Бошқаев Қ.А., Жәми Б.А.,
Қалымова Ж.А.

Ақ ергежейлі жұлдыздардың негізгі параметрлерін анықтауда Wolfram Mathematica бағдарламасын қолдану

Жұмыста ақ ергежейлі жұлдыздардың негізгі параметрлерін теориялық тұрғыда есептеуде Wolfram Mathematica бағдарламасын қолдану әдістемесі қарастырылған. Статикалық суық (температурасы нөлге тең) ақ ергежейлі жұлдыздардың негізгі параметрлері масса, радиус және тығыздық классикалық физика аясында есептелді. Бұл параметрлерді анықтау үшін Ньютондық гидростатикалық тепе-теңдік теңдеуі, массаның баланс және айныған электрондық газдың күй теңдеулерінен құралған жүйе шешілді. Теңдеулердің аналитикалық шешімдері жоқ болғандықтан, сандық шешімдері, Wolfram Mathematica жүйесінде арнайы бағдарлама жазылып, алынды. Алынған сандық шешімдер арқылы ақ ергежейлі жұлдыздың негізгі параметрлері анықталып, масса-радиус, масса-орталық тығыздық, радиус-орталық тығыздық қатынастары тұрғызылды. Есептеулердің барлығы үлгі ретінде егжей-тегжейлі әдістемелік нұсқаулықтармен көрсетілді. Жұмыс жоғарғы оқу орындарындағы физика, физика және астрономия мамандықтарының студенттері, магистранттары, докторанттары мен жас мамандарға арналған.

Түйін сөздер: Wolfram Mathematica, ақ ергежейлі жұлдыздар, айныған электрондық газ күй теңдеуі, гидростатикалық тепе-теңдік теңдеуі, массаның баланс теңдеуі.

Boshkayev K.A., Zhami B.A.,
Kalymova Zh.A.

Application of Wolfram Mathematica program to the determination of the main parameters of white dwarf stars

In this work the application methodology of Wolfram Mathematica program is considered in order to calculate the basic characteristics of white dwarf stars. The main quantities of static cold (zero temperature) white dwarfs such as the mass, radius, and density have been determined within the framework of classical physics. To determine these parameters the system, consisting of the differential equations such as the Newtonian equation of hydrostatic equilibrium, the mass balance equation and the equation of state of the degenerate electron gas, has been solved. These equations cannot be solved analytically, and therefore a special code has been written for solving the equations numerically. In terms of the numerical solutions the main parameters of white dwarfs have been computed and the mass-radius, mass-central density, radius-central density relations have been constructed. All calculations are shown in detail with methodological instructions as an example. The work is dedicated to the undergraduate, graduate, PhD students and young experts of higher educational institutions of specialties physics, physics and astronomy.

Key words: Wolfram Mathematica, white dwarf stars, equation of state degenerate electron gas, equation of hydrostatic equilibrium, equation of mass balance.

Бошкаев К.А., Жами Б.А.,
Калымова Ж.А.

Применение программы Wolfram Mathematica для определения основных параметров белых карликов

В работе рассматривается методика использования программы Wolfram Mathematica для вычисления основных параметров белых карликов. Основные параметры статических холодных (с нулевой температурой) белых карликов такие как масса, радиус и плотность были определены в рамках классической физики. Для определения этих параметров была решена система, состоящая из дифференциальных уравнений гидростатического равновесия Ньютона, баланса массы и уравнения состояния вырожденного электронного газа. Данные уравнения не решаются аналитическим путем и поэтому была написана специальная программа для решения уравнений численно. Посредством численного решения были определены основные параметры белых карликов и построены соотношения масса-радиус, масса-центральная плотность, радиус-центральная плотность. Все расчеты показаны подробно методическими инструкциями в качестве примера. Работа посвящена студентам, магистрантам, докторантам и молодым специалистам высшего учебного заведения по специальностям физика, физика и астрономия.

Ключевые слова: Wolfram Mathematica, белые карлики, уравнение состояния вырожденного электронного газа, уравнение гидростатического равновесия, уравнение баланса массы.

ӘОЖ 52; 524.3; 524.3-1/-8;
524.3-54; 378.02:37.016.

Бошқаев Қ.А., Жәми Б.А., *Қалымова Ж.А.

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті,
Қазақстан Республикасы, Алматы қ.
*E-mail: kalymova.erke@mail.ru

АҚ ЕРГЕЖЕЙЛІ ЖҰЛДЫЗДАРДЫҢ НЕГІЗГІ ПАРАМЕТРЛЕРІН АНЫҚТАУДА WOLFRAM MATHEMATICA БАҒДАРЛАМАСЫН ҚОЛДАНУ

Кіріспе

Бүкіл әлемде 25 жылдан астам уақыттан бері студенттер, оқытушылар және тағы да басқа қолданушылар үшін Mathematica таптырмас жүйе болып келеді. Wolfram Mathematica – компьютерлік, инженерлік, математика, химия, биология, генетика, әлеуметтану және т.б. түрлі ғылым салаларында қолданылатын компьютерлік алгебраның жүйесі. Бұл жүйенің негізін қалаған Стивен Вольфрам. Қазіргі уақытта бұл бағдарламаны Wolfram Research компаниясы жетілдіру үстінде. Жылдан жылға бағдарламаның мүмкіншілігі артып келеді. Бағдарламаны қолдану ыңғайлы, әрі техникалық мүмкіндігі өте жоғары. Mathematica-ның қазіргі таңда 5000-ға жуық функциясы бар. Техникалық есептеулер, соның ішінде мәліметтерді өңдеу, математикалық және алгебралық есептеулер, аналитикалық түрлендірулер, сандық есептер, графиктер мен дыбыс, суреттерді өңдеу және т.б. мүмкіншіліктері бар. 2016 жылы Mathematica жүйесінде ресми түрде тіркелген қолданушылар саны 2 миллионнан асты. Сонымен қатар студенттер үшін, жалпы қолданушылар үшін арнайы Mathematica бағдарламасын: қалай қолдану, мағлұматтарды қалай енгізу қажеттігін үйретуге арналған көптеген әдебиеттер бар [1-3].

Бүгінгі күнде жоғарғы оқу орындарында, түрлі ғылым салаларында есептеулер жүргізуде компьютерлік бағдарламаларды қолдану кең етек жаюда. Соның ішінде әсіресе Wolfram Mathematica бағдарламасы көп қолданылады. Жоғарғы оқу орындарындағы техникалық мамандықтарда әртүрлі пәндер оқытылады. Мысалы, физика мен астрономия мамандықтарының студенттеріне жалпы физика курсы, теориялық физика курстары, астрономия және астрофизика пәндері бойынша дәріс, семинар және лабораториялық сабақтар өтіледі. Осы пәндерді оқыту барысында кейбір есептеулер аналитикалық жолмен шешілмейді. Осындай жағдайда оларды сандық әдістерді пайдаланып шығару қажеттігі туындайды. Міне осындай есептеулерді Mathematica жүйесінде шығару өте ыңғайлы.

Жұмыстың мақсаты, жоғарғы оқу орындарындағы студенттерге Wolfram Mathematica бағдарламасының көмегімен ақ ергежейлі жұлдыздардың негізгі параметрлерін есептеу әдістемесін үлгі ретінде көрсету. Ал, өз кезегінде, ақ ергежейлі (АЕ) жұлдыз дегеніміз – массасы Күннің массасына жуық, орташа массасы $0{,}65\,M_{\odot}$, термоядролық синтезге жарамсыз, әрі өзінің жылулық қорының есебінен жарық шығаратын шағын жұлдыз. Оның орташа радиусы 10000 км, орташа тығыздығы 10^6 г/см^3. Ақ ергежейлі жұлдыздың қарапайым жұлдыздан негізгі айырмашылықтарының бірі – АЕ жұлдызды гравитациялық коллапсқа жеткізбей ұстап тұратын айныған электронды газдың қысымы [4, 5, 6]. Ал екінші бір ерекшелігі – оның өлшемінің кіші болатындығында. Қарапайым жұлдыздарда масса артқан сайын, радиус артатын болса, ал АЕ жұлдыздарда радиус кішірейе түседі. Бұл сәйкесінше гравитациялық өрістің күшейетінін көрсетеді. 2015 жылға дейін, ақ ергежейлі жұлдыздардың саны 9316-ға жетті, ал 2015 жылы бақыланған деректер бойынша жұлдыздардың саны қосымша 6576-ға толықтырылып, 2016 жылы барлығы 32000 ақ ергежейлі жұлдыз тіркелді [7, 8].

Ақ ергежейлі жұлдыздарды зерттеудің маңыздылығы орасан зор. Өйткені қазіргі таңда астрофизиканың космологияға қатысты бірнеше мәселелері бар. Соның бірі космологиялық арақашықтықтарды анықтауға мүмкіндік беретін Ia типті асқын жаңа жарылыс. Ал бұл жарылыстар ақ ергежейлі жұлдыздардың жарылуы салдарынан пайда болады. Астрономдар Ia типті асқын жаңа жарылысты Әлемнің үдемелі ұлғаю жылдамдығын анықтау мақсатында пайдаланады. Сонымен қатар, АЕ-нің біркелкі таралуы жұлдыздардың құрылымы және олардың біздің Галактикадағы эволюциясы туралы мәліметтерді қамтиды. Ақ ергежейлілер бас тізбектегі жұлдыздардың эволюциясының өте кең таралған өнімі бола отырып, барлық эволюцияланған жұлдыздардың шамамен 97 пайызын құрайды.

Ақ ергежейлілер бақыланбайтындай болып суып үлгеруі үшін жеткілікті уақыт өткен жоқ. Егер осы жайтты назарға алатын болсақ, онда олар біздің Галактиканың жасы туралы тәуелсіз мәліметтерді бере алады. Бастапқы және соңғы массалардың арақатынастарының көмегімен біз жұлдыз эволюциясы кезінде заттың шығынын зерттей аламыз. Ақ ергежейлілердің арғы тектері көміртегі, азот және оттегіні бас тізбектегі жұлдыз кезеңінде жоғалтады, олар біздің Галактиканың химиялық эволюциясына айтарлықтай үлес қосады және тіршіліктің пайда болуына жағдай жасайтын химиялық байланыстардың құрылуы үшін маңызды бастау болып табылады [9]. Сондықтан да, ақ ергежейлі жұлдыздарды зерттеу өте маңызды болып табылады.

Жұмыстың бірінші бөлімінде классикалық физикадағы массаның баланс және гидростатикалық тепе-теңдік теңдеулері; екінші бөлімде айныған электрондық газдың күй теңдеуі; үшінші бөлімде теңдеулерді өлшемсіз түрге келтіру жолдары; төртінші бөлімде шекаралық шарттар; бесінші бөлімде АЕ жұлдыздардың негізгі параметрлерін анықтауда шағын бағдарламалық кешен; алтыншы бөлімде жұмыстың нәтижесі қорытындыланды.

Массаның баланс және гидростатикалық тепе-теңдік теңдеулері

Айналмайтын жұлдыздардың тепе-теңдік конфигурацияларын тұрғызу үшін ең алдымен құрылым теңдеулерін жазып алу қажет. Әдебиетте бұл теңдеулер массаның баланс және қысымға қатысты гидростатикалық тепе-теңдік теңдеуі деп аталады [11]. Бұл теңдеулер келесі түрде беріледі:

$$\begin{cases} \dfrac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \\ \dfrac{dP(r)}{dr} = -\rho(r)\dfrac{\gamma m(r)}{r^2}, \end{cases} \qquad (1)$$

мұндағы, γ – гравитациялық тұрақты, $\rho(r)$ – жұлдыз затының тығыздығы, $m(r)$ – радиусы r-мен шектелген сфераның массасы, $P(r)$ – жұлдыз ішіндегі қысым, r – радиал координат.

Теңдеулерді шешу үшін бізге қысым мен тығыздық арасындағы байланысты көрсету қажет. Бұл байланысты көрсететін өрнек жұлдыз затының күй теңдеуі деп аталады. Ол аналитикалық өрнек түрінде, болмаса эмпирикалық кесте түрінде берілуі мүмкін. Жалпы жағдайда күй теңдеуіне заттың температурасы, заттың құрамындағы бөлшектердің әсерлесу энергиялары т.б. кіреді. Біздің жағдайда суық ақ ергежейлі жұлдыздар үшін күй теңдеуі айныған электрондық газдың тығыздығы мен қысымы арқылы анықталады.

Айныған электрондық газдың күй теңдеуі

Статистикалық физикада кванттық газдардың екі түрі бар. Егер кванттық (айныған) газдың құрамына кіретін бөлшектердің спині жартылай бүтін болса, олар фермиондар деп аталады және олардан тұратын газдар Ферми-Дирак статистикасымен сипатталады. Егер бөлшектердің спині бүтін болса, бөлшектер бозондар деп аталады, сәйкесінше олардан тұратын газдар Бозе-Эйнштейн статистикасымен анықталады. Ақ ергежейлі жұлдыздар мен нейтрондық жұлдыздар Ферми-Дирак статистикасымен сипатталатын айныған газдардан тұрады. Ал осы күнге дейін Бозе-Эйнштейн статистикасымен анықталатын жұлдыздар теориялық тұрғыда қарастырылғанмен, бақылау арқылы тіркелген жоқ. Тек температура нөлге жуық кезде Бозе-конденсант деп аталатын заттың бесінші күйі ретінде зертханаларда алынды [5, 10].

Чандрасекар жуықтауы бойынша ақ ергежейлі жұлдызда заттың тығыздығы иондардың тығыздығымен өрнектелсе, ал қысымы айныған электрондық газдың қысымымен сипаттталады:

$$\begin{cases} \rho(r) = \dfrac{\varepsilon(r)}{c^2} = \dfrac{32}{3}\left(\dfrac{m_e}{m_n}\right)^3 \dfrac{K_n}{c^2}\left(\dfrac{A}{Z}\right) y^3(r) \\ P(r) = \dfrac{4}{3}\left(\dfrac{m_e}{m_n}\right)^4 K_n \left[y(r)\left(2y^2(r) - 3\right)\sqrt{1+y^2(r)} + 3\ln\left(y(r) + \sqrt{1+y^2(r)}\right)\right], \end{cases} \tag{2}$$

мұндағы, $\rho(r)$ – айныған газдың құрамына кіретін иондардың тығыздығы, $\varepsilon(r)$ – иондардың энергия тығыздығы, c – жарықтың вакуумдегі жылдамдығы, $P(r)$ – айныған электрондық газдың қысымы, m_e – электронның массасы, m_n – нуклонның массасы, $K_n = m_n^4 c^5 / 32\pi^2\hbar^3$, $\hbar$ – келтірілген Планк тұрақтысы, $y(r) = p_e(r)/m_e c$ – электронның өлшемсіз Ферми импульсі, A – атомдық масса, Z – протондардың саны. (2) формулада қысым мен тығыз электронның өлшемсіз Ферми импульсі арқылы байланысқан. Осыны есептеулерді орындаған кезде ескеру қажет.

Жоғарыдағы жуықтауда, ақ ергежейлі жұлдыздер негізінен көміртегі ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$, оттегі ${}^{16}_{8}\mathrm{O}$ және магний ${}^{24}_{12}\mathrm{Mg}$ сияқты $\mathrm{A/Z} = 2$ болатын элементерден тұрады және электрлік бейтарап деп есептелінеді [5]. Осыған орай, біз де $\mathrm{A/Z} = 2$ деп аламыз.

Теңдеулерді өлшемсіз түрге келтіру

Сандық есептеулерді орындау барысында теңдеулерді өлшемсіз түрге келтіріп алу өте ыңғайлы және өрнектерді ықшам түрде жазып, сараптама жасауға мүмкіндік береді. Біздің жағдайда массаның баланс және гидростатикалық тепе-теңдік теңдеуі өлшемсіз түрде төмендегідей жазылады:

$$\begin{cases} \dfrac{dm^*(x)}{dx} = 4\pi x^2 \rho^*(x) \\ \dfrac{dP^*(x)}{dx} = -\rho^*(x)\dfrac{m^*(x)}{x^2}, \end{cases} \tag{3}$$

Күй теңдеуі өлшемсіз түрде:

$$\begin{cases} \rho^*(x) = \dfrac{1}{3}\dfrac{m_n}{m_e}\dfrac{1}{\pi^2}\left(\dfrac{A}{Z}\right) y^3(x) \\ P^*(x) = \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{8\pi^2}\left[y(x)\left(2y(x)^2 - 3\right)\sqrt{1+y^2(x)} + 3\ln\left(y(x) + \sqrt{1+y^2(x)}\right)\right], \end{cases} \tag{4}$$

мұндағы, b – өлшем бірлігі ұзындыққа сәйкес келетін параметр, x – өлшем бірлігі жоқ радиал координат, $m^*(x)$ – өлшемсіз масса, $\rho^*(x)$ – өлшемсіз тығыздық, $P^*(x)$ – өлшемсіз қысым. Өлшемсіз шамалардан қайта физикалық шамаларға өту үшін, төмендегі өрнектер қолданылады:

$$r = bx, \tag{5}$$

$$m(r) = \frac{c^2 b}{\gamma} m^*(x), \tag{6}$$

$$\rho(r) = \frac{c^2}{\gamma b^2} \rho^*(x), \tag{7}$$

$$P(r) = \frac{c^4}{\gamma b^2} P^*(x). \tag{8}$$

Толығырақ мәлімет алу үшін [11] әдебиетті қараңыз.

Шекаралық шарттар

Дифференциялық теңдеулер жүйелерін шешу үшін шекаралық шарттар берілу қажет. Бірінші шарт жұлдыздың ортасында беріледі, яғни $x = 0$-де тығыздықтың мәні $\rho^*(0) = \rho_c$ таңдалып алынады. Орталық тығыздықтан (4) өрнек арқылы орталық өлшемсіз Ферми импульсін анықтап аламыз $y^*(0) = y_c$. Сонымен орталық тығыздық берілсе, Ферми импульсі арқылы орталық қысымды тауып аламыз. Екінші шарт массаның регулярлық шарты деп аталады және ол жұлдыздың ортасында мына түрде беріледі: $m^*(0) = 0$ [5]. Үшінші шарт жұлдыздың бетінде $P^*(x_s) = 0$ арқылы беріледі, мұндағы $x = x_s$ жұлдыздың өлшемсіз толық радиусы.

Ал техникалық тұрғыдан дифференциалдық теңдеулерді сандық интегралдау $x_i = 10^{-8}$ бастап $x_f = 10^4$ дейін жүргізіледі және x_s осы аралықта жатады: $x_i < x_s < x_f$. Себебі, теңдеулерді $x_i = 0$ бастап интегралдау анықталмағандыққа алып келеді, сондықтан интегралдау шегін неғұрлым нөлге жуық саннан бастаймыз $x_i = 10^{-8}$. Жұлдыздың x_i өлшемсіз радиусына сәйкес элементінің тығыздығы $\rho^*(x_i) = 10^n \gamma b^2 / c^2$ деп алынады, мұндағы $n = 3, 4, 5, ..., 12$ аралығында өзгереді. Ал массаның регулярлық шарты x_i үшін енді төмендегідей жазылады

$$m^*(x_i) = \frac{4}{3} \pi x_i^3 \rho_c \tag{9}$$

Орталық қысым, жоғарыда көрсетілгендей (4) жүйедегі тығыздықтың өрнегінен $\rho^*(x_i) = \rho_c$ және $y(x_i) = y_c$ арқылы табылады.

Сандық интегралдаудың жоғарғы шегі $x_f = 10^4$ деп беріледі. Теңдеулердің сандық шешімі $x_i \le x \le x_s$ аралығында табылады, мұнда $P^*(x_s) = 0$ шарты орындалғанда сандық интегралдау тоқтатылады, яғни x_s ылғи x_f-тен кіші болуы шарт. Осылайша (5) және (8) теңдеулерінің көмегімен өлшемсіз шамалардан өлшем бірлігі бар физикалық шамаларды қайта қалпына келтіріп аламыз.

Ақ ергежейлі жұлдыздардың негізгі параметрлерін анықтауда шағын бағдарламалық кешен

Бұған дейінгі жұмыста, ақ ергежейлі жұлдыздардың параметрлерін теориялық тұрғыда есептеуді көрсеткен болатынбыз [11]. Қажетті есептеулерді жүргізбес бұрын, есептеулерді қай бірліктер жүйесінде жүргізетінімізді белгілеп алу қажет. Біздің есептеулер СГС (сантиметр-грамм-секунд) бірліктер жүйесінде жүргізіледі. Ең алдымен қажетті тұрақты шамаларды енгіземіз:

```
In[1]:= γ = 6.67*10^-8 (* cm^3/(g*s) *)
        c = 3*10^10 (* cm/s *)
        me = 9.10958215*10^-28 (*g*)
        mn = 1.6749*10^-24 (*g*)
        A = 2 Z
        Msun = 2*10^33 (*g*)
        ħ = 1.054571628*10^-27 (*s(g*cm/s)^2*)
        b := Sqrt[ħ^3/(me^4*γ*c)]

Out[1]= 6.67×10^-8
Out[2]= 30 000 000 000
Out[3]= 9.10958×10^-28
Out[4]= 1.6749×10^-24
Out[5]= 2 Z
Out[6]= 2 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000
Out[7]= 1.05457×10^-27
```

мұндағы: γ – гравитациялық тұрақты, c – жарық жылдамдығы, m_e – электронның массасы, m_n – нуклонның массасы, A – массалық сан, Z – протон саны, M_{sun} – Күн массасы, $\hbar$ – келтірілген Планк тұрақтысы, b – өлшем бірлігі ұзындыққа сәйкес келетін параметр. Жақшаның ішінде екі жұлдызшаның ортасында өлшем бірлік комментарий ретінде көрсетілген.

Өлшемсіз күй теңдеулерін мына түрде енгіземіз [11]:

```
In[9]:= ρ[x_] = 1/3 * mn/me * 1/π^2 * (A/Z) * y[x]^3
        P[x_] = 1/3 * 1/(8 π^2) * (y[x] * (2 * y[x]^2 - 3) * Sqrt[1 + y[x]^2] + 3 * Log[y[x] + Sqrt[1 + y[x]^2]])
```

Out[9]= $124.194\, y[x]^3$

Out[10]= $$\frac{3\, \mathrm{Log}\left[y[x]+\sqrt{1+y[x]^2}\right]+y[x]\sqrt{1+y[x]^2}\left(-3+2\,y[x]^2\right)}{24\,\pi^2}$$

Енді масса мен қысымның теңдеулері [5]:

```
In[11]:= eqM[x_] = M'[x] - 4 * π * x^2 * ρ[x]
         eqP[x_] = P'[x] + ρ[x] * M[x] / x^2
```

Out[11]= $-1560.66\, x^2\, y[x]^3 + M'[x]$

Out[12]= $$\frac{124.194\, M[x]\, y[x]^3}{x^2} +$$

$$\frac{4\,y[x]^2\sqrt{1+y[x]^2}\,y'[x]+\frac{y[x]^2\left(-3+2\,y[x]^2\right)y'[x]}{\sqrt{1+y[x]^2}}+\sqrt{1+y[x]^2}\left(-3+2\,y[x]^2\right)y'[x]+\frac{3\left(y'[x]+\frac{y[x]\,y'[x]}{\sqrt{1+y[x]^2}}\right)}{y[x]+\sqrt{1+y[x]^2}}}{24\,\pi^2}$$

Дифференциалдық теңдеулерді шешу үшін, шекаралық шарттар қажет, оларды төменгідей түрде енгіземіз [11]:

```
In[14]:= xi = 10^-8
         xf = 10^4
```

Out[14]= $\frac{1}{100\,000\,000}$

Out[15]= $10\,000$

Сандық шешімдерді NDsolve командасын қолдану арқылы аламыз [2].

Мұнда, қысым мен тығыздық арасында тек $y_c = y(x_i)$ Ферми импульсі арқылы ғана байланыс бар:

```
In[25]:= ρc = 10^n * γ * b^2 / c^2
```

Out[25]= 0.0000630769×10^n

n-ге кез-келген 3-12 аралығындағы мәнді берсек болады. Мысалы үшін, орталық тығыздықты 10^6 *г/см*^{3} деп таңдап алайық. Сонда, өлшемсіз тығыздық пен Ферми импульсі төмендегідей анықталатын болады. Ал орталық қысым Ферми импульсі арқылы күй теңдеуінен есептелінеді.

```
In[23]:= ρc = 10^6 * γ * b^2 / c^2
```

Out[23]= 63.0769

```
In[24]:= yc = (3 * me * π^2 * ρc / (2 * mn))^(1/3)
```

Out[24]= 0.797855

Осы тығыздыққа сәйкес келетін басқа параметрлерді анықтау үшін төмендегідей жазамыз:

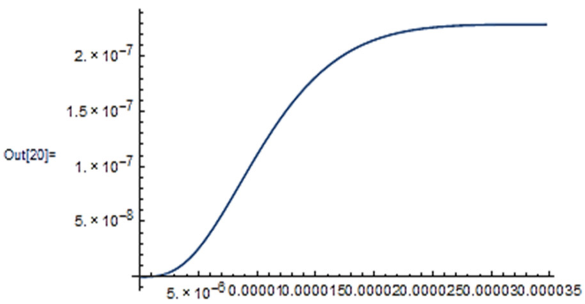
```
In[15]:= ρc = 10^6 * γ * b^2 / c^2
         Mi = 4 * π / 3 * xi^3 * ρc;
         yc = (3 * me * π^2 * ρc / (2 * mn))^(1/3);
         sol = NDSolve[{eqM[x] == 0, eqP[x] == 0, M[xi] == Mi, y[xi] == yc}, {M, y}, {x, xi, xf}];
         Ms[x_] = M[x] /. sol[[1]];
         Ps[x_] = P[x] /. sol[[1]];
         ρs[x_] = ρ[x] /. sol[[1]];
         ys[x_] = y[x] /. sol[[1]];
         xs = sol[[1, 1, 2, 1, 1, 2]];

Out[15]= 63.0769
```

Мұнда, шекаралық шарттарды енгізгенде $x_i = 0$ болу керек, бірақта бұл мән теңдеулерді интегралдауда анықталмағандыққа алып келеді. Сондықтан есептеулерімізде $x_i = 10^{-8}$ деп таңдап алдық. Регулярлық шарт бойынша егер $x_i = 0$ болса, сәйкесінше $M(0) = 0$. x_i-дің мәні 0-ден өзгеше болғандықтан, $x_i = 10^{-8}$-не сәйкес келетін массаның регулярлық шарты мына өрнек арқылы жазылады: $M_i = 4\pi / 3x_i^3 \rho c$.

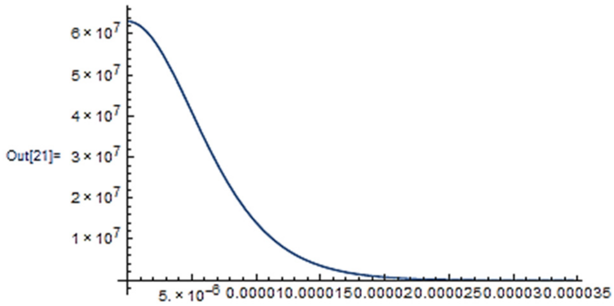
Анықталған өлшемсіз параметрлер бойынша графиктер тұрғызамыз (сурет-1, сурет-2, сурет-3, сурет-4). Бұл жұлдыздың физикалық қасиетін анықтауға мүмкіндік береді. 1-суретте, өлшемсіз массаның жұлдыз центрінен бастап, бетіне дейін қалай өзгеретіні көрсетілген. Масса жұлдыз бетіне қарай жақындаған сайын артады, ал бетінде максималды мәнге ие болады. 2-суретте, тығыздықтың жұлдыз центірен бастап, бетіне дейін қалай өзгеретіні көрсетілген. Яғни, тығыздық жұлдыздың бетіне жақындаған сайын азаяды, ал дәл бетінде нөл болады.

```
In[20]:= Plot[Ms[x], {x, xi, xs}]
```



1-сурет – Өлшемсіз масса мен өлшемсіз радиус арақатынасы

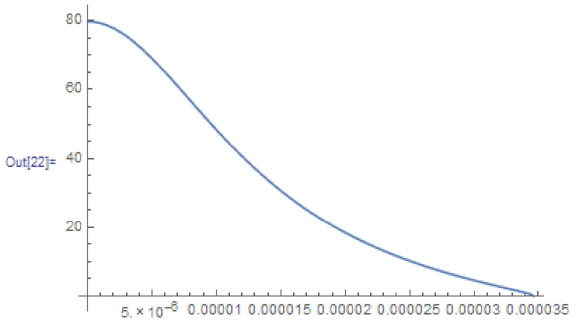
```
In[21]:= Plot[ρs[x], {x, xi, xs}]
```



2-сурет – Өлшемсіз тығыздық пен өлшемсіз радиус арақатынасы

3-суретте, Ферми импульсінің жұлдыз центрінен бастап, бетіне дейін қалай өзгеретіні көрсетілген. АЕ жұлдыздың бетіне жақындаған сайын, Ферми импульсі кеми түседі.

```
In[22]:= Plot[ys[x], {x, xi, xs}]
```

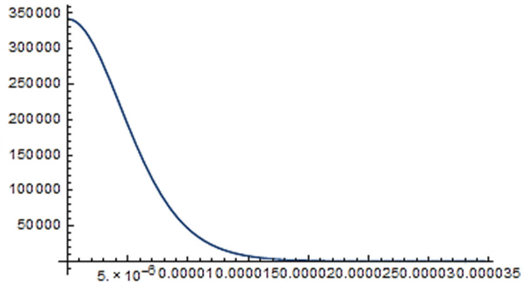


3-сурет – Өлшемсіз Ферми импульсі мен өлшемсіз радиус арақатынасы.

4-суретте, қысымның жұлдыз центрінен бастап бетіне дейін қалай өзгеретіні көрсетілген. Яғни, қысым жұлдыздың ортасында максимум мән қабылдап, бетіне жақындаған сайын азайып, дәл бетінде нөл болады.

```
In[23]:= Plot[Ps[x], {x, xi, xs}]
```

Out[23]=



4-сурет – Өлшемсіз қысым мен өлшемсіз радиус арақатынасы.

Енді бізге орталық тығыздық $10^6\, г/см^3$ болатын мәнге сәйкес келетін, толық радиус пен толық масса қажет. Ол үшін, бұл шамаларды жұлдыздың бетінде есептеп аламыз және олардың өлшем бірліктерін қалпына келтіреміз.

```
In[32]:= R = b*xs*10^-5, Ms[xs] / Msun b c^2 / γ

In[32]:= R = b*xs*10^-5

Out[32]= 10885.2
```

```
In[33]:= Ms[xs] / Msun b c^2 / γ

Out[33]= 0.390837
```

Біз жоғарыда есептеулер жүргізбес бұрын, есептеулерді СГС бірліктер жүйесінде жүргіземіз деп келісіп алған болатынбыз. Сондықтан да, жоғарыда көріп отырғанымыздай, радиусқа 10^{-5} – сін көбейтіп жазу арқылы, см-ді км-ге айналдырдық. Дәл осылай, массаға қатысты өлшем бірлікті СГС бірліктер жүйесінде жазу үшін, массаны bc^2/γ – ға көбейтіп, сәйкесінше массаны грамм арқылы жазып алдық. Осы шаманы Күннің массасына бөлу арқылы нормалаймыз.

Мұндағы: R – жұлдыздың толық радиусы, xs – әртүрлі тығыздыққа сәйкес келетін жұлдыздың өлшемсіз толық радиусы, Ms – өлшем бірліксіз масса, $\text{Msun} = (1{,}98892 \pm 0{,}00025)\cdot 10^{30}$ кг – Күн массасы. Толық масса мен толық радиусты анықтау үшін, тығыздықтың мәнін өзіміз қолдан береміз, яғни $n = 3{,}4....12$. Сондықтан, жоғарыдағы есептеулерді қайта Table командасы арқылы жүргіземіз [2, 3]:

```
In[30]:= Table[{ρc = 10^n * γ * b^2 / c^2;
    Mi = 4 * π / 3 * xi^3 * ρc;
    yc = (3 * me * π^2 * ρc / (2 * mn))^(1/3);
    sol = NDSolve[{eqM[x] == 0, eqP[x] == 0, M[xi] == Mi, y[xi] == yc}, {M, y}, {x, xi, xf}];
    Ms[x_] = M[x] /. sol[[1]];
    Ps[x_] = P[x] /. sol[[1]];
    ρs[x_] = ρ[x] /. sol[[1]];
    ys[x_] = y[x] /. sol[[1]];
    xs = sol[[1, 1, 2, 1, 1, 2]];
    10^n, R = b*xs*10^-5, Ms[xs] / Msun b c^2 / γ

   }, {n, 3, 12}]

Out[31]= {{1000, 35216.4, 0.0152354}, {10000, 23968.2, 0.0477419}, {100000, 16258.1, 0.144903},
    {1000000, 10885.2, 0.390837}, {10000000, 7039.25, 0.796174}, {100000000, 4300.93, 1.15465}, {1000000000, 2455.68, 1.33826},
    {10000000000, 1309.15, 1.40277}, {100000000000, 659.255, 1.42053}, {1000000000000, 319.53, 1.42477}}
```

Шыққан мәндерге атты меншіктеп береміз:

```
In[17]:= WD = {{1000, 35216.3987441911`, 0.015235376102718646`}, {10000, 23968.20015245043`, 0.047741890750817334`},
    {100000, 16258.078672800133`, 0.14490331980291135`}, {1000000, 10885.234819430023`, 0.3908373582421445`},
    {10000000, 7039.254266168939`, 0.7961736339830594`}, {100000000, 4300.930870835025`, 1.1546528991291936`},
    {1000000000, 2455.678467213655`, 1.3382592206133332`}, {10000000000, 1309.1455814488438`, 1.402772194109911`},
    {100000000000, 659.2547463815067`, 1.420525701906374`}, {1000000000000, 319.53038640434005`, 1.42477056670035`}}

Out[17]= {{1000, 35216.4, 0.0152354}, {10000, 23968.2, 0.0477419}, {100000, 16258.1, 0.144903},
    {1000000, 10885.2, 0.390837}, {10000000, 7039.25, 0.796174}, {100000000, 4300.93, 1.15465}, {1000000000, 2455.68, 1.33826},
    {10000000000, 1309.15, 1.40277}, {100000000000, 659.255, 1.42053}, {1000000000000, 319.53, 1.42477}}
```

Мәндерді кесте ретінде жазу үшін, TableForm командасына жүгінеміз:

```
In[18]:= WD // TableForm
```

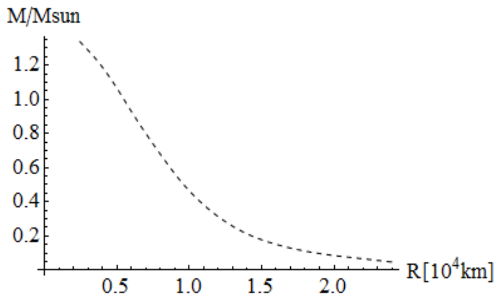
Out[18]//TableForm=

ρ central	Rinkm	M/Msun
1000	35216.4	0.0152354
10 000	23968.2	0.0477419
100 000	16258.1	0.144903
1 000 000	10885.2	0.390837
10 000 000	7039.25	0.796174
100 000 000	4300.93	1.15465
1 000 000 000	2455.68	1.33826
10 000 000 000	1309.15	1.40277
100 000 000 000	659.255	1.42053
1 000 000 000 000	319.53	1.42477

мұнда, $\rho_{central}$ - г/см^3-та жазылған орталық тығыздық, R_{inkm} - км-де жазылған жұлдыздың толық радиусы, M/M_{sun} - күнің массасына нормаланған жұлдыздың толық массасы. Жоғарыда анықталған параметрлер арқылы, M-R (масса-радиус), M-ρ (масса-тығыздық) және R-ρ (радиус-тығыздық) қатынастарын тұрғыздық (сурет-5, сурет-6, сурет-7). Осы суреттерде ақ ергежейлі жұлдыздардың негізгі қасиеттері сипатталған.

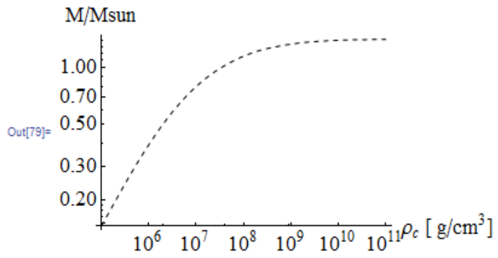
```
In[80]:= GraphWD = ListPlot[Table[{WD[[i, 2]] / 10^4, WD[[i, 3]]}, {i, 2, 7}], Joined → True, InterpolationOrder → 2,
   PlotStyle → {{Black, Dashed, Thin}, {Black, Dashed, Thin}, {Thin}, {Thin}}, AxesLabel → {"R[10^4km]", "M/Msun"},
   BaseStyle → {FontFamily → "Times", FontSize → 17}]
```

Out[80]=



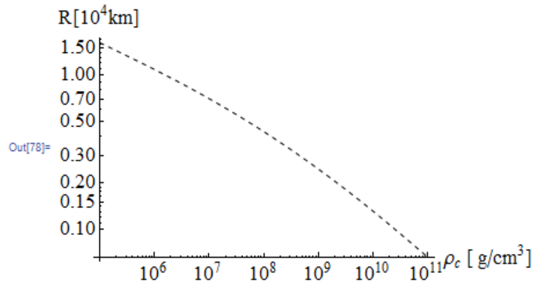
5-сурет – Классикалық физикадағы ақ ергежейлі жұлдыздардың M-R (масса-радиус) қатынасы. Бұл қатынас, АЕ жұлдыздарда масса артқан сайын, радиустың кеми түсетінін көрсетеді

```
In[79]:= GraphWD = ListLogLogPlot[Table[{WD[[i, 1]], WD[[i, 3]]}, {i, 3, 9}], Joined → True, InterpolationOrder → 2,
   PlotStyle → {{Black, Dashed, Thin}, {Black, Dashed, Thin}, {Thin}, {Thin}},
   AxesLabel → {"ρc [ g/cm^3]", "M/Msun"}, BaseStyle → {FontFamily → "Times", FontSize → 17}]
```



6-сурет – Классикалық физикадағы ақ ергежейлі жұлдыздардың М-ρ (масса-тығыздық) қатынасы. М-ρ (масса-тығыздық) қатынасы, АЕ жұлдыздарда масса артқан сайын сәйкесінше тығыздықтың да артатынын көрсетеді

```
In[78]:= GraphWD = ListLogLogPlot[Table[{WD[[i, 1]], WD[[i, 2]] / 10^4}, {i, 3, 9}], Joined → True, InterpolationOrder → 2,
    PlotStyle → {{Black, Dashed, Thin}, {Black, Dashed, Thin}, {Thin}, {Thin}},
    AxesLabel → {"ρc [ g/cm^3]", "R[10^4km]"}, BaseStyle → {FontFamily → "Times", FontSize → 17}]
```



7-сурет – Классикалық физикадағы ақ ергежейлі жұлдыздардың R-ρ (радиус-тығыздық) қатынасы. Бұл қатынас, АЕ жұлдыздарда тығыздық артқан сайын радиустың кемитінін көрсетеді

Wolfram Mathematica бағдарламасындағы командалар жайлы толық мәліметті [1, 2, 3] әдебиеттерден қараңыз.

Қорытынды

Жұмыста Wolfram Mathematica бағдарламасының көмегімен, ақ ергежейлі жұлдыздардың негізгі параметрлерін анықтау әдістемесі көрсетілді. Осы мақсатта, Ньютондық гидростатикалық тепе-теңдік теңдеуі, массаның баланс және айныған электрондық газдың күй теңдеулерінен құралған жүйе шешілді. Барлық теңдеулер, есептеулерді жеңілдету үшін, өлшемсіз түрге келтіріліп алынды. Теңдеулер аналитикалық тұрғыда шешілмейтін болғандықтан, алдын ала анықталған шекаралық шарттармен сандық түрде шешілді. Сандық шешімдер арқылы, ақ ергежейлі жұлдыздардың параметрлері есептелінді және масса-орталық тығыздық, масса-радиус, радиус-орталық тығыздық қатынастары алынды.

Барлық есептеулер Mathematica бағдарламасында қалай жүргізілу керектігі айқын, ретретімен көрсетілді. Шағын бағдарламалық кешен арқылы әуелі тұрақтылар енгізілді. Сосын құрылым теңдеулері мен күй теңдеулері жазылды. Одан кейін, шекаралық шарттар енгізілді. Мысал ретінде орталық тығыздықтың белгілі бір мәні таңдап алынып, соған сәйкес келетін Ферми импульсі есептелінді. Одан әрі, құрылым теңдеулері сандық түрде шешілді. Келесі қадамда, орталық тығыздықтың мәні белгілі бір аралықта өзгеретіндей етіп таңдалып алынып, осы аралыққа сәйкес келетін толық радиус пен масса есептелді. Ақырында, алынған сандық шешімдер арқылы қажетті қатынастар тұрғызылды. Алынған нәтижелер басқа әдебиеттерде көрсетілген нәтижелерге сәйкес келеді [5, 6, 7].

Бұл жұмыс, жоғарғы оқу орындарындағы техникалық мамандықтар, соның ішінде физика және астрономия мамандықтарының студенттеріне, жалпы физика курсы, теориялық физика курстары, астрономия және астрофизика пәндері бойынша дәріс, семинар немесе лабораториялық сабақтарда аналитикалық шешімі жоқ есептерді сандық түрде шешуде, таптырмас үлгі болып табылады. Сонымен қатар, жұмыстың жоғарыда айтылған пәндер бойынша әсіресе семинар және лабораториялық сабақтарында теориялық білімді бекітуде атқаратын рөлі орасан зор. Оқытушылар мен жас ғалым мамандарға әдістемелік құрал ретінде ұсынылады.

Жұмыс ҚР БҒМ-нің ИПС-11 грантының қолдауымен орындалды. Сонымен бірге, Қ.А. Бошқаев ҚР БҒМ-нің «2015-2016 жылғы үздік жас ғалым» шәкіртақысынан, «2015 жылғы ЖОО-ның үздік оқытушысы» грантынан қолдау алды.

Әдебиеттер

1 www.wolfram.com

2 Sadri Hassani. Mathematical Methods Using Mathematica: For Students of Physics and Related Fields. Springer, 2003. – 253 p.

3 Robert L. Zimmerman, Fredrick I. Olness. Mathematica for physics. Addison-Wesley. Second edition. – 2002. –645 p.

4 Kepler S.O., Pelisoli I., Koester D., Ourique G., Kleinman S.J., Romero A.D., Nitta A., Eisenstein D.J., Costa J.E.S., Kulebi B., Jordan S. New white dwarf stars in the Sloan Digital Sky Survey Data Release 10 // MNRAS. – 2015. – Vol.446. – P.4078-4087.

5 Shapiro S.L., Teukolsky S.A. Black holes, White dwarfs and Neutron stars // Cornel University, Ithaca, New York. – 1985. – P.69-86.

6 Chandrasekhar S. The Maximum Mass of Ideal White Dwarfs // The Astrophysical Journal. – 1931. – Vol.74 (1). – P.115-116.

7 Kepler S.O., Pelisoli I., Koester D., Ourique G., Romero A.D., Reindl N., Kleinman S.J., Eisenstein D.J. New white dwarf and subdwarf stars in the Sloan Digital Sky Survey Data Release 12 // MNRAS. – 2016. – Vol.455. – P.1-11.

8 Kepler S.O., Koester D., Ourique G. A white dwarf with anoxygen atmosphere // Science. – 2016. -Vol. 352(6281). – P. 67-70.

9 Kepler O., Kleinman S.J., Nitta A., Koester D., Castanheira B.G., Giovannini O., A.F.M., Costa, L. Althaus. White dwarf mass distribution in the SDSS // Mon. Not. R. Astron. – 2007. – Vol.375. – P.1315-1324.

10 Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статическая физика. Часть 1. – М.: Физматлит, 2010, – 616 с.

11 Бошқаев Қ.А., Жәми Б.А., Қалымова Ж.А., Балгимбеков Г.Ш., Таукенова А.С., Бришева Ж.Н. және Қойшыбаев Н. Ақ ергежейлі жұлдыздардың негізгі параметрлерін теориялық тұрғыдан анықтау // Известия НАН РК. – 2016.

References

1 www.wolfram.com

2 Sadri Hassani. Mathematical Methods Using Mathematica: For Students of Physics and Related Fields. Springer, 253 p.

3 Robert L. Zimmerman, Fredrick I. Olness. Mathematica for physics. Addison-Wesley. Second edition, 2002, 645 p.

4 S.O. Kepler, I. Pelisoli, D. Koester, G. Ourique, S.J. Kleinman, A.D. Romero, A. Nitta, D.J. Eisenstein, J.E.S. Costa, B. Kulebi, S. Jordan, MNRAS, 446, 4078-4087, (2015).

5 S.L. Shapiro, S.A. Teukolsky. Black holes, White dwarfs and Neutron stars // Cornel University, Ithaca, New York, 1985, p.69-86.

6 S. Chandrasekhar, The Astrophysical Journal, 74 (1), 115-116, (1931).

7 S.O. Kepler, I. Pelisoli, D. Koester, G. Ourique, A.D. Romero, N. Reindl, S.J. Kleinman, D.J. Eisenstein, MNRAS, 455, (1-11), (2016).

8 S.O. Kepler, D. Koester, G. Ourique, Science, 352(6281), 67-70, (2016).

9 O. Kepler, S.J. Kleinman, A. Nitta, D. Koester, B.G. Castanheira, O. Giovannini, A.F.M., Costa, L. Althaus, Mon. Not. R. Astron, 375, 1315-1324, (2007).

10 L.D. Landau, Ye.M. Lifshits, Staticheskaya fizika. Chast' 1. M.: Fizmatlit, 2010, 616 s. (in russ).

11 K.A. Boshkayev, B.A. Zhəmi, Zh.A. Kalymova, G.Sh. Balgimbekov, A.S. Taukenova, Zh.N. Brisheva zhəne N.Koyshybayev. Ak yergezheylí zhұldyzdardyң negízgí parametrlerín teoriyalyk̦ tұrġydan anyk̦tau // Izvestiya NAN RK, 2016. (in kaz).