

МРНТИ 29.01.07, 29.17.01, 29.05.03

**Абишев М.<sup>1\*</sup>, Малыбаев А.<sup>1</sup>, Кеведо Э.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Казахский национальный университет имени аль-Фараби,  
физико-технический факультет, г. Алматы, Казахстан

<sup>2</sup>Национальный автономный университет Мексики, г. Мехико, Мексика,  
\*e-mail: abishevme@mail.ru

## **ПРОСТРАНСТВО РАВНОВЕСНЫХ СОСТОЯНИЙ ГАЗА ВАН-ДЕР-ВААЛЬСА**

Мы исследуем геометрические свойства равновесного многообразия термодинамической системы, определяемое уравнением состояния Ван-дер-Ваальса. Мы используем формализм геометротермодинамики, чтобы получить результаты, которые инвариантны относительно преобразований Лежандра, то есть независимы от выбора термодинамического потенциала. Наиболее важные понятия геометротермодинамики представлены и объяснены простым способом, без использования технических подробностей и деталей. Метрика равновесного многообразия вычисляется в явном виде через соответствующие координаты, которые можно интерпретировать как внутренняя энергия и объем газа. Доказано, что равновесное многообразие искривляется из-за существования термодинамического взаимодействия. Это обозначает, что между частицами газа существует взаимодействие, которое исчезает в пределе идеального газа. Кроме того, доказано, что сингулярности кривизны находятся в тех точках, где возникают фазовые переходы первого рода.

**Ключевые слова:** геометротермодинамика, фазовое пространство, пространство равновесных состояний, энтропийное представление, термодинамическая кривизна.

Abishev M.<sup>1\*</sup>, Malybayev A.<sup>1</sup>, Quevedo H.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

<sup>2</sup>National Autonomous University of Mexico, Mexico, Mexico,  
\*e-mail: abishevme@mail.ru

### **The equilibrium manifold of the van der Waals gas**

We investigate the geometric properties of the equilibrium manifold of a thermodynamic system, determined by the Van der Waals equation of state. We use the formalism of geometrothermodynamics to obtain results that are invariant under the Legendre transforms, that is, independent of the choice of the thermodynamic potential. The most important concepts of geometrothermodynamics are presented and explained in a simple way, without the use of technical mathematical details. The metric of the equilibrium manifold is calculated in explicit form through the corresponding coordinates, which can be interpreted as the internal energy and volume of the gas. It is proved that the equilibrium manifold is curved due to the existence of thermodynamic interaction. This means that there is an interaction between the gas particles, which disappears in the ideal gas limit. In addition, it is proved that the curvature singularities are located at those points where first-order phase transitions occur.

**Key words:** geometrothermodynamics, phase space, equilibrium space, entropy representation, thermodynamic curvature.

Әбішев М.<sup>1\*</sup>, Малыбаев А.<sup>1</sup>, Кеведо Э.<sup>2</sup><sup>1</sup>Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті,  
физика-техникалық факультет, Алматы қ., Қазақстан<sup>2</sup>Мексика ұлттық автономды университеті, Мехико қ., Мексика,  
\*e-mail: abishevme@mail.ru**Ван-дер-Ваальс газы тепе-теңдік күйлер кеңістігі**

Ван-дер-Ваальс күй теңдеуімен анықталатын термодинамикалық жүйенің тепе-теңдік көпбейнесінің геометриялық қасиеттерін зерттедік. Біз Лежандр түрлендірулеріне қатысты инвариантты, яғни термодинамикалық потенциалды таңдаудан тәуелсіз нәтижелерге қол жеткізу үшін геометротермодинамика формализмін қолдандық. Геометротермодинамиканың ең маңызды тұжырымдары техникалық ұсақ-түйек мәліметтер мен егжей-тегжейлеріне тоқталмай қарапайым түрде көрсетіліп, түсіндіріледі. Тепе-теңдік көпбейнесі метрикасы газдың ішкі энергиясы мен көлемі ретінде түсіндірілетін сәйкес координаттар арқылы айқын түрде есептелген. Тепе-теңдік көпбейнесі термодинамикалық әсерлесу бар болуы салдарынан қисаятындығы дәлелденді. Бұл газ бөлшектері арасында идеал газ шегінде жоғалып кететін өзара әсерлесу бар екендігін білдіреді. Сонымен қатар, қисықтық сингулярлығы бірінші текті фазалық ауысу орын алған нүктелерде болатыны дәлелденген.

**Түйін сөздер:** геометротермодинамика, фазалық кеңістік, тепе-теңдік күйлер кеңістігі, энтропиялық көрініс, термодинамикалық қисықтық.

**Введение**

Известно, что в природе существуют четыре различных вида взаимодействий и все они могут быть выражены посредством дифференциальной геометрии. Действительно, Эйнштейн предложил удивительный принцип “напряженность поля = кривизна” для объяснения физики гравитационного поля [1, 2]. В этом случае, кривизна означает кривизну пространства-времени, т.е. риманово многообразие с метрикой, согласующейся со связью, которая является единственной, вследствие предположения, что нет тензора кручения. Вторым элементом общей теории относительности является уравнения Эйнштейна  $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu}$ , которые впервые установили удивительный принцип “геометрия = энергия”.

Фундаментальные концепции этого принципа были спорными, когда впервые были сформулированы; однако, экспериментальное доказательство показало их правильность и даже современные обобщения теории Эйнштейна следуют этим принципам. С другой стороны, так как напряженность поля может рассматриваться как мера гравитационного взаимодействия, мы можем сделать вывод, что общая идея общей теории относительности может быть выражена в принципе “взаимодействие = кривизна”.

Открытие Янгом и Миллсом [3] того, что электромагнетизм может быть интерпретирован как калибровочная абелева теория и что

неабелевы обобщения могут быть сконструированы по похожему пути, и представляет главное достижение. Сегодня известно, что электромагнетизм может быть описан геометрически через элементы главного расслоения. В этом случае базовое многообразие является пространством-временем Минковского, а стандартный слой является калибровочной группой  $U(1)$ , которая представляет внутреннюю симметрию электромагнетизма, и связь вдоль слоя будет локальным поперечным сечением, которое принимает значения в алгебре  $U(1)$ .

Этот результат открыл возможность фиксирования исходной метрики, в соответствии с желаемыми свойствами базового многообразия и выбора различных связностей как локальных поперечных сечений главного расслоения. Особенно это было показано, что связности со значениями алгебры Ли калибровочных групп  $SU(2)$  и  $SU(3)$  могут быть использованы, чтобы показать внутренние симметрии слабого и сильного взаимодействий, соответственно. Этот интересный геометрический подход представляет основу для конструирования современных калибровочных теорий, которые используются как стартовая точка для формулирования физики электромагнитного, слабого и сильного взаимодействий. Отсюда следует, что принцип “кривизна = взаимодействие” выполняется для всех известных сил в природе, и является фундаментальным элементом для конструирования соответствующих калибровочных теорий.

Сейчас рассмотрим случай термодинамической системы. В очень широком смысле

можно сказать, что в термодинамической системе составляющие части являются предметом для действия всех известных сил. Однако нет необходимости рассматривать все физические детали каждого взаимодействия. В действительности, благодаря большому числу частиц, заключенных в системе, только статический подход возможен, из которого можно получить средние значения физических величин, таких как, энергия, энтропия и т.д. Возникает вопрос, где еще возможно найти геометрическое конструирование, для которого принцип “кривизна = термодинамическое взаимодействие” действителен. В данной работе мы увидим, что формализм геометротермодинамики [4] удовлетворяет этому требованию. Во-первых, мы должны заметить, что наша интерпретация термодинамического взаимодействия основывается на статистическом подходе к термодинамике, в котором все свойства системы могут быть получены из точного вида соответствующего Гамильтониана [5]. Как обычно, взаимодействие между частицами системы описывается потенциальной частью Гамильтониана. Следовательно, если потенциал исчезает, мы говорим, что система не обладает термодинамическим взаимодействием.

В этой работе мы представим формализм геометротермодинамики, используя Риманову контактную геометрию для определения термодинамического фазового многообразия и равновесного многообразия. Здесь объясняется почему необходимо вводить вспомогательное фазовое многообразие, чтобы учитывать в подходящей форме преобразования Лежандра. Мы используем наш формализм, чтобы изучать геометрические свойства равновесного многообразия газа Ван-дер-Ваальса и находим, что в общем оно искривлено для произвольных значений параметров, за исключением предельного случая идеального газа, для которого многообразие превращается в плоское. Более того, показано, что сингулярности кривизны расположены в тех точках, где возникают фазовые переходы первого рода.

Эта статья организована следующим образом. Сначала мы представляем главные принципы Римановой контактной геометрии, которая необходима для определения фазового многообразия и его равновесного подмногообразия. Дана характерная метрика, которая инвариантна относительно полных преобразований Лежандра, и используется для описания систем, в

которых имеют место фазовые переходы первого рода. Затем мы исследуем геометрические свойства равновесного многообразия для системы Ван-дер-Ваальса, его кривизны и сингулярностей. В заключении мы обсуждаем наши результаты. Во всей статье мы используем единицы, в которых  $k_B = 1$ .

### Основные положения формализма геометротермодинамики

В формализме геометротермодинамики (ГТД) используются геометрические подходы, которые используются в общей теории относительности (ОТО).

Для описания термодинамической системы в ГТД, необходимо сделать следующее:

- построить термодинамическое фазовое пространство  $\tau$ , подпространством которого является пространство равновесных состояний  $\varepsilon$ , геометрические свойства которого описывают термодинамические свойства соответствующей термодинамической системы.

- Затем вводится фундаментальная форма Гиббса  $\theta$ .

- Для пространства  $\tau$  вводят так называемую термодинамическую метрику  $G$ .

- Затем находим метрику  $g$  для пространства равновесных состояний  $\varepsilon$ .

- Зная метрику  $g$ , мы рассчитываем кривизну пространства равновесных состояний, которая называется термодинамической кривизной.

Согласно формализму ГТД тензор кривизны (термодинамическая кривизна) является мерой взаимодействия между компонентами термодинамической системы.

Триплет  $(\tau, \theta, G)$  называется Римановым контактным многообразием и оно выражает структуру и геометрические свойства классической термодинамической системы.

Для построения  $\tau$  необходимо определить: экстенсивные переменные, например, энтропию  $S$ , объём  $V$ , затем интенсивные переменные, скажем температуру  $T$ , давление  $P$ , а также термодинамический потенциал, скажем внутреннюю энергию  $U$ . Эти термодинамические переменные используются как координаты в 5-мерном фазовом пространстве  $\tau(S, U, V, T, P)$ .

Для пространства равновесных состояний  $\varepsilon$  в качестве координат мы выбираем переменные  $(S, V)$ . Затем вводится фундаментальная форма Гиббса  $\theta$ , которая имеет вид:

$$\theta = dU - TdS + PdV \quad (1)$$

В этом случае фундаментальное уравнение имеет энергетическое представление [6]:

$$U = U(S, V). \quad (2)$$

Для описания структуры пространства  $\tau$  вводят так называемую термодинамическую метрику  $G(S, U, V, T, P)$ . Фундаментальная форма Гиббса  $\theta$  и метрика  $G$  инвариантны относительно преобразований Лежандра для случая системы с 2 термодинамическими степенями

свободы ( $S, V$ ), то есть геометрическая структура фазового пространства  $\tau$  инвариантна относительно преобразований Лежандра.

Для случая системы с двумя степенями свободы, использующей энергетическое представление, преобразования Лежандра для фазового пространства  $\tau$  выражаются как преобразование координат в следующем виде:  $(U, S, V, T, P) \rightarrow (\tilde{U}, \tilde{S}, \tilde{V}, \tilde{T}, \tilde{P})$ . Эти преобразования можно осуществить следующими способами [7]:

$$\tilde{U}_1 = U - TS, \quad S = -\tilde{T}, \quad T = \tilde{S}, \quad V = \tilde{V}, \quad P = \tilde{P} \quad (3)$$

$$\tilde{U}_2 = U + PV, \quad S = \tilde{S}, \quad T = \tilde{T}, \quad V = \tilde{P}, \quad -P = \tilde{V} \quad (4)$$

$$\tilde{U}_3 = U - TS + PV, \quad S = -\tilde{T}, \quad T = \tilde{S}, \quad V = \tilde{P}, \quad -P = \tilde{V} \quad (5)$$

где  $\tilde{U}_1 = F$  свободная энергия Гельмгольца,

$\tilde{U}_2 = H$  энтальпия,

$\tilde{U}_3 = G$  потенциал Гиббса.

Если через  $\tilde{\theta}_i, i = 1, 2, 3$  мы обозначим результат, полученный после применения преобразования Лежандра (3)-(5) к фундаментальной форме Гиббса  $\theta$ , то можно показать, что:

$$\tilde{\theta}_i = d\tilde{U}_i - \tilde{T}d\tilde{S} + \tilde{P}d\tilde{V} \quad (6)$$

это означает, что  $\theta$  является Лежандр-инвариантным геометрическим объектом.

В формализме геометротермодинамике необходимо, чтобы метрика  $G$  для фазового пространства  $\tau$  тоже являлась Лежандр-инвариантной. Метрику  $G$  можно написать в следующем виде:

$$G = (dU - TdS + PdV)^2 + (ST)^{2k+1} dSdT + (VP)^{2k+1} dVdP \quad (7)$$

Если через  $\tilde{G}_i, i = 1, 2, 3$  мы обозначим результат, полученный после применения преобразования Лежандра (3)-(5) к метрике  $G$ , можно показать, что:

$$\tilde{G}_i = (d\tilde{U}_i - \tilde{T}d\tilde{S} + \tilde{P}d\tilde{V})^2 + (\tilde{S}\tilde{T})^{2k+1} d\tilde{S}d\tilde{T} + (\tilde{V}\tilde{P})^{2k+1} d\tilde{V}d\tilde{P} \quad (8)$$

это означает, что  $G$  является Лежандр-инвариантным геометрическим объектом.

Следующим важным элементом формализма геометротермодинамики является пространство равновесных состояний  $\varepsilon$ . В качестве координат  $\varepsilon$  возьмем следующий набор экстенсивных переменных ( $S, V$ ). Тогда оставшиеся координаты  $\tau$  должны быть функциями  $S$  и  $V$ , то есть:

$$U = U(S, V), \quad T = T(S, V), \quad P = P(S, V) \quad (9)$$

Далее мы требуем, чтобы проекция фундаментальной формы Гиббса  $\theta$  на пространство равновесных состояний  $\varepsilon$  была равна нулю:

$$\theta|_{\varepsilon} = 0 \Leftrightarrow dU = TdS - PdV \quad (10)$$

Так как  $U = U(S, V)$ , следовательно:

$$\frac{\partial U}{\partial S} = T, \quad \frac{\partial U}{\partial V} = -P \quad (11)$$

В классической термодинамике эти соотношения являются условиями термодинамического равновесия. Проецируя метрику  $G$

фазового пространства  $\tau$  на  $\varepsilon$ , можно получить метрику  $g$  для пространства равновесных состояний:

$$G|_{\varepsilon} = g = g(S, V) \quad (12)$$

Тогда имеем, используя (10)-(12):

$$g = \left( S \frac{\partial U}{\partial S} \right)^{2k+1} \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} dS^2 + \left( V \frac{\partial U}{\partial V} \right)^{2k+1} \frac{\partial^2 U}{\partial V^2} dV^2 + \left[ \left( S \frac{\partial U}{\partial S} \right)^{2k+1} + \left( V \frac{\partial U}{\partial V} \right)^{2k+1} \right] \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial V} dS dV \quad (13)$$

В дальнейшем для системы с двумя степенями свободы мы будем использовать энтропийное представление. Тогда фундаментальное уравнение имеет вид  $S = S(U, V)$ . Преобразуя уравнение (1) можно получить энтропийное представление формы Гиббса  $\theta$ :

$$\tilde{S}_1 = S - U\beta, \quad U = -\tilde{\beta}, \quad \beta = \tilde{U}, \quad V = \tilde{V}, \quad \vartheta = \tilde{\vartheta} \quad (16)$$

$$\tilde{S}_2 = S - V\vartheta, \quad U = \tilde{U}, \quad \beta = \tilde{\beta}, \quad V = -\tilde{\vartheta}, \quad \vartheta = \tilde{V} \quad (17)$$

$$\tilde{S}_3 = S - U\beta - V\vartheta, \quad U = -\tilde{\beta}, \quad \beta = \tilde{U}, \quad V = -\tilde{\vartheta}, \quad \vartheta = \tilde{V} \quad (18)$$

Здесь для пространства равновесных состояний  $\varepsilon$  в качестве координат возьмем экстенсивные переменные  $(U, V)$ . Тогда оставшиеся координаты  $\tau$  должны быть функциями  $U$  и  $V$ :

$$S = S(U, V), \quad \beta = \beta(U, V), \quad \vartheta = \vartheta(U, V) \quad (19)$$

Как ранее было отмечено, требуем следующие условия:

$$\theta_s|_{\varepsilon} = 0, \quad G_s|_{\varepsilon} = g_s = g_s(U, V) \quad (20)$$

Из первого условия получаем:

$$dS = \frac{1}{T} dU + \frac{P}{T} dV, \quad \frac{\partial S}{\partial U} = \frac{1}{T}, \quad \frac{\partial S}{\partial V} = \frac{P}{T} \quad (21)$$

$$\theta_s = dS - \frac{1}{T} dU - \frac{P}{T} dV \quad (14)$$

Тогда фазовое пространство  $\tau$  будет иметь следующие координаты  $(S, U, V, \beta, \vartheta)$ , где  $\beta = \frac{1}{T}$ ,  $\vartheta = \frac{P}{T}$ . В этом случае метрика  $G$  фазового пространства  $\mathcal{T}$  будет иметь вид:

$$G_s = \left( dS - \frac{1}{T} dU - \frac{P}{T} dV \right)^2 + \left( \frac{U}{T} \right)^{2k+1} dU d\left( \frac{1}{T} \right) + \left( \frac{VP}{T} \right)^{2k+1} dV d\left( \frac{P}{T} \right) \quad (15)$$

Преобразования Лежандра для фазового пространства  $\tau$  выражаются как преобразование координат в следующем виде:  $(U, S, V, \beta, \vartheta) \rightarrow (\tilde{U}, \tilde{S}, \tilde{V}, \tilde{\beta}, \tilde{\vartheta})$ . Эти преобразования можно осуществить следующими способами:

Из второго условия получаем:

$$g_s = \left( U \frac{\partial S}{\partial U} \right)^{2k+1} \frac{\partial^2 S}{\partial U^2} dU^2 + \left( V \frac{\partial S}{\partial V} \right)^{2k+1} \frac{\partial^2 S}{\partial V^2} dV^2 + \left[ \left( U \frac{\partial S}{\partial U} \right)^{2k+1} + \left( V \frac{\partial S}{\partial V} \right)^{2k+1} \right] \frac{\partial^2 S}{\partial U \partial V} dU dV \quad (22)$$

### Газ Ван-дер-Ваальса

Давайте рассмотрим фундаментальное уравнение для газа Ван-дер-Ваальса в энтропийном представлении:

$$S = \frac{3}{2} \ln \left( U + \frac{a}{V} \right) + \ln(V - b) \quad (23)$$

где  $U$  – внутренняя энергия,  $V$  – объем,  $a$  и  $b$  – постоянные. Параметр  $b$  ассоциируется с

объемом молекул газа и играет качественную роль в описании, где  $a$  ответственно за термодинамическое взаимодействие. Соответствующие интенсивные переменные могут быть получены из первого закона термодинамики  $dS = \frac{1}{T} dU + \frac{P}{T} dV$  как:

$$T = \left( \frac{\partial S}{\partial U} \right)^{-1} = \frac{2}{3} \left( U + \frac{a}{V} \right),$$

$$P = \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right) \left( \frac{\partial S}{\partial U} \right)^{-1} = \frac{2UV^2 - aV + 3ab}{3V^2(V-b)} \quad (24)$$

Метрика в этом случае будет ( $k = 0$ ):

$$g = \left( \frac{\partial S}{\partial U} U + \frac{\partial S}{\partial V} V \right)$$

$$\left( \frac{\partial^2 S}{\partial U^2} dU^2 + 2 \frac{\partial^2 S}{\partial U \partial V} dU dV + \frac{\partial^2 S}{\partial V^2} dV^2 \right) \quad (25)$$

которая определяет равновесное многообразие. Тогда для газа Ван-дер-Ваальса она будет выглядеть:

$$R = \frac{N_{vdW}(U, V)}{(V^3 U - 2aV^2 + 6Vba - 3ab^2)^2 (5UV^2 - 3UVb - aV + 3ab)^3} \quad (29)$$

таким образом, сингулярности кривизны определяются как нули двух полиномов, входящих в знаменатель. Функция  $N_{vdW}(U, V)$  есть полином, который отличен от нуля в тех точках, где знаменатель исчезает. Используя выражение для давления, данное в уравнении (24) можно показать, что:

$$V^3 U - 2aV^2 + 6Vba - 3ab^2 =$$

$$= \frac{3}{2} (V-b) (PV^3 - aV + 2ab) \quad (30)$$

и

$$5UV^2 - 3UVb - aV + 3ab =$$

$$= 3V(V-b)(U + PV) \quad (31)$$

$$g = \frac{1}{2} \frac{5UV^2 - 3UVb - aV + 3ab}{(UV+a)^3 (V-b)}$$

$$\left[ -\frac{3}{2} V^2 dU^2 + 3adUdV - \frac{W(U, V)}{2V^2 (V-b)^2} dV^2 \right] \quad (26)$$

где

$$W(U, V) = 2V^4 U^2 - 2V^3 Ua - a^2 V^2 +$$

$$+ 12aV^2 bU + 6Vba^2 - 6ab^2 UV - 3b^2 a^2 \quad (27)$$

В предельном случае  $a = 0$  и  $b = 0$  (предел идеального газа) вышенаписанное выражение уменьшается до метрики:

$$g = -\frac{5}{2} \left( \frac{3}{2} \frac{dU^2}{U^2} + \frac{dV^2}{V^2} \right) \quad (28)$$

тензор кривизны которого равен нулю. Это подтверждает, что равновесное многообразие идеального газа плоское, означающее отсутствие термодинамического взаимодействия.

В общем случае  $a \neq 0$  и  $b \neq 0$ , тензор кривизны отличен от нуля. Мы объясняем этот результат как условие присутствия термодинамического взаимодействия. Соответствующий скаляр кривизны может быть записан как:

## Заключение

В этой работе мы представили результат формализма геометротермодинамики, начинающийся с геометрических свойств равновесного многообразия и требования, что они не зависят от выбора термодинамического потенциала. Таким образом, становится ясным, почему необходимо вводить вспомогательное фазовое многообразие, где хорошо определены преобразования Лежандра. Так как равновесное многообразие определено посредством сглаживания как подпространство фазового многообразия, которое заведомо Лежандр-инвариантно, и, следовательно, оно наследует свойство инвариантности.

Мы используем специфическую метрику фазового многообразия, которая инвариантна относительно полных преобразований Лежандра, чтобы вывести метрику для равновесного многообразия. Было показано, что вся геометри-

ческая структура равновесного многообразия определяется только через фундаментальное уравнение.

Случай термодинамической системы, описываемый уравнением Ван-дер-Ваальсом был детально проанализирован. Во-первых, мы нашли точный вид метрики равновесного многообразия и показали, что она соответствует, в общем, искривленному пространству и показали, что кривизна может быть использована как мера термодинамического взаимодействия. В предельном случае, то есть для идеального газа, кривизна исчезает, что характерно для системы без термодинамического взаимодействия. Было показано, что сингулярности кривизны равновесного многообразия Ван-дер-Ваальса расположены в тех местах, где имеет место фазовые переходы первого рода. Конечно, это является пределом справедливости равновесной термодинамики, и, следовательно, формализма геометротермодинамики.

## Литература

- 1 Misner C. W., Thorne K. S., and Wheeler J. A. Gravitation. – San Francisco: W. H. Freeman, 1973.
- 2 Frankel T., The geometry of physics: An introduction. – UK, Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
- 3 Yang C. N., Mills R. L. Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance // Physical Review. – 1954. – Vol. 96. – No. 1. – P. 191.
- 4 Quevedo H. Geometrothermodynamics // J. Math. Phys. – 2007. – Vol. 48. – P. 1-3.
- 5 Greiner W., Neise L. and Stocker H. Thermodynamics and statistical mechanics. – New York: Springer, 1995.
- 6 Callen H. B. Thermodynamics and an introduction to thermostatistics. – New York: John Wiley & Sons Inc., 1985.
- 7 Arnold V. I. Mathematical Methods of Classical Mechanics. – New York: Springer, 1980.
- 8 Quevedo H. Curvature as a measure of the thermodynamic interaction // J. of the Korean Physical Society. – 2010. – Vol. 57. – No. 3. – P. 646-650.
- 9 Alvarez J., Quevedo H., Sanches A. Unified geometric description of black hole thermodynamics // Physical Review. – 2008. – Vol. 77. – P. 2-5.
- 10 Quevedo H., Sanches A. Geometrothermodynamics of black holes in two dimensions // Physical Review. – 2009. – Vol. 79. – P. 1-3.
- 11 Quevedo H. Geometrothermodynamics of black holes // Gen. Relativ. Gravit. – 2008. – Vol. 40. – P. 971-984.
- 12 Bravetti A., Momeni D., Myrzakulov R., Quevedo H. Geometrothermodynamics of higher dimensional black holes // Gen. Relativ. Gravit. – 2013. – Vol. 45. – P. 1603-1617.
- 13 Quevedo H., Sanchez A., Vazquez A. Relativistic like structure of classical thermodynamics // Gen. Relativ. Gravit. – 2015. – Vol. 47. – No. 36. – P. 1-18.
- 14 Quevedo H., Sanchez A. Geometrothermodynamics of asymptotically Anti-de Sitter black holes // J. High Energy Phys. – 2008. – Vol. 9. – No. 34.
- 15 Bravetti A., Momeni D., Myrzakulov R., Altaibayeva A. Geometrothermodynamics of Myers-Perry Black Holes // Advances in High Energy Physics. – 2013. – Vol. 2013. – P. 1-9
- 16 Caratheodory C. Examination of the foundations of thermodynamics // Math. Ann. – 1909. – Vol. 67. – P. 355
- 17 Weinhold F. Metric geometry of equilibrium thermodynamics // J. Chem. Phys. – 1975. – Vol. 63. – P. 2479
- 18 Bekenstein J. D. Black holes and entropy // Physical Review. – 1973. – Vol. 7. – P. 2333.
- 19 Ruppeiner G. Thermodynamics: a Riemannian geometric model // Physical Review. – 1979. – Vol. 20. – P. 1608.
- 20 Davies P. C. Thermodynamics of black holes // Rep. Prog. Phys. – 1978. – Vol. 41. – P. 1313.

## References

- 1 C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, Gravitation, (W. H. Freeman, San Francisco, 1973).
- 2 T. Frankel, The geometry of physics: An introduction. (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1997).
- 3 C. N. Yang, R. L. Mills, Phys. Rev., 96(1), 191, (1954).
- 4 H. Quevedo, J. Math. Phys., 48, 1-3, (2007).

- 5 W. Greiner, L. Neise and H. Stocker, Thermodynamics and statistical mechanics, (Springer, New York, 1995).
- 6 H. B. Callen, Thermodynamics and an introduction to thermostatics, (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1985).
- 7 V. I. Arnold, Mathematical Methods of Classical Mechanics. (Springer, New York, 1980).
- 8 H. Quevedo, J. of the Korean Physical Society, 57(3), 646-650, (2010).
- 9 J. Alvarez, H. Quevedo, A. Sanches, Phys. Review D, 77, 2-5, (2008).
- 10 H. Quevedo, A. Sanches, Physical Review D, 79, 1-3, (2009).
- 11 H. Quevedo, Gen. Relativ. Gravit., 40, 971-984, (2008).
- 12 A. Bravetti, D. Momeni, R. Myrzakulov, H. Quevedo, Gen. Relativ. Gravit. 45, 1603-1617, (2013).
- 13 H. Quevedo, A. Sanchez, A. Vázquez, Gen. Relativ. Gravit., 47(36), 1-18, (2015).
- 14 H. Quevedo, A. Sanchez, J. High Energy Phys., 9(34), (2008).
- 15 A. Bravetti, D. Momeni, R. Myrzakulov, A. Altaibayeva, Advances in High Energy Physics, 2013, 1-9, (2013).
- 16 C. Caratheodory, Math. Ann. 67, 355, (1909).
- 17 F. Weinhold, J. Chem. Phys. 63, 2479, (1975).
- 18 J. D. Bekenstein, Physical Review, 7, 2333, (1973).
- 19 G. Ruppeiner, Physical Review, 20, 1608, (1979).
- 20 P. C. Davies, Rep. Prog. Phys., 41, 1313, (1978).