

**Демченко Б.И.<sup>1</sup>, Комаров А.А.<sup>1,2\*</sup>, Серебрянский А.В.<sup>1</sup>,  
Усольцева Л.А.<sup>1</sup>, Акниязов Ч.Б.<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Астрофизический институт им. В. Г. Фесенкова, Казахстан, Алматы

<sup>2</sup>Казахский Национальный университет им. аль-Фараби, Казахстан, Алматы,

\*e-mail: komandr65@gmail.com

## **ОСОБЕННОСТИ ДВИЖЕНИЯ ГЕОСТАЦИОНАРНЫХ СПУТНИКОВ**

Дано определение идеального геостационарного спутника (ГСС). Практически невозможно вывести ГСС строго на идеальную орбиту. Показано отличие реального ГСС от идеального. Обсуждена проблема каталогизации ГСС. По мере запуска новых объектов или коррекции орбит уже существующих ГСС, текущий каталог приходится постоянно дополнять и обновлять. Изложена упрощенная теория изменения долготы ГСС со временем с учетом 2-й секториальной гармоники в разложении геопотенциала. На основе этой теории выделены два класса неуправляемых ГСС (либрационные и дрейфующие), и дана оценка резонансных возмущений для обоих классов. Приведена эмпирическая эволюционная диаграмма «наклон-узел» для плоскости орбиты ГСС в интервале 1991–2016 гг.

**Ключевые слова:** геостационарный спутник, геостационарная орбита, теория движения ИСЗ.

Demchenko B.I.<sup>1</sup>, Komarov A.A.<sup>1,2\*</sup>, Serebryanskiy A.V.<sup>1</sup>,  
Usoltseva L.A.<sup>1</sup>, Akniyazov Ch.B.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>V.G. Fesenkov Astrophysical Institute, Kazakhstan, Almaty

<sup>2</sup>al-Farabi Kazakh National University, Kazakhstan, Almaty

\*e-mail: komandr65@gmail.com

### **Peculiarities of movement of geostationary satellites**

The definition of an ideal geostationary satellite (GSS) is given. It is practically impossible to deduce a GSS strictly on an ideal orbit. The difference between the real GSS and the ideal is shown. The problem of GSS cataloging is discussed. As the launch of new objects or correction of orbits of already existing satellites, the current directory has to be constantly supplemented and updated. A simplified theory of the longitude change of the GSS with time is given, taking into account the second sectorial harmonic in the expansion of the geopotential. On the basis of this theory, two classes of uncontrolled GSS (libration and drifting) are distinguished, and an estimate of the resonant perturbations for both classes is given. An empirical evolutionary «inclination-node» diagram for the orbital plane of the GSS for the period 1991–2016 is given.

**Key words:** Geostationary satellite, geostationary orbit, theory of motion of artificial satellites of the Earth (AES).

Демченко Б.И.<sup>1</sup>, Комаров А.А.<sup>1,2\*</sup>, Серебрянский А.В.<sup>1</sup>,  
Усольцева Л.А.<sup>1</sup>, Акниязов Ч.Б.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>В.Г. Фесенков атындағы астрофизикалық институт, Қазақстан, Алматы қ.

<sup>2</sup>Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Қазақстан, Алматы қ.,

\*e-mail: komandr65@gmail.com

### **Геостационар серіктердің қозғалыстарының ерекшелігі**

Мінсіз геостационар серіктердің (МГС) анықтамасы берілді. Практика жүзінде МСС тура идеалды орбитасына шығару мүмкін емес. Нақты ГСС мінсізден айырмашылығы көрсетілді. ГСС

каталогтау мәселелері талқыланды. Жаңа объектілерді немесе бар МГС-дің орбитасын жөндеу барысында, ағымды каталогды әрдайым толықтырып және жаңарту еңгізу тура келек болады. Геопотенциалдың жіктелуінде 2-секторлық бүктемесі есебімен уақыт өте келе МГС бойлығы өзгерістерінің жеңілдетілген теориясы келтірілді. Осы теория негізінде басқарылмайтын МГС екі тобы (либрациялық және ауытқыған) көрсетілді және екі топтар үшін де резонанстық ауытқулар бағалауы берілді. 1991-2016 жж. интервалында МГС орбиталар жазықтығы үшін “еніс-түйін” эмпирикалық эволюциялық диаграммасы келтірілді.

**Түйін сөздер:** геостационар серігі, геостационарлы орбита, ЖЖС қозғалыс теориясы

## Введение

### Общие замечания

Для идеального геостационарного спутника (ГСС) период обращения вокруг Земли точно равен 1440 минут звездного времени, или 1436.0682 минут солнечного времени. Эксцентриситет  $e$  орбиты и наклон  $i$  плоскости орбиты к плоскости земного экватора равны нулю. Долгота восходящего узла орбиты  $\Omega$  и аргумент перигея  $\omega$  неопределены, поэтому их также можно считать нулевыми. При таких параметрах космический объект будет в любой момент времени находиться над одной и той же точкой земной поверхности, причем сама эта «подспутниковая» точка расположена на земном экваторе.

Реальный ГСС в той или иной мере всегда отличается от идеального по многим причинам. Практически невозможно вывести ГСС строго на идеальную орбиту. Но даже если это удастся сделать, то элементы орбиты ГСС будут с течением времени изменяться под действием различных возмущающих факторов (высшие гармоники в разложении геопотенциала, гравитационные возмущения от Луны и Солнца, световое давление, солнечный ветер и др., включая релятивистские эффекты). Обычно под множеством ГСС понимают космические объекты, имеющие период обращения вокруг Земли от 22 до 26 часов и наклон плоскости орбиты к плоскости экватора не более  $16^\circ$  [1-3].

### Каталоги ГСС

Проблема каталогизации ИСЗ, в том числе ГСС, отличается от каталогизации других астрономических объектов (звезд, галактик, астероидов и т.п.). Здесь приходится учитывать искусственное происхождение объектов, их функциональное назначение и быстрое изменение орбитальных параметров. По мере запуска новых объектов или коррекции орбит уже существующих ГСС, текущий каталог приходится постоянно дополнять и обновлять. Два каталога ГСС с разницей по времени в один год, или даже

в 1-2 месяца – это уже два разных каталога. В настоящее время достаточно полно каталогизировано около 1900 ГСС с характерными размерами от метра и более. Из них только 25% это работающие корректируемые спутники, и 75% – неуправляемые ГСС, представляющие собой техногенный космический мусор (space debris). Количество геостационаров меньших размеров оценивается в десятки тысяч, но они труднодоступны для наземных наблюдений [4].

Наиболее полной информацией о состоянии геостационарной области располагает космический центр им. Л. Джонсона (Хьюстон, США). Европейский космический центр (ESOC) периодически издает списки ГСС (LOG, List Of Geostationary, [5]). Эти списки предназначены для обслуживания научных программ наблюдения ГСС. В дополнение к LOG, в Интернет регулярно поставляются так называемые «двухстрочники» (TLE, Two-Lines-Elements [6]). Основным недостатком этих списков – отсутствие фотометрических данных, которые весьма полезны для идентификации спутников. Соответствующие российские организации также издают свои каталоги [7]. В этих каталогах, в дополнение к орбитальным параметрам, для каждого объекта дается его интегральная звездная величина, что существенно облегчает поиск и идентификацию конкретного ГСС в процессе наблюдений.

Принято считать, что в геостационарной зоне находятся исключительно искусственные объекты. Это утверждение не опровергнуто, но и не доказано. В принципе можно предположить, что по крайней мере вблизи двух устойчивых точек либрации с долготами  $75^\circ$  и  $255^\circ$  (см. ниже), существуют и естественные спутники небольших размеров. Отличить искусственные объекты от естественных можно по их оптическим характеристикам (фотометрическим, спектрофотометрическим, поляризационным), поскольку искусственные покрытия (например, солнечные батареи) в естественной среде не встречаются. Можно также ожидать, что вблизи точек либрации концентрируются фрагменты

космического мусора как искусственного, так и естественного происхождения, вплоть до пылевой составляющей.

### Гравитационное поле Земли

Гравитационный потенциал материальной точки массы  $M$  на расстоянии  $r$  от нее дается выражением  $U=GM/r$ . Здесь  $G=6.672 \cdot 10^{-11}$  м<sup>3</sup>/

(кг·с<sup>2</sup>) – гравитационная постоянная. В формулы небесной механики почти всегда входит произведение  $\mu=GM$ , которое известно точнее, чем  $G$  и  $M$  по отдельности. Для Земли  $\mu=(3.986005 \pm 0.000003) \cdot 10^{14}$  м<sup>3</sup>/с<sup>2</sup> (система астрономических постоянных МАС 1976, [8]). Потенциал Земли отличается от потенциала материальной точки. Он описывается разложением по сферическим функциям [9]:

$$U = \frac{\mu}{r} \left\{ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{R}{r} \right)^n \cdot \left[ J_n \cdot P_n(\sin \varphi') + \sum_{k=1}^n J_{nk} \cdot P_{nk}(\sin \varphi') \cdot \cos(k(\lambda - \lambda_{nk})) \right] \right\}, \quad (1)$$

$J_n, J_{nk}$  – безразмерные постоянные, характеризующие фактическую форму Земли и распределение масс внутри нее;  $\lambda_{nk}$  – характерные долготы, отдельно для каждой гармоники;  $P_n(x), P_{nk}(x)$  – полиномы Лежандра и присоединенные функции Лежандра,  $\varphi', \lambda$  – геоцентрическая широта и восточная долгота подспутниковой точки,  $R$  – экваториальный радиус Земли,  $R=6378.140 \pm 0.005$  км (МАС 1976). Общее выражение для полиномов и присоединенных функций Лежандра можно получить из формул Родрига:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} ((x^2 - 1)^n);$$

$$P_{nk}(x) = (-1)^k \cdot (1 - x^2)^{k/2} \cdot \frac{d^k P_n(x)}{dx^k}.$$

При задании географических координат пункта наблюдений обычно дается его геодезическая широта  $\varphi$ . Она определяется как угол наклона между нормалью к поверхности геоида и плоскостью земного экватора. Для перехода от геодезической широты  $\varphi$  к геоцентрической  $\varphi'$  служит формула  $tg(\varphi') = (1 - \varepsilon)^2 \cdot tg(\varphi)$ , где  $\varepsilon=1/298.257$  – сжатие земного сфероида. Максимальное отличие  $\varphi$  от  $\varphi'$  равно 11.5' и достигается на широте 45°. В линейном измерении на поверхности Земли эта разность составляет 21 км. Заметим, что широта Алматы равна 43°. На экваторе и земных полюсах значения  $\varphi$  и  $\varphi'$  совпадают.

Слагаемые в формуле (1), содержащие множитель  $P_n(\sin \varphi')$ , называются зональными гармониками. Слагаемые с множителями  $P_{nk}(\sin \varphi')$

называются секториальными (при  $k=n$ ) или тессеральными (при  $k < n$ ) гармониками.

Расстояние от центра Земли до геостационарной орбиты равно:  $r=42164$  км. Для типичного ГСС отношение  $R/r$  равно  $6378/42164=0.15$ . Следовательно, при прочих равных условиях влияние текущего члена разложения в формуле (1) составляет всего 15% от предыдущего члена. Поэтому для ГСС наиболее существенными являются первые слагаемые, то есть зональная гармоника  $J_2$  и секториальная гармоника  $J_{22}$ . Численные значения этих коэффициентов таковы: динамический коэффициент сжатия Земли  $J_2=1082.63 \cdot 10^{-6}$  (это наибольший коэффициент), динамический коэффициент сжатия земного экватора  $J_{22}=2.7 \cdot 10^{-6}$ . Значения остальных коэффициентов  $J_n$  и  $J_{nk}$  менее  $2.8 \cdot 10^{-6}$  [9].

### Резонансные ИСЗ

Для произвольных ИСЗ влияние долготных членов в разложении геопотенциала (1) порождает только периодические возмущения, их амплитуда убывает с ростом индекса  $n$ . Но если период обращения ИСЗ вокруг Земли соизмерим с собственным периодом вращения Земли вокруг своей оси, то возникают резонансные эффекты, под влиянием которых амплитуды периодических возмущений с течением времени могут возрастать. С математической точки зрения это связано с появлением малых делителей в любой тригонометрической теории движения ИСЗ. Например, резонансными являются спутники с периодами 12<sup>h</sup> (резонанс 1/2), 8<sup>h</sup> (резонанс 1/3), 16<sup>h</sup> (резонанс 2/3) и т.д. В этом смысле геостационарные спутники являются самыми резонансными, так как они имеют предельный резонанс

1/1. Понятно, что теория движения резонансных ИСЗ должна отличаться от теории движения произвольных спутников Земли.

### Зависимость долготы ГСС от времени. Дрейф по долготе

Если известен «мгновенный» инерциальный период обращения ГСС вокруг Земли, то скорость изменения долготы ГСС (среднесуточный дрейф по долготе) в данное время можно вычислить по формуле:

$$D = 360^{\circ} \cdot \left( \frac{1440}{P_s} - 1.0027379093 \right), \quad (2)$$

где  $D$  – дрейф по долготе,  $^{\circ}/\text{сут}$ ,  $P_s$  – сидерический (или звездный) период обращения ГСС вокруг Земли в минутах солнечного времени. Если  $P_s=1436.0682$ , то  $D=0$ . При  $D<0$  ГСС в данный момент дрейфует с востока на запад (долгота убывает), при  $D>0$  ГСС движется с запада на восток (долгота возрастает).

Резонансное влияние долготных членов в разложении геопотенциала, прежде всего секториальной гармоники  $J_{22}$ , приводит к тому, что на геостационарной орбите имеются два устойчивых положения равновесия с долготами  $\lambda_1=75^{\circ}$  и  $\lambda_2=255^{\circ}$  (они же – точки либрации, см. ниже) и два неустойчивых положения, отстоящих от устойчивых точек примерно на  $90^{\circ}$ . Первая точка либрации  $75^{\circ}$  почти равна долготе Алматы ( $77^{\circ}$ ), вторая точка  $255^{\circ}$  близка к средней долготе США.

В теории движения геостационаров используется понятие «стробоскопическая долгота» [1, 2, 10]. Это некоторая средняя долгота ГСС, не зависящая от эксцентриситета и наклона орбиты. Она определяется формулой  $\lambda = \Omega + \omega + M - S$ , где  $\omega$  – аргумент перигея,  $M$  – средняя аномалия ГСС на данный момент времени,  $S$  – текущее звездное время в Гринвиче. В рамках упрощенной трехосной модели Земли зависимость стробоскопической долготы  $\lambda$  неуправляемого ГСС от времени достаточно хорошо описывается дифференциальным уравнением типа уравнения математического маятника на жестком невесомом стержне [3, 11]:

$$\frac{d^2\lambda}{dt^2} + \frac{D_k^2}{2} \cdot \sin(2(\lambda - \lambda_L)) = 0, \quad (3)$$

где  $\lambda_L$  – долгота одной из двух точек либрации. Для нас удобнее брать значение  $\lambda_L=\lambda_1=75^{\circ}$ . Основное отличие уравнения (3) от уравнения математического маятника заключается в том, что у маятника имеется только одно положение устойчивого равновесия (нижняя точка) и одно положение неустойчивого равновесия (верхняя точка). У ГСС имеется два устойчивых и два неустойчивых положения равновесия. Две точки устойчивого равновесия еще называются точками либрации.

Для Земли внешний параметр  $D_k$  равен  $0.437^{\circ}/\text{сутки}$ . Он играет роль критического дрейфа по долготе, то есть скорости изменения долготы при прохождении ГСС какой-либо точки либрации. Если дрейф в этой точке меньше  $D_k$ , то реализуется режим колебаний, если больше – режим вращений. Соответственно, неуправляемые ГСС делятся на два класса. Класс «L» – либрационные ГСС. Они совершают долгопериодические колебания около одной из двух точек либрации. Период колебаний от 2 до 6 лет, амплитуда до  $80^{\circ}$ . Класс «D» – дрейфующие ГСС. Они постоянно двигаются в одном направлении, с востока на запад или с запада на восток.

Решение уравнения (3) выражается через эллиптические функции и стандартные эллиптические интегралы. Пусть  $D_0=(d\lambda/dt)_0$  – дрейф по долготе в начальный момент времени  $t_0$ ;  $\lambda_0$  – долгота ГСС на этот же момент. Эти два параметра играют роль начальных условий для уравнения (3) и могут быть определены из наблюдений.

Максимальный дрейф по долготе  $D_m$  для данного ГСС при прохождении точек либрации определяется из начальных условий по формуле

$$D_m^2 = D_0^2 + D_k^2 \cdot \sin^2(\lambda_0 - \lambda_L). \quad (4)$$

Знак  $D_m$  совпадает со знаком  $D_0$ . В рамках модели (3) этот параметр для конкретного пассивного ГСС постоянен и может служить одной из его характеристик, наряду с другими элементами орбиты. Далее, введем обозначения:

$$k^2 = (D_m/D_k)^2; \quad k_1 = 1/k;$$

$$F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\varphi)}}; \quad K(k) = F(\pi/2, k), \quad (5)$$

$k$  – модуль эллиптических функций,  $F(\varphi, k)$ ,  $K(k)$  – неполный и полный эллиптические интегралы 1-го рода в канонической записи.

Характер движения типичного пассивного ГСС определяется значением параметра  $k$ .

5.1. При  $k < 1$  – либрационный режим,  $D_m < D_k$ . Для земного наблюдателя геостационар совершает долгопериодические колебания по долготе около одной из двух точек либрации. Амплитуда этих колебаний  $A$ (град) и период  $P$ (сутки) определяются формулами:

$$A = 57.29578 \cdot \arcsin k, \quad (6)$$

$$P = 57.29578 \cdot \frac{4 \cdot K(k)}{D_k}$$

Эти два параметра также могут служить дополнительными характеристиками конкретного пассивного либрационного ГСС и использоваться для его идентификации. Текущая стробоскопическая долгота ГСС (в рад) и дрейф по долготе на произвольный момент времени вычисляются по формулам:

$$\lambda = \lambda_L + \arcsin(k \cdot sn(u, k)); \quad (7)$$

$$D = D_m \cdot cn(u, k),$$

где  $u = D_k \cdot (t - t_0) + F(\theta_0, k)$ ;

$$\theta_0 = \arcsin\left(\frac{\sin(\lambda_0 - \lambda_L)}{k}\right).$$

5.2. При  $k > 1$  – дрейфующий режим,  $D_m > D_k$ . Для земного наблюдателя геостационар постоянно движется в одном направлении, с запада на восток или с востока на запад. Период изменения стробоскопической долготы определяется формулой

$$P = 57.29578 \cdot \frac{4 \cdot K(k_1)}{D_m}. \quad (8)$$

Долготу  $\lambda$  и ее дрейф  $D$  на произвольный момент можно найти из выражений:

$$\sin(\lambda - \lambda_L) = sn(u, k_1)$$

$$\cos(\lambda - \lambda_L) = cn(u, k_1) \quad (9)$$

$$D = D_m \cdot dn(u, k_1)$$

где  $u = D_m \cdot (t - t_0) + F(\lambda_0 - \lambda_L, k_1)$ .

В формулах (7, 9) через  $sn, cn, dn$  обозначены основные эллиптические функции Якоби. Для вычисления всех эллиптических функций и интегралов можно воспользоваться эффективными алгоритмами, изложенными в работах [12, 13].

В таблице 1 приведены амплитуды  $A$ (град) и периоды  $P$ (сутки) изменения стробоскопической долготы для либрационных и дрейфующих ГСС в зависимости от максимальной скорости дрейфа  $D_m$  в рамках модели (3) (см. формулы (6,8)). Предполагается круговое движение. Для дрейфующих ГСС в качестве амплитуды  $A$  дано максимальное отклонение от равномерного кругового движения с тем же периодом и нулевым наклоном.

Таблица 1 – Оценка резонансных возмущений для ГСС

Либрационные			Дрейфующие		
$D_m, \text{ }^\circ/\text{сут}$	$A, \text{ град}$	$P, \text{ сут}$	$D_m, \text{ }^\circ/\text{сут}$	$A, \text{ град}$	$P, \text{ сут}$
0.001	0.01	823	0.45	25.00	1450
0.076	10.0	829	0.60	5.50	720
0.219	30.0	883	0.80	2.50	490
0.335	50.0	1014	1.00	1.50	380
0.411	70.0	1312	2.00	0.40	182
0.437	90.0	---	10.00	0.02	36

Основные отличия реального движения от математической модели (3) заключаются в следующем.

А) Формулы (6, 8) дают немного завышенный период изменения долготы, особенно для либрационных ГСС с небольшой амплитудой колебаний. Например, для  $D_m = 0.001$  реальный полный период колебаний равен 745 суток, а не 823 (см. табл.1). Частично этот недостаток можно компенсировать вариацией параметра  $D_k$  в пределах от 0.480 до 0.437  $^\circ/\text{сутки}$ . Верхняя граница – для либрационных ГСС с небольшой амплитудой колебаний, нижняя – для объектов с максимальным дрейфом, близким к критическому значению 0.437  $^\circ/\text{сутки}$ . На рис.1 показана приближенная зависимость критического дрейфа  $D_k$  от максимального дрейфа  $D_m$ .

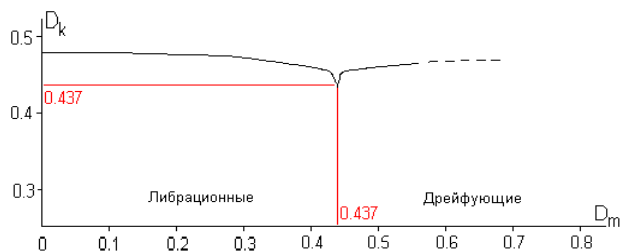


Рисунок 1 – Зависимость критического дрейфа  $D_k$  (внешний параметр) от максимального дрейфа  $D_m, \text{ }^\circ/\text{сутки}$ .

В) Величины максимальных отклонений долготы либрационного ГСС к западу и востоку от устойчивых точек либрации несколько отличаются между собой, то есть колебания несимметричны. Здесь сказывается сравнительно слабое, но в данном случае заметное влияние высших долготных членов в разложении геопотенциала.

С) Действительные точки неустойчивого равновесия равны  $161^{\circ}$  и  $348^{\circ}$  восточной долготы, а не  $165^{\circ}$  и  $345^{\circ}$ , как это следует из модели (3).

Д) За счет переменного влияния лунно-солнечных возмущений глубина «потенциальной ямы» в устойчивых точках либрации и высота «потенциального барьера» в неустойчивых точках равновесия немного меняются со временем. Поэтому некоторые ГСС с максимальным дрейфом, близким к критическому значению  $0.437^{\circ}$  /сутки, способны переходить из одной точки либрации в другую, либо временно менять режим движения с либрационного на дрейфующий и обратно.

### Эволюция плоскости орбиты ГСС

Положение плоскости орбиты ГСС задается двумя параметрами:  $i$  – наклон плоскости орбиты к плоскости земного экватора и  $\Omega$  – долгота восходящего узла орбиты, отсчитывается от точки весеннего равноденствия.

Как известно, если тело вращается и на него действуют внешние силы, то плоскость вращения этого тела медленно прецессирует вблизи некоторой основной плоскости. Например, экваториальная плоскость Земли под воздействием лунно-солнечных возмущений прецессирует с периодом около 26 000 лет, а основная плоскость это плоскость эклиптики, которая практически совпадает с неизменяемой плоскостью Лапласа для Солнечной системы. Плоскость орбиты пассивного ГСС также прецессирует, и здесь тоже есть своя «плоскость Лапласа». Для типичных ГСС период прецессии составляет 53.5 года [1, 10]. Плоскость Лапласа для ГСС проходит через точку весеннего равноденствия под некоторым углом  $\Lambda$  к плоскости экватора. Для произвольного ГСС этот угол можно найти по формуле:

$$\operatorname{tg}(2\Lambda) = \frac{\eta \cdot \sin(2\varepsilon)}{2 \cdot J_2 \cdot (2\pi \cdot n \cdot R/a)^2 + \eta \cdot \cos(2\varepsilon)},$$

где  $\eta = 9.353 \cdot 10^{-4}$  – безразмерная константа, которая зависит от параметров орбит Луны и

Солнца;  $\varepsilon = 23.44^{\circ}$  – наклон экватора к эклиптике,  $J_2$  – параметр геопотенциала (2-я зональная гармоника),  $R$  – экваториальный радиус Земли,  $a$  – большая полуось орбиты ГСС,  $n$  – среднее движение ГСС, выраженное в единицах «оборот/сутки». Для идеального ГСС  $a = 42164$  км,  $n = 1.0027379093$ . Подставляя эти значения в последнюю формулу, получим:  $\Lambda = 7.3^{\circ}$ . Заметим, что для шарообразной Земли  $J_2 = 0$ . Тогда  $\Lambda = \varepsilon$ , то есть в этом случае плоскость Лапласа для ГСС будет совпадать с плоскостью эклиптики, как и следовало ожидать.

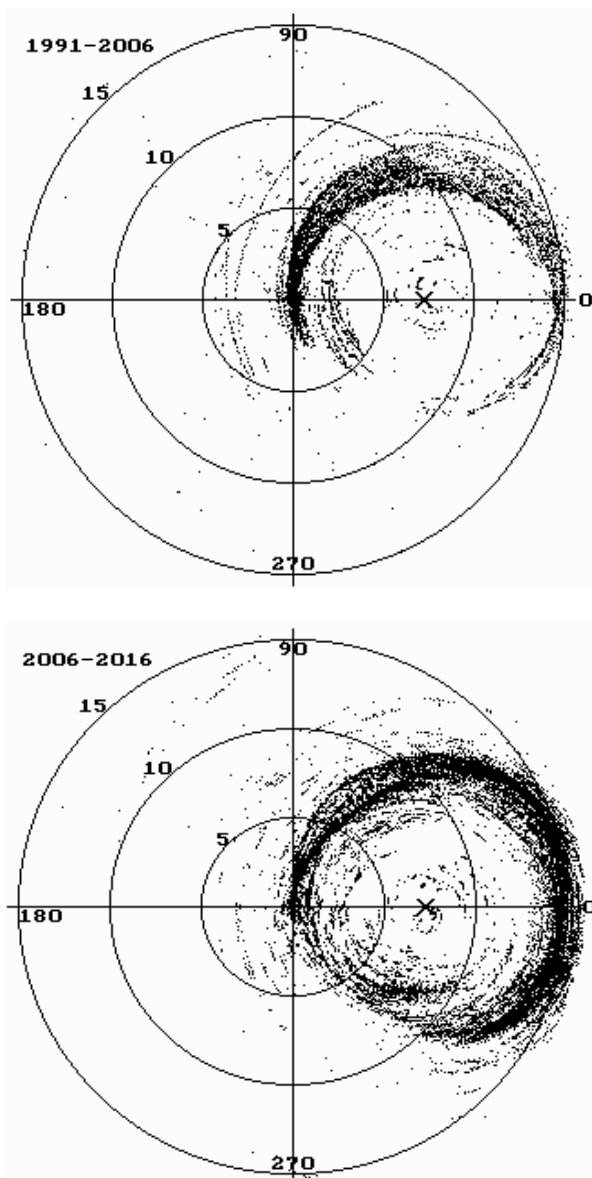


Рисунок 2 – Эволюционная диаграмма «наклон-узел». Слева – по каталогам орбит в интервале 1991-2006 гг., справа – в интервале 2006-2016 гг. Крестиком отмечено положение плоскости Лапласа.

На рис.2 показаны две эволюционные диаграммы «наклон-узел» для ГСС в полярной системе координат [3, 11]. Эти диаграммы построены по большому количеству каталогов орбит ГСС на разные интервалы дат. По радиусу отложен угол наклона  $i$  орбиты к экватору, по полярному углу – долгота восходящего узла  $\Omega$ . Каждая точка на диаграммах соответствует положению некоторой плоскости орбиты. Начало координат – это плоскость экватора ( $i=0$ ,  $\Omega$  неопределено). Крестиком на горизонтальной оси отмечено положение плоскости Лапласа для ГСС ( $i=\Lambda=7.3^{\circ}$ ,  $\Omega=0$ ). Время эволюции течет по часовой стрелке вдоль основной ветви диаграмм, начиная от точки (0,0). Для типичного ГСС полное время одного оборота по диаграмме равно 53.5 года.

Как видно из этого рисунка, для большинства ГСС наклон плоскости орбиты к плоскости Лапласа  $i_{\Lambda}$  почти постоянен. Можно также показать, что долгота восходящего узла  $\Omega_{\Lambda}$  относительно этой плоскости зависит от времени почти по линейному закону [1, 2]. Следовательно, эти диаграммы указывают сразу на два инварианта:  $i_{\Lambda} \approx \text{const}$  и  $d\Omega_{\Lambda}/dt \approx \text{const}$ . Оба эти инварианта связаны с законом сохранения момента импульса.

В таблице 2 представлена теоретическая зависимость элементов  $i$ ,  $\Omega$  от времени  $T$  для либрационных ГСС. Предполагается, что в начальный момент  $T=0$  круговая орбита ГСС лежит в плоскости экватора. Время  $T$  дано в годах, параметры  $i$ ,  $\Omega$  – в градусах.

Таблица 2 – Зависимость орбитальных параметров  $i$ ,  $\Omega$  от времени  $T$ .

$T$	$i$	$\Omega$	$T$	$i$	$\Omega$	$T$	$i$	$\Omega$
0	0.00	---	20	13.42	24	42	9.38	310
1	0.85	87	22	14.00	17	44	8.02	303
2	1.69	83	24	14.40	10	46	6.55	296
4	3.36	77	26	14.60	3	48	4.99	290
6	4.99	70	28	14.60	357	50	3.36	283
8	6.55	64	30	14.40	350	52	1.69	277
10	8.02	57	32	14.00	343	53	0.85	273
12	9.38	50	34	13.42	336	54	0.00	---
14	10.62	44	36	12.65	330	55	0.85	87
16	11.72	37	38	11.72	323	56	1.69	83
18	12.65	30	40	10.62	316	58	3.36	77

Экваториальные элементы ( $i$ ,  $\Omega$ ) связаны с аналогичными элементами относительно плоскости

Лапласа ( $i_{\Lambda}$ ,  $\Omega_{\Lambda}$ ) известными формулами [14]:

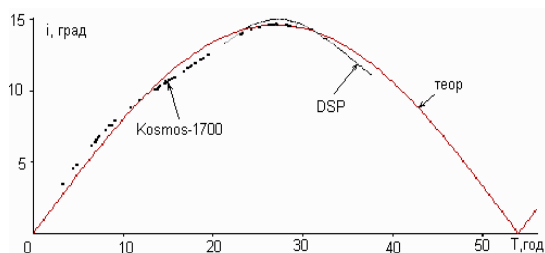
$$\sin(i_{\Lambda}) \cdot \sin(\Omega_{\Lambda}) = \sin(i) \cdot \sin(\Omega),$$

$$\sin(i_{\Lambda}) \cdot \cos(\Omega_{\Lambda}) = \sin(i) \cdot \cos(\Lambda) \cdot \cos(\Omega) - \cos(i) \cdot \sin(\Lambda),$$

$$\cos(i_{\Lambda}) = \cos(\Lambda) \cdot \cos(i) + \sin(\Lambda) \cdot \sin(i) \cdot \cos(\Omega),$$

$$\sin(i) \cdot \cos(\Omega) = \sin(i_{\Lambda}) \cdot \cos(\Lambda) \cdot \cos(\Omega_{\Lambda}) + \cos(i_{\Lambda}) \cdot \sin(\Lambda),$$

$$\cos(i) = \cos(\Lambda) \cdot \cos(i_{\Lambda}) - \sin(\Lambda) \cdot \sin(i_{\Lambda}) \cdot \cos(\Omega_{\Lambda}).$$



**Рисунок 3** – Зависимость  $i$  ( $T$ ) для неуправляемых ГСС.

Сплошная линия – теоретическая кривая, точки – экспериментальные данные для двух типичных ГСС: Kosmos-1700 (запуск 1985 г., интервал 1991-2016 гг.) и спутник серии DSP (запуск 1971 г., интервал 1991-2007 гг.).

На рис. 3 показана типичная зависимость наклона  $i$  от времени  $T$ , в соответствии с табл.2 и рис.2. Сплошная линия – теоретическая зависимость. Точками обозначены экспериментальные данные для двух либрационных ГСС, находящихся на разных стадиях эволюции. Из графика следует, что в интервале угла наклона  $0-10^0$  сам угол меняется со скоростью около  $8''/\text{сутки}$ . Более полную теорию движения ГСС можно найти в работе [10].

### Литература

1. Социлина А.С., Вершков А.Н., Григорьев К.В., Киладзе Р.И., Гаязов И.С. Каталог улучшенных орбит неуправляемых геостационарных объектов. – СПб.: ИТА РАН, 1994. – Т.1. – 102 с.; – Т.2. – 95 с.
2. Социлина А.С., Киладзе Р.И., Григорьев К.В., Вершков А.Н. Каталог орбит геостационарных спутников. – СПб.: ИТА РАН, 199. – 104 с.
3. Диденко А.В., Демченко Б.И., Усольцева Л.А., Афонин А.Н., Калужный Е.А., Гордыгага Н.Н., Старожилов Н.И., Зикрань В.А., Есенгали С.Р., Кабенко Ф.Х. Зональный каталог геостационарных спутников. Вып.2. – Алматы: Гылым, 2000. – 108 с.
4. Evidence for historical satellite fragmentations in and near the geosynchronous regime. Proceedings of the Third European Conference on Space Debris, 19 – 21 March 2001, Darmstadt.
5. <http://www.planet4589.org/space/log/geo.log>
6. <http://celectrak.com/NORAD/elements/geo.txt>
7. <http://spacedata.vimpel.ru/ru>
8. Жаров В.Е. Сферическая астрономия. Фрязино, 2006. – 480 с.
9. Абалакин В.К., Аксенов Е.П., Гребенников Е.Д., Дёмин В.Г., Рябов Ю.А. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике / под ред. Дубошина Г.Н. – М.: Наука, 1976. – 864 с.
10. Киладзе Р.И., Социлина А.С. Теория движения геостационарных спутников. – СПб., 2008. – 132 с.
11. Демченко Б.И., Воропаев В.А., Комаров А.А., Молотов И.Е., Серебрянский А.В., Усольцева Л.А. Некоторые характеристики множества геостационарных спутников // Известия НАН РК. Сер. физ.-мат. – 2016. – № 5. – С.64-75.
12. Справочник по специальным функциям / под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
13. Агеев М.И., Алик В.П., Марков И Ю. Библиотека алгоритмов 151Б-200Б. Вып.4. – М.: Радио и связь, 1981. – 184 с.
14. Субботин М.Ф. Введение в теоретическую астрономию. – М., Наука, 1968. – 800 с.

### References

1. A.S. Sochilina, A.N. Vershkov, K.V. Grigoriev, R.I. Kiladze, and I.S. Gayazov Catalog of improved orbits of uncontrolled geostationary objects, (St. Petersburg: ITA RAS, 1994), vol.1, 102 p.; vol.2, 95 p. (in Russ).
2. A.S. Sochilina, R.I. Kiladze, K.V. Grigoriev, and A.N. Vershkov, Catalog of the orbits of geostationary satellites, (St. Petersburg: ITA RAS, 1996), 104 p. (in Russ).
3. A.V. Didenko, B.I. Demchenko, L.A. Usoltseva, A.N. Afonin, E.A. Kalyuzhny, N.N. Gordygaga, N.I. Starogilov, V.A. Zikran, C.R. Esengali, and F.Kh. Kabenko, Zonal catalog of geostationary satellites, Issue 2, (Almaty: Gylym, 2000), 108 p. (in Russ).
4. Evidence for historical satellite fragmentations in and near the geosynchronous regime, Proceedings of the 3rd European Conf. on Space Debris, 19 – 21 March 2001, Darmstadt.
5. <http://www.planet4589.org/space/log/geo.log>
6. <http://celectrak.com/NORAD/elements/geo.txt>
7. <http://spacedata.vimpel.ru/ru>
8. V.Ye. Zharov, Spherical astronomy. (Fryazino, 2006), 480 p. (in Russ).
9. V.K. Abalakin., E.P. Aksenov, E.D. Grebennikov, V.G. Demin, and Yu.A. Ryabov Reference guide to celestial mechanics and astrodynamics / edited by Duboshin G.N. (Moscow: Science, 1976), 864 p. (in Russ).
10. R.I. Kiladze and A.S. Sochilina The theory of motion of geostationary satellites, (St. Petersburg, 2008), 132 p. (in Russ).
11. B.I. Demchenko, V.A. Voropaev, A.A. Komarov, I.E. Molotov, A.V. Serebryanskiy, and L.A. Usoltseva, Izvestiya NAS RK. Ser. fiz.-mat. 5, 64-75, (2016). (in Russ).
12. Handbook of special functions / edited by M. Abramovits and I. Stigan, (Moscow: Science, 1979), 832 p. (in Russ).
13. M.I. Ageev, V.P. Alik, and I.Yu. Markov Library of Algorithms 151B-200B. Issue 4, (Moscow: Radio and Communication, 1981), 184 p. (in Russ).
14. M.F. Subbotin Introduction to theoretical astronomy, (Moscow: Science, 1968), 800 p. (in Russ.).