

Жусупов М.А., Жусупов А.М.,  
Кабатаева Р.С.,  
Жаксыбекова К.А.

**Методика расчета  
характеристик экзотических  
атомов**

В настоящей статье рассматривается методика расчета характеристик экзотических атомов, которая окажется весьма полезной для молодых преподавателей и исследователей в области теоретической ядерной физики. Рассматриваются водородоподобные системы, приводятся основные формулы для расчета характеристик таких систем. Приведены примеры расчета характеристик для таких систем как мезоатомы, позитроний, мюоний, протоний и пионий, в которых доминирующим является кулоновское взаимодействие, поскольку ядерные силы являются короткодействующими. Максимум действия ядерных сил приходится на расстояние в несколько ферми, тогда как соответствующие боровские радиусы значительно больше. На этих расстояниях ядерные силы малы и протоний и пионий являются по существу чисто кулоновскими системами. Для указанных систем детально рассчитаны значения энергии ионизации и боровского радиуса с использованием постоянной конверсии и постоянной тонкой структуры. Теоретический расчет характеристик для протония и пиония, используя формулы для кулоновских систем, находится в хорошем согласии с экспериментальными значениями. Приведена краткая справка о методе нахождения масс дейтрона и тритона, используя изотопический сдвиг спектральных линий изотопов водорода – дейтерия и трития.

**Ключевые слова:** экзотические атомы, водородоподобные системы, мезоатомы, позитроний, мюоний, протоний, пионий, энергия ионизации, боровский радиус.

Zhusupov M.A., Zhusupov A.M.,  
Kabatayeva R.S.,  
Zhaksybekova K.A.

**Methodology of calculation of  
characteristics of exotic atoms**

In the present article the methodology of calculation of characteristics of exotic atoms is considered, it will be of use for young teachers and researchers in the field of theoretical nuclear physics. The hydrogen-like systems are considered, the main formulas for calculation of characteristics of such systems are given. The examples of calculation of characteristics of such systems as mesoatoms, positronium, muonium, protonium and pionium are shown. In such systems the dominating role is for the Coulomb interaction since the nuclear forces are short-range ones and the maximum of nuclear forces' action is for a distance of order of several fermi but the Bohr radii are considerably larger. At these distances the nuclear forces are weaker and the protonium and pionium are essentially Coulomb systems. For the mentioned systems there is a detailed calculation of energy of ionization and the Bohr radius using the conversion constant and the fine structure constant. The theoretical calculation for the protonium and pionium using the formulas for the Coulomb systems is in good agreement with the experimental data. The brief description of the method of determination of the mass of deuteron and triton is given, using the isotopic shift of the spectral lines of hydrogen isotopes – deuterium and tritium.

**Key words:** exotic atoms, hydrogen-like systems, mesoatoms, positronium, muonium, protonium, pionium, ionization energy, Bohr radius.

Жүсіпов М.Ә., Жүсіпов А.М.,  
Қабатаева Р.С.,  
Жақсыбекова К.А.

**Экзотикалық атомдардың  
сипаттамаларын есептеу  
әдіснамасы**

Бұл мақалада экзотикалық атомдардың сипаттамаларын есептеу әдіснамасы қарастырылған, теориялық ядролық физикасының жас оқытушыларына және зерттеушілеріне аса пайдалы болады. Сутегі тәрізді жүйелер қарастырылады, сондай жүйелердің сипаттамаларын есептеудің негізгі формулалары келтірілген. Мезоатомдар, позитроний, мюоний, протоний және пионий сияқты жүйелердің сипаттамаларын есептеу мысалдары берілген. Мұндай жүйелерде кулондық әсерлесу доминантты болып табылады себебі ядролық күштер қысқа әсерлі және ядролық күштердің әсер ету максимумы бір неше ферми ретімен орындалса, сәйкесті бор радиустары аса ғұрлым үлкенірек. Бұл қашықтықта ядролық күштер кіші болады және де протоний мен пионий шын мәнінде таза кулондық жүйелер болып табылады. Айтылған жүйелер үшін конверсия тұрақтысын және жіңішке құрылым тұрақтысын қолданып иондау энергиясы және бор радиусының мәндері есептелді. Кулондық жүйелердің формулаларын қолданып протоний және пионий үшін жасалған сипаттамалардың теориялық есептеуі эксперименттік мәндермен жақсы келісімде. Сутегі изотоптары дейтерий және тритийдің спектралдық сызықтарының изотоптық шөгін қолданып дейтронның және тритонның массаларын анықтау әдісі туралы қысқаша сипаттама берілген.

**Түйін сөздер:** экзотикалық атомдар, сутегі тәрізді жүйелер, мезоатомдар, позитроний, мюоний, протоний, пионий, иондау энергиясы, бор радиусы.

## МЕТОДИКА РАСЧЕТА ХАРАКТЕРИСТИК ЭКЗОТИЧЕСКИХ АТОМОВ

### Введение

Водородоподобными называют атомы, в электронной оболочке которых содержится только 1 электрон. К ним относят атом водорода, ядром которого является протон; однократно ионизированный атом гелия  $He^+$ , двукратно ионизированный атом  $Li^{++}$  и т.д., то есть одноэлектронные системы с зарядом  $+2e$ ,  $+3e$ .

В последнее время были открыты так называемые «экзотические» атомы – мезоатомы, позитроний, мюоний, протоний и пионий. Каждая из этих систем имеет свои особенности, но общим является то, что доминирующим взаимодействием, образующим эти системы, как и в атоме водорода, является кулоновское.

Впервые водородоподобные атомы были рассмотрены Н. Бором в полуквантовой теории [1]. Согласно классической физике, заряженная частица, движущаяся по криволинейной траектории, должна излучать энергию. Вследствие этого энергия частицы будет непрерывно уменьшаться. В действительности же электроны в атоме могут двигаться вокруг ядра сколь угодно долго без излучения энергии. Более того энергия электронов в атоме может изменяться только вполне определенными порциями. Для объяснения этих фактов Бор предложил 2 постулата:

1. Атомы могут находиться длительное время только в определенных, так называемых стационарных состояниях. Энергии этих стационарных состояний образуют дискретный ряд значений  $E_1, E_2, \dots, E_n$ .

2. При переходе атома из начального стационарного состояния  $E_n$  в другое  $E_m$  ( $E_m < E_n$ ) излучается квант света, причем частота излучения  $\omega = \frac{E_n - E_m}{\hbar}$ .

Квантование в теории Бора вводилось искусственно. Предполагалось, что электрон движется вокруг ядра по круговой орбите радиуса  $r$ . Кулоновская сила притяжения является центростремительной. К этому условию добавляется условие квантования стационарных орбит

$$\frac{m_e v^2}{r} = \frac{ze^2}{r^2}, \quad (1)$$

$$m_e v r = n\hbar, \quad (2)$$

где  $\hbar$  – постоянная Планка  $h$ , деленная на  $2\pi$ . Квантовое число  $n$  принимает значения  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Решая уравнения (1) и (2), находим  $r_n$  и  $v_n$ . Затем находится полная энергия как сумма кинетической и потенциальной энергий

$$E_n = \frac{m_e v_n^2}{2} - \frac{ze^2}{r_n}. \quad (3)$$

В результате получим формулу Бальмера для квантования энергетических уровней водородоподобного атома

$$E_n = -\frac{m_e z^2 e^4}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2} \quad (4)$$

и радиуса стационарных орбит

$$r_n = n^2 \frac{\hbar^2}{zm_e e^2}. \quad (5)$$

Особый интерес представляют эти величины для основного состояния атома водорода ( $z = 1, n = 1$ ):  $\varepsilon_1 = E_1$  и  $a = r_1 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2}$ . Более

строго формулы (4) и (5) выводятся в квантовой механике. Так, в теории Бора оговаривается, что  $n \neq 0$ . Но строгая теория должна объяснять значения всех составляющих ее параметров. В квантовой механике значение  $n = 0$  исключается автоматически.

На эксперименте измеряют энергию ионизации  $J_1 = -\varepsilon_1$  и радиусы боровской орбиты. Энергия ионизации – это энергия, необходимая для отрыва электрона от атома. Радиус боровской орбиты – в теории Бора это расстояние от протона, на котором движется электрон. В квантовой механике величина  $a$  – это расстояние, на котором максимальна вероятность обнаружения электрона. Это наивероятное зна-

чение координаты. В принципе, согласно квантовой механике, электрон в атоме можно обнаружить на любом расстоянии от протона.

Отметим, что все формулы для водородоподобных атомов получены в предположении покоящегося ядра. Действительно, из-за сохранения импульса кинетические энергии частиц в атоме водорода обратно пропорциональны их массам, то есть для атома водорода  $\frac{T_p}{T_e} = \frac{m_e}{m_p} = \frac{1}{1836}$  и протон можно считать

неподвижным. Можно показать, что учет движения ядра сводится к замене массы электрона  $m_e$  на приведенную массу  $\mu_{ep}$ . Она

определяется как  $\frac{1}{\mu_{ep}} = \frac{1}{m_e} + \frac{1}{m_p}$ , то есть

$$\mu_{ep} = \frac{m_e \cdot m_p}{m_e + m_p} \approx m_e \left(1 - \frac{m_e}{m_p}\right).$$

Особенно интересно этот эффект проявляется в изотопическом сдвиге спектральных линий. Изотопами называют элементы, заряд ядра в которых одинаков, но массы различны. Известны изотопы водорода – дейтерий и тритий. Ядро атома дейтерия, называемое дейтроном, состоит из протона и нейтрона. Ядро атома трития, называемое тритоном, состоит из протона и 2 нейтронов. Различие в массах ядер различных изотопов приводит к сдвигу линий друг относительно друга в их спектрах излучения. Этот сдвиг линий называется изотопическим. Величина этого сдвига незначительна (для частот  $\square \omega \square 10^{-4}$ ), но точность спектроскопических приборов достаточна, чтобы его установить. Именно по изотопическому сдвигу были найдены массы дейтрона и тритона, а по относительной интенсивности сдвинутых линий судят о концентрации изотопов. Именно так было установлено, что в обычной воде один атом дейтерия приходится на пять с половиной тысяч атомов водорода. Вообще все без исключения элементы представляют собой смесь изотопов. Некоторые из них состоят в основном из одного стабильного изотопа. Водород с массовым числом 1 занимает 99,986%, остальное приходится на дейтерий. На кислород с массовым числом 16 приходится 99,76%. Встречаются элементы, которые содержат разные изотопы в сравнимых количествах. Например, хлор содержит 75%

изотопа с массовым числом 35 и 25% с массовым числом 37. Разделение изотопов является важной отраслью атомной промышленности. Необходимо отделить тяжелую воду от обычной, выделять определенные изотопы урана и тория, являющиеся ядерным горючим. Методы, использующие различие масс изотопов, являются исключительно дорогостоящими и требуют больших затрат времени. Более эффективными являются методы, использующие небольшое различие в энергетических спектрах от атомов изотопов. Лазерные лучи обладают строго определенной энергией. Настраиваемые на энергию возбужденного состояния определенного изотопа лазерные лучи переводят атомы в возбужденное состояние. В то же время атомы других изотопов остаются невозбужденными. Но возбужденные атомы, погло-

тившие фотон, приобретают дополнительный импульс в направлении лазерного луча и будут смещаться. На этом основан метод лазерного разделения изотопов.

Далее рассмотрено применение простой теории водородоподобных атомов к расчету основных характеристик более сложных систем, открытых сравнительно недавно и названных экзотическими атомами.

### Расчет характеристик

В микромире удобно, используя соотношение Эйнштейна  $E = mc^2$ , измерять массы в энергетических единицах – мегаэлектронвольтах (МэВ). 1 МэВ =  $10^6$  электронвольт (эВ). Так, для электрона  $m_e \cdot c^2 = 0.511$  МэВ. В таблице приведены массы ( $m \cdot c^2$ ) некоторых частиц, которые будут использованы в дальнейшем [1].

Таблица – Массы частиц в МэВ

Частица	$p$ (протон)	$n$ (нейтрон)	$e^\pm$ (электрон и позитрон)	$\mu^\pm$ (мю-мезоны)	$\pi^\pm$ (пи-мезоны)
$m \cdot c^2$ (МэВ)	938,27	939,57	0,511	105,658	139,658

Все расчетные формулы упрощаются, если также использовать 2 константы: постоянную тонкой структуры  $\frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$  и так называемый коэффициент конверсии  $\hbar \cdot c = 1,97 \cdot 10^{-11}$  МэВ·см. Например, энергия основного состояния атома водорода

$$E_1 = -\frac{m_e \cdot e^4 \cdot c^2}{2\hbar^2 \cdot c^2} = -\frac{(m_e \cdot c^2)}{2} \cdot \left(\frac{e^2}{\hbar \cdot c}\right)^2 = -13,6 \text{ эВ}$$

Энергия ионизации равна  $J = 13.6$  эВ. Для боровского радиуса получим

$$a = \frac{\hbar^2 \cdot c^2}{m_e \cdot e^2 \cdot c^2} = \frac{\hbar \cdot c}{m_e \cdot c^2} \cdot \left(\frac{\hbar \cdot c}{e^2}\right) \approx 0,528 \cdot 10^{-8} \text{ см}$$

Рассмотрим экзотические атомы.

1. Мезоатомы. Так называются атомы, в которых один электрон вытеснен  $\mu^-$  или  $\pi^-$ -мезоном. Так, для мезоводорода, состоящего из  $\mu^-$ -мезона и протона, приведенная масса

$$\mu_{\text{мез.}} = \frac{105,66 \cdot 938,27}{105,66 + 938,27} = 94,966 \text{ МэВ}$$

$\approx 186 m_e \cdot c^2$ . Отсюда, энергия ионизации  $J_{\text{мез.}} = 13,6 \cdot 186 = 2530$  эВ. Радиус боровской орбиты в 186 раз меньше, чем для водорода  $a \approx 2,84 \cdot 10^{-11}$  см.

Хотя мю-мезоатом более компактная система и его энергия связи на 2 порядка больше, чем у атома водорода, в природе он практически не встречается. Это связано с малым временем жизни  $\tau = 2,2 \cdot 10^{-6}$  секунды. Даже если бы он двигался со скоростью света, то его пробег составил примерно 660 метров. В дальнейшем мы покажем, как может быть увеличено время жизни  $\mu^-$ -мезона.

2. Позитроний. Так называется водородоподобная система, состоящая из электрона  $e^-$  и позитрона  $\mu^+$ . Позитрон является античастицей по отношению к электрону; массы их

совпадают, а заряды противоположны по знаку. Приведенная масса позитрония ровно в 2 раза меньше массы электрона. Поэтому потенциал ионизации мю-мезоводорода в 2 раза меньше  $J_{\text{мез.}} = 3,8$  эВ, а радиус боровской орбиты в 2 раза больше  $a_{\text{ноз.}} = 2a_{\text{вод.}}$ . Электрон и позитрон имеют собственные моменты количества движе-

ния – спины  $s = \frac{1}{2}$ . В атоме позитрония спины

их могут быть параллельными и суммарный спин  $S = 1$ . Такая система называется ортопозитронием. Если спины антипараллельны, то  $S = 0$ . Эта система называется парапозитронием. Время жизни ортопозитрония  $\tau = 1.4 \cdot 10^{-7}$  секунды, а парапозитрония –  $\tau = 1.25 \cdot 10^{-10}$  секунды. Позитроний распадается, превращаясь в 2 или 3 гамма-кванта  $e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma$  или  $3\gamma$ . Этот процесс называется аннигиляцией электрон-позитронной пары. При этом парапозитроний распадается на 2 гамма-кванта, а ортопозитроний – в основном на 3 гамма-кванта.

3. Мюоний. Состоит из положительного  $\mu^+$ -мезона и электрона. Мюон аналогичен по свойствам позитрону, но имеет массу в 207 раз большую. Приведенная масса мюония почти равна приведенной массе атома водорода. Поэтому боровский радиус и потенциал ионизации мюония практически совпадают с соответствующими величинами для атома водорода.

4. Протоний. Представляет из себя связанное состояние протона  $p$  и антипротона  $\bar{p}$ . Масса антипротона равна массе протона, а заряд отрицательный  $-e$ . Недавно были получены экспериментальные данные по энергии ионизации и боровскому радиусу протония:  $J_{\text{прот.}} = 12,5$  кэВ ( $1 \text{ кэВ} = 10^3$  эВ),  $a_{\text{прот.}} = 57,6$  фм,  $1 \text{ фм} = 1 \text{ ферми} = 10^{-13}$  см – основная единица длины в ядерной физике.

Теоретические значения:

$$J_{\text{прот.}} = \frac{\mu_{\text{прот.}} \cdot e^4 \cdot c^2}{2\hbar^2 c^2} = \frac{938,27 \text{ МэВ}}{4 \cdot 137^2} = 2,49 \text{ МэВ.}$$

$$a_{\text{прот.}} = \frac{\hbar^2}{\mu e^2} = \frac{2}{m_p c^2} \cdot \frac{\hbar c \cdot \hbar c}{e^2} = 57,53 \text{ фм.}$$

5. Пионий. Представляет из себя связанное состояние  $\pi^+ \pi^-$ -мезонов. Недавно измеренные экспериментальные значения:  $J_{\text{пион.}} = 1,86$  кэВ,  $a_{\text{прот.}} = 386$  фм. Теоретические значения:

6.

$$J_{\text{пион.}} = \frac{m_{\pi} c^2}{2 \cdot 2} \left( \frac{e^2}{\hbar c} \right)^2 = \frac{139,658 \text{ МэВ}}{4 \cdot 137^2} = 1,8602 \text{ кэВ,}$$

$$a_{\text{пион.}} = \frac{\hbar^2 c^2}{\mu c^2 e^2} = \frac{2 \cdot 137 \cdot 1,97 \cdot 10^{-11} \text{ МэВ} \cdot \text{см}}{139,658 \text{ МэВ}} = 386,50 \text{ фм.}$$

Связь системы СИ (SI) и СГС (CGSE) осуществляется с помощью умножения заряда

на константу  $\frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}$ , где  $\epsilon_0$  – диэлектрическая

постоянная. Заряд в СГС-системе определяется

как  $e = \frac{q}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}$ , где  $q$  – заряд в СИ-системе,

тогда  $e^2 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}$  и  $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} = \frac{1}{137}$  –

постоянная тонкой структуры.

### Заключение

Согласие экспериментальных значений для потенциалов ионизации и боровских радиусов с теоретическими, полученными для водородоподобных систем, удивительно хорошее. Дело в том, что когда экспериментальные значения еще не были получены, некоторые физики предполагали, что поскольку основное взаимодействие между протонами и антипротонами и  $\pi^+ \pi^-$ -мезонами сильное (ядерное), то простые кулоновские формулы будут давать слишком грубую оценку. Как видим, опасения эти оказались напрасными. Связано это с короткодействующим характером ядерных сил. Максимум их приходится на расстояние в несколько ферми, тогда как соответствующие боровские радиусы значительно больше. На этих расстояниях ядерные силы малы и протоний и пионий

являются по существу чисто кулоновскими системами.

В заключение хотелось бы отметить, что в последнее время в ядерной физике широкое распространение получили так называемые *экзотические ядра* [2]. Это нестабильные ядра,

состоящие из протонов и нейтронов, однако соотношение между ними сильно отличается от того же для стабильных ядер. Взаимодействие между ними сильное (ядерное). В настоящее время разработаны специальные методы для получения и исследования подобных ядер.

#### Литература

- 1 Матвеев А.Н. Атомная физика. – М.: Высшая школа, 1989. – 439 с.
- 2 Жусупов М.А., Юшков А.В. Физика атомных ядер. Том 3. – Алматы, 2007. – 736 с.

#### References

- 1 A.N. Matveyev, Atomnaya fizika, M.: Vysshaya shkola, 1989. 439 s. (in russ).
- 2 M.A. Zhusupov, A.V. Yushkov. Fiziks atomnyh yader. Tom 3. Almaty 2007. 736s. (in russ).