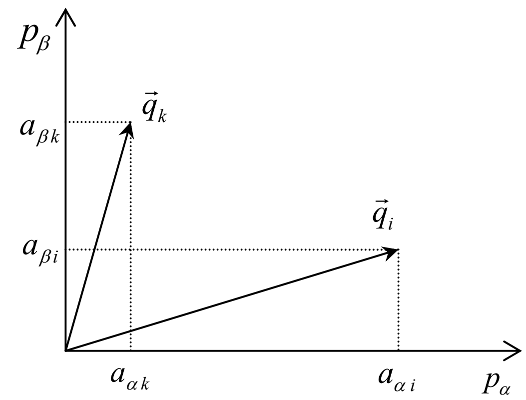

Рисунок 1 – Векторы оценок объектов в пространстве представления

Введём систему координат в пространстве представления оценок в виде m взаимно-перпендикулярных осей, каждая из которых соответствует шкале одного из экспертов p_α. Теперь оценке каждого объекта соответствует точка (вектор) в этом пространстве.

Ранг матрицы оценок определяет размерность многообразия оценок в пространстве представления.

В дальнейшем нас будет интересовать относительное взаимное расположение оценок объектов в пространстве представления, которое не должно зависеть от выбора положения начала отсчёта и направлений осей координат.

Определим *тензор дисперсии* оценок как матрицу Грама, образованную из скалярных произведений векторов-строк $\vec{p}_\alpha$ матрицы оценок $\mathbf{A}$:

$$D_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{n}\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \frac{1}{n}\vec{p}_\alpha \cdot \vec{p}_\beta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_{\alpha i} a_{\beta i}$$

Через этот тензор можно выразить некоторые интегральные характеристики множества оценок, которые будут инвариантны относительно преобразований системы координат в пространстве представления.

Дисперсия относительно начала отсчёта «*o*» определяется как средний квадрат расстояний всех оценок до этой точки:

$$\sigma_o^2 \equiv \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \vec{q}_i^{\,2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{m} a_{\alpha i} a_{\alpha i} = D_{\alpha\beta}\delta_{\alpha\beta} = D_{\alpha\alpha},$$

и является инвариантным шпуром тензора дисперсии.

Дисперсия вдоль заданной прямой $\vec{\tau}$ определяется средним квадратом проекций векторов оценок на эту прямую:

$$\sigma_{\vec{\tau}}^2 \equiv \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (\vec{q}_i, \vec{\tau})^2 = D_{\alpha\beta}\tau_\alpha\tau_\beta,$$

и также является скаляром, независящим от направления осей координат.

Из определения дисперсии множества оценок относительно некоторой точки «*o*»:

$$\sigma_o^2 \equiv \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \vec{q}_i^{\,2}$$

следует, что она (дисперсия) зависит от расположения точек множества и выбора начала отсчёта «*o*».

Ясно, что существует такая точка «*c*», относительно которой дисперсия данного множества точек минимальна.

Будем называть её *центральной точкой* множества оценок. Найдём эту точку.

Пусть положения оценок относительно центральной точки $\vec{q}_c$ задаются относительными векторами $\vec{q}_i^{\,\prime}$, т.е.:

$$\vec{q}_i = \vec{q}_c + \vec{q}_i^{\,\prime},$$

тогда дисперсия относительно центральной точки будет:

$$\sigma_c^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} q_i'^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (\vec{q}_i - \vec{q}_c)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left\{ q_i^2 - 2(\vec{q}_c, \vec{q}_i) + q_c^2 \right\}$$

Условие минимума означает, что вариация $\delta\vec{q}_c$ положения центральной точки не изменяет (в первом порядке) величины дисперсии:

$$\delta\sigma_c^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left\{ -2\vec{q}_i + 2\vec{q}_c \right\} \cdot \delta\vec{q}_c = 0,$$

откуда, ввиду произвольности смещения $\delta\vec{q}_c$, следует формула, определяющая положение центральной точки:

$$\vec{q}_c = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \vec{q}_i .$$

Центральная точка множества соответствует *среднестатистической оценке* всей совокупности объектов.

Дисперсия относительно произвольной точки «*o*» связана с дисперсией относительно центральной точки «*c*» формулой Пифагора:

$$\sigma_o^2 = \sigma_c^2 + q_{oc}^2,$$

где q_{oc}^2 – квадрат расстояния между точками «*o*» и «*c*».

В дальнейшем будем полагать, что начало отсчёта системы координат выбрано именно в центральной точке множества оценок. Для этого необходимо в матрице оценок перейти от абсолютных векторов $\vec{q}_i$ оценок к векторам $\vec{q}_i^{\,\prime} = \vec{q}_i - \vec{q}_c$. Такое описание, однако, всё ещё содержит субъективные оценки, данные каждым экспертом. Чтобы избавиться от этой субъективности необходимо нормировать абсолютные оценки экспертов на некоторые эталоны, выраженные в тех же единицах. Такими естественными эталонами являются дисперсии оценок.

Размерную оценку, содержащую «подпись» данного эксперта, необходимо разделить на корень (содержащий ту же «подпись») из дисперсии всех его оценок:

$$g_{\alpha i} = \frac{a_{\alpha i} - q_{\alpha c}}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a_{\alpha i} - q_{\alpha c})^2}} = \frac{\Delta a_{\alpha i}}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\Delta a_{\alpha i})^2}}.$$

Матрица относительных оценок

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{m1} & g_{m2} & \cdots & g_{mn} \end{pmatrix},$$

нормированных на соответствующие дисперсии, уже не содержит никаких размерных величин и состоит из набора действительных чисел $g_{\alpha i}$, обладающих свойствами:

$$\sum_{i=1}^{n} g_{\alpha i} = 0 \text{ и } \sum_{i=1}^{n} g_{\alpha i}^2 = n \ \forall \alpha .$$

Теперь тензор дисперсии относительных оценок:

$$D_{\alpha\beta} = \frac{1}{n}\mathbf{G}\mathbf{G}^T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g_{\alpha i} g_{\beta i}$$

принимает вид:

$$D_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & 1 & \dots & c_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

где $c_{\alpha\beta} = \dfrac{\vec{g}_\alpha \cdot \vec{g}_\beta}{n} = \cos(\phi_{\alpha\beta})$ – косинусы углов $\varphi_{\alpha\beta}$ между векторами-строками $\vec{g}_\alpha = (g_{\alpha 1}, g_{\alpha 2}, \dots, g_{\alpha n})$ и $\vec{g}_\beta = (g_{\beta 1}, g_{\beta 2}, \dots, g_{\beta n})$ матрицы $\mathbf{G}$ относительных оценок.

Каждая такая строка относится к конкретному эксперту. Если мнения каких-либо двух экспертов совпадают (или противоположны), то векторы их оценок оказываются параллельными (антипараллельными) и косинус угла между ними будет равен единице (минус единице). Это означает линейную зависимость между строками матрицы относительных оценок, что приводит к равенству нулю детерминанта тензора дисперсии.Будем исключать линейно зависимые строки и столбцы из тензора дисперсии, поскольку они не несут никакой новой информации. После такого исключения определитель тензора дисперсии будет отличен от нуля.

Взаимное расположение точек в пространстве кроме центральной точки выделяет в нём особые направления – *главные оси дисперсии*, относительно которых симметричный тензор дисперсии

$$D_{\alpha\beta} = \frac{1}{n}\mathbf{G}\mathbf{G}^T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g_{\alpha i} g_{\beta i}$$

принимает диагональный вид:

$$D_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_m^2 \end{pmatrix}.$$

Ортогональная система главных центральных осей $\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2, \dots, \vec{\gamma}_m$ дисперсии с началом в центральной точке образует *естественный базис* пространства представления данного множества оценок.Будем полагать, что каждая главная центральная ось дисперсии соответствует некоторому *независимому свойству*, присущему в той или иной мере каждому объекту. Вектор оценки конкретного объекта i в указанном базисе:

$$\vec{\rho}_i = \rho_{1i}\vec{\gamma}_1 + \rho_{2i}\vec{\gamma}_2 + \dots + \rho_{in}\vec{\gamma}_m$$

состоит из ортогональных компонент, количественно характеризующих все его независимые свойства. Проекция вектора оценки на соответствующую ось базиса отражает количественное содержание данного свойства у объекта.

Естественным масштабом – эталоном для каждой оси $\vec{\gamma}$ является продольная дисперсия $\sigma_{\vec{\gamma}}^2$ всей совокупности оценок вдоль этой оси (точнее – квадратный корень из этой дисперсии).

В соответствии с этим можно ввести относительный безразмерный вектор оценки объекта:

$$\vec{\xi}_i = \xi_{1i}\vec{\gamma}_1 + \xi_{2i}\vec{\gamma}_2 + \dots + \xi_{mi}\vec{\gamma}_m ,$$

где компоненты $\xi_{\gamma i} = \rho_{\gamma i} / \sigma_\gamma$ являются действительными числами, характеризующими значения данного свойства у объекта в относительных единицах, задаваемых соответствующими дисперсиями оценок вдоль этих осей для всей совокупности объектов.

Таким образом, с помощью изложенного алгоритма можно перейти от субъективного описания свойств объектов посредством шкал абсолютных экспертных оценок к описанию, содержащему лишь относительные характеристики множества самих объектов.

Интегральные характеристики многообразия оценок

Рассмотрим тензор, являющийся обратным к тензору дисперсии:

$$Q_{\alpha\beta} = D_{\alpha\beta}^{-1}.$$

Такой тензор существует, если матрица тензора дисперсии не является особенной.

Физический смысл тензора $Q_{\alpha\beta}$ состоит в том, что он является *метрическим тензором* для пространства с различными эталонами вдоль различных направлений.

Будем называть это пространство *квалиметрическим*.

Квадрат расстояния между двумя точками в таком пространстве определим через координаты ρ_α, ρ_β этих точек как

$$\Delta s^2 = Q_{\alpha\beta}\Delta\rho_\alpha\Delta\rho_\beta .$$

Введём потенциал объекта $\Phi = \Phi(\vec{\rho})$, зависящий от всей совокупности значений его свойств, в виде квадратичной формы:

$$\Phi(\vec{\rho}) \equiv \frac{1}{2}Q_{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta = \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{\rho_2^2}{\sigma_2^2} + \ldots + \frac{\rho_m^2}{\sigma_m^2}\right).$$

На поверхности эллипсоида равных значений потенциала (эквипотенциальной поверхности) находятся объекты, равноудалённые от начала координат в пространстве с разными эталонами в различных направлениях.

В относительных переменных $\xi_\gamma = \rho_\gamma / \sigma_\gamma$:

$$\Phi(\xi^2) \equiv \frac{1}{2}\left(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_m^2\right)$$

потенциал $\Phi(\xi^2)$ является симметричной квадратичной формой, которая определяет сферическую поверхность равной удалённости оценок от центральной точки.

Введённая таким образом функция является интегральной характеристикой степени *неординарности* объекта, количественно выражающая его удалённость от среднестатистического объекта всей совокупности.

Нетрудно видеть, что потенциал инвариантен относительно следующих преобразований системы координат: поворотов, отражений и перестановок её осей.

Введём также вектор градиента потенциала:

$$\vec{\Gamma}(\vec{\rho}) \equiv \vec{\nabla}\Phi(\vec{\rho}),$$

$$\Gamma_\alpha(\vec{\rho}) = Q_{\alpha\beta}\rho_\beta \text{, или}$$

$$\vec{\Gamma}(\vec{\rho}) = \frac{\rho_1\vec{\gamma}_1}{\sigma_1^2} + \frac{\rho_2\vec{\gamma}_2}{\sigma_2^2} + \ldots + \frac{\rho_m\vec{\gamma}_m}{\sigma_m^2},$$

где σ_γ^2 – дисперсии оценок вдоль главных осей γ.

Система «силовых» линий градиента и эквипотенциальных поверхностей образует новую криволинейную ортогональную систему координат в квалиметрическом пространстве, в котором объекты классифицируются значениями потенциала и градиента.

Таким образом, мы переходим от декартовой системы координат к криволинейной системе, в которой квадрат расстояния от начала отсчёта характеризует потенциал объекта, а линии градиента потенциала – геодезические линии кратчайшего расстояния от данного объекта до начала координат.

Инвариантные подмножества объектов

Потенциал совокупности свойств объекта $\vec{\rho}$:

$$\Phi(\vec{\rho}) \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{\rho_2^2}{\sigma_2^2} + \ldots + \frac{\rho_m^2}{\sigma_m^2}\right)$$

обладает симметрией по отношению к замене знака переменных ρ_γ. Такой же симметрией обладают модули градиента и радиус-вектора объекта.

В пространстве представления эти преобразования соответствуют изменениям направлений осей системы координат на противоположные (инверсии). Такая симметрия пространства оценок для потенциала означает равноправие противоположных значений для каждого конкретного свойства.

Группа дискретных преобразований, соответствующая указанной симметрии, содержит $N(m) = 2^m$ элементов, где m – размерность многообразия оценок в квалиметрическом пространстве. Эта группа является группой симметрии m – мерного параллелепипеда.

Теперь свойства и отношения оцениваемых объектов, обладающих одинаковым потенциалом и модулями градиента и радиус-вектора, могут быть классифицированы в соответствии с этой дискретной группой симметрии.

Для одномерного случая группа содержит только два элемента $N(1) = 2$. В этом случае матрица оценок имеет ранг равный единице. Все объекты характеризуются только одним свойством. Каждому объекту можно сопоставить другой объект – с противоположным значением этого свойства.Такой тип отношений известен как *диалектика*. Он характерен для большинства физических величин, описываемых одним параметром.

Для двумерного случая группа симметрии содержит четыре элемента $N(2) = 2^2 = 4$. Это группа симметрии (так называемая четверная группа Клейна) двумерного параллелепипеда – прямоугольника. Она описывает специфическую структуру комплементарных отношений между двумя парами объектов, каждый из которых характеризуется двумя значениями из двух независимых свойств. Матрица оценок в этом случае имеет ранг равный двум.

Будем называть этот тип структуры *тетрадой*. Эта структура характерна для множества кодонов генетического кода, для множества состояний гармонического осциллятора в фазовом пространстве, некоторых специальных наборов физических величин и объектов.

Для трёхмерного случая группа симметрии содержит восемь элементов $N(3) = 2^3 = 8$. Это группа симметрии трёхмерного параллелепипеда. Она описывает структуру отношений между восемью объектами, каждый из которых характеризуется тремя значениями из трёх независимых свойств. Матрица оценок в этом случае имеет ранг равный трём. Назовём этот тип структуры *октавой*. Пример реализации такой структуры соответствует классификации цветных объектов в переменных: Красный – Зелёный – Синий (RGB) и переменных: Яркость – Насыщенность – Цвет (Intensity – Saturation – Hue). Цветовая сфера в квалиметрическом пространстве.

Таким образом, всё множество оцениваемых объектов разбивается на сумму независимых инвариантных подмножеств (с одинаковым значением потенциала и модуля градиента), состоящих из минимальных наборов представителей, отвечающих данной структуре (эллипсоиду дисперсии оценок) множества объектов в целом. Эти подмножества являются *базисными*, неприводимыми подмножествами всего множества исходных объектов.

Выводы

Множество экспертных оценок для набора объектов формирует квалиметрическое пространство с определёнными свойствами, в котором каждый объект, в свою очередь, занимает своё конкретное место. Эта структура их взаимного расположения количественно характеризует свойства оцениваемых объектов.

Предложенный способ классификации объектов, проявляющий структуру их взаимосвязей и количественно определяющий положение каждого объекта в этой структуре, является *естественным* и независящим от субъективных шкал экспертов, дававших исходные оценки объектам.

Литература

1 Кулаков Ю.И. О новом виде симметрии, лежащем в основании физических теорий феноменологического типа // ДАН СССР. – 1971. – Т. 201, №3. – С.570-572.

2 Кулаков Ю.И. Теория физических структур. – Новосибирск: Альфа Виста, 2003. – 632 с.

3 Михайличенко Г.Г. Математический аппарат теории физических структур. – Горно-Алтайский госуниверситет, Горно-Алтайск, 1997. – 144 с.

References

1 Yu.I. Kulakov, DAN SSSP, 201(3), 570-572, (1971) (in russ).

2 Yu.I. Kulakov, Teorija fizicheskih struktur, Novosibirsk, Alfa Vista, 2003, 632 s. (inruss).

3 G.G. Mihaijlichenko. Matematicheskij apparat teorii fizicheskih struktur. Gorno-Altajskij gosuniversitet, Gorno-Altajsk, 1997,144 s. (in russ).