МРНТИ 14.35.09

Жусупов М.А., Жусупов А.М., Кабатаева Р.С.*, Жаксыбекова К.А.

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, НИИЭТФ,
г. Алматы, Казахстан, *e-mail: raushan.kabatayeva@gmail.com

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДИК В ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

Настоящая статья представляет интерес для молодых ученых-исследователей и преподавателей, докторантов, магистрантов, студентов, а также учеников старших классов школ, желающих закрепить свои знания в области математики и связанной с этими знаниями физики. В частности, рассматривается методика вычисления суммы рядов из натуральных чисел; знание этой методики, например, полезно для рассмотрения различных вопросов в области квантовой механики. Например, данная методика используется в квантовой теории углового момента при доказательстве квантования углового момента из соображений теории вероятностей в предположении, что возможные проекции момента на произвольную ось равны m $\left(m=\ell,\ell-1,...,-\ell\right)$ и все эти значения проекции момента равновероятны, а оси равноправны. Приведены три метода для вычисления суммы из квадратов натуральных чисел: метод индукции, метод дифференциального исчисления и метод конечных разностей. Решение задачи несколькими методами может быть полезным, так как при совпадении результата, полученного разными способами, можно не сомневаться в его правильности; некоторые из методов, как будет показано ниже, могут быть обобщены для решения сходных и более сложных задач. Также приводится рассмотрение известной формулы Муавра-Эйлера, которая часто используется физиками-теоретиками в доказательствах теорем и формул, например, в борновском приближении, методе парциальных волн в квантовой теории рассеяния. Эйлер решал сложные математические задачи, результаты которых имеют практическое применение в теоретической физике, но удивляет то, что при решении этих задач, Эйлер использует только обычные математические знания и выводы с простейшими математическими функциями. В статье также приводится рассмотрение нахождения суммы рядов из обратных квадратов натуральных чисел. Приводится краткая справка о том, каким образом великая теорема Ферма была доказана группой математиков разных времен. Но главная интрига заключается в том, что до сих пор неизвестно, каким способом доказал ее сам Ферма.

Ключевые слова: квантование углового момента, сумма рядов из натуральных чисел, метод индукции, метод дифференциального исчисления, метод конечных разностей, формула Муавра-Эйлера, теорема Ферма, гипотеза Таниямы.

Zhusupov M.A., Zhusupov A.M., Kabatayeva R.S.*, Zhaksybekova K.A.

Al-Farabi Kazakh National University, IETP, Almaty, Kazakhstan
*e-mail: raushan.kabatayeva@gmail.com

Use of mathematical methodologies in theoretical physics

The present article is of great interest for young scientists-researchers and teachers, PhD students, master students, bachelor students and even for pupils of higher classes of schools willing to strengthen their knowledge in the field of mathematics and physics concerning it. In particular, there is a consideration of the methodology of calculation of a sum of series of natural numbers; knowledge of this methodology is of use for those who study quantum mechanics. For example, the methodology is used in quantum angular momentum theory when proving the quantization of angular momentum from considerations of probabilities theory in assumption that the possible projections of momentum for arbitrary axes are equal to m $\left(m=\ell,\ell-1,...,-\ell\right)$ and all these values of the momentum projections are equally probable and the axes are equivalent. Three methods for calculation of the sum of series of natural numbers squared are given: method of induction, method of differential calculus and method of finite differences. A solution of the problem by several techniques might be of use since when the results obtained by different ways coincide, one should have no doubt in correctness of the result; some of the methods as one can see below can be generalized when solving similar or even more difficult problems. There is also a consideration of the well-known de Moivre-Euler's formula which is often used by theoretical physicists when proving theorems and formulas, for example in the Born approximation and partial waves methods in quantum scattering theory. Euler solved complicated mathematical problems, results of which have practical applications in theoretical physics, but the surprising fact is that when solving this problems Euler only used ordinary mathematical knowledge and simple derivations with simplest mathematical functions. There is a consideration of obtaining of a sum of reverse squares of natural numbers in the article. A short description of how Fermat's great theorem was proved by a group of mathematicians living in different time periods. But the main intrigue is that it is not known yet how Fermat himself proved it.

Key words: quantization of angular momentum, sum of series of natural numbers, method of induction, method of differential calculus, method of finite differences, de Moivre-Euler's formula, Fermat's theorem, Taniyama's hypothesis.

Жүсіпов М.Ә., Жүсіпов А.М., Қабатаева Р.С., Жақсыбекова К.А.

Әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық университеті, ЭТФҒЗИ, Алматы қ., Қазақстан,
*e-mail: raushan.kabatayeva@gmail.com

Теориялық физикада математикалық методикаларды қолдану

Нақты мақала математика және онымен байланысты физика саласында білімдерін нығайтқысы келетін жас ғалым-зерттеушілерге және оқытушыларға, докторанттарға, магистранттарға, студенттерге, тіпті мектептегі жоғары сынып оқушыларына да қызықта болып табылады. Соның ішінде, натурал сандар қатарларының суммасын есептеу әдістемесі қарастырылған; бұл әдістемені білу кванттық механика саласында оқып жүргендерге пайдалы. Мысалы, айтылған әдістеме кванттық бұрыштық момент теориясында бұрыштық моменттің кванттaлуын дәлелдеген кезде қолданылады, яғни ықтималдықтар теориясының түсінігінен, моменттің кез келген оське мүмкін болатын проекциялары m $\left(m=\ell,\ell-1,...,-\ell\right)$ тең болса және осы момент проекцияларының мәндері тең ықтималды және осьтер тең құқықты болжамында. Натурал сандар квадраттарының суммасын табу үшін үш әдіс келтірілген: индукция әдісі, дифференциалдық есептеу әдісі және шекті айырымдар әдісі. Мәселені бірнеше жолмен шешу пайдалы болып табылады, себебі әр-түрлі әдіспен алынған нәтижелер сәйкес келсе, ол нәтиженің дұрыстығында күмән болмайды; кейбір әдістер, төменде көрсетілгендей, ұқсас, тіпті күрделілеу мәселелерді шешкен кезде жалпыланып қолданыла алады. Сонымен қатар, белгілі Муавр-Эйлер формуласы қарастырылған, айтылған формуланы физик-теоретиктер теоремаларын және формулаларын дәлелдеген кезде аса жиі қолданады, мысалы, кванттық шашырау теориясындағы борндық жуықтауда және парциалдық толқындар әдісінде. Эйлер күрделі математикалық мәселелерді шешкен, сол шешімдердің нәтижелері теориялық физикада практикалық қолданыстарын табады, бірақ таңқаларлығы – сол шешімдерді тапқан кезде Эйлер тек ғана қарапайым математикалық білімді және қарапайым математикалық функциялармен дәлелдеулерді қолданған. Мақалада сонымен қатар натурал сандар квадраттарының кері мәндерінің суммасын табу жолдары қарастырылған. Әр заман математиктерінің группасы Ферманың ұлы теоремасын қалай шешкені туралы қысқаша мәлімет берілген. Бірақ ең басты интрига – Ферманың өзі бұл мәселені қалай шешкені – әлі күнге дейін белгісіз екен.

Түйін сөздер: бұрыштық моменттің кванттaлуы, натурал сандар қатарларының суммасы, индукция әдісі, дифференциалдық есептеу әдісі, ақырлы айырымдар әдісі, Муавр-Эйлер формуласы, Ферма теоремасы, Танияма гипотезасы.

Методика нахождения суммы рядов из натуральных чисел

На практике часто возникает необходимость в суммировании рядов с натуральными числами. Самый простой, к примеру, ряд $\sum_{n=1}^{10} n$, где $n = 1, 2, 3 \ldots$ Историки математики утверждают, что сумму ряда от 1 до 10 просуммировал в пятилетнем возрасте Карл Гаусс, в дальнейшем выдающийся ученый, прозванный современниками «королем математиков». Юный Карл обратил внимание на то, что сумма первого и последнего, второго и предпоследнего членов ряда и т.д. одинакова и равна 11. Число подобных пар равно 5. Таким образом, искомая сумма равна $11 \times 5 = 55$. По другим источникам подобная задача была поставлена перед десятилетним Гауссом, но найти надо было сумму чисел от 1 до 100. Решение очевидно: $(100+1) \times 50 = 5050$. Ответ был дан до того, как учитель успел дочитать условие задачи.

Интерес представляет вычисление сумм типа $\sum n^2$, $\sum n^3$ и т.д. Мы подробно изложим вычисление суммы $\sum n^2$ простыми математическими методами. Отметим, что вычисление данной суммы может иметь самостоятельное значение, а также данная сумма может найти применение в квантовой механике, например, при квантовании орбитального момента количества движения из соображений теории вероятностей.

В квантовой механике орбитальный момент квантуется [1-3]. Например, в работе [4] рассматривается наиболее общий случай квантования углового момента в N-мерном пространстве. Показано, что для атома водорода, при рассмотрении в этом многосвязанном пространстве, угловой момент должен быть ((N – 1)/2)-кратным. В [5] доказано, что когда водородоподобный атом рассматривается как двумерная система, чье конфигурационное пространство является многосвязанным, тогда для того, чтобы определить тот же спектр энергий, как и в модели Бора, угловой момент должен быть полуцелым. Вообще водородоподобные атомы являются хорошим примером для образовательных целей при обучении студентов квантовым методикам [6], а также при научных рассмотрениях, в частности в прецизионных расчетах при определении и уточнении квантовых констант. В трехмерном пространстве квадрат орбитального момента L^2 принимает следующие значения $L^2 = \hbar^2 \ell(\ell+1)$, где $\ell = 0, 1, 2...$ – целые положительные значения. Проекция на выбранное направление (например, на ось z) $L_z = \hbar m$, где $m = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm \ell$, то есть m меняется от $+\ell$ до $-\ell$ через единицу. Здесь $\hbar = h/2\pi$, где h – постоянная Планка, имеющая размерность момента количества движения. Сформулируем задачу.

Задача 1. Используя элементарные формулы теории вероятностей, показать, что формулу $L^2 = \hbar^2 \ell(\ell+1)$ можно получить, если предположить, что возможные проекции момента на произвольную ось равны m $(m = \ell, \ell-1, ..., -\ell)$ и все эти значения проекции момента равновероятны, а оси равноправны. В силу равноправности осей x, y, z имеем $L^2 \equiv \overline{L^2} = \overline{L_x^2} + \overline{L_y^2} + \overline{L_z^2} = 3\overline{L_z^2}$. Здесь $\overline{L^2}$ означает среднее значение величины, то есть результат ее многократного измерения. Поскольку различные значения проекций момента равновероятны, то имеем

$$\overline{L_z^2} = \frac{\hbar^2}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} m^2 = \frac{2\hbar^2}{2\ell+1} \sum_{m=0}^{\ell} m^2.$$

Полученную сумму можно вычислить различными способами. Остановимся на трех из них. Решение задачи несколькими методами может быть полезным, так как при совпадении результата, полученного разными способами, можно не сомневаться в его правильности; некоторые из методов, как мы увидим ниже, могут быть обобщены для решения сходных, даже более сложных задач.

I. ***Метод индукции.*** Это наиболее простой способ. Составим следующую таблицу:

ℓ	1	2	3	4	5
$\sum_{m=1}^{\ell} m^2$	1	5	14	30	55
$\sum_{m=1}^{\ell} m$	1	3	6	10	15
$\sum_{m=1}^{\ell} m^2 \Big/ \sum_{m=1}^{\ell} m$	$1 = 3/3$	$5/3$	$7/3$	$9/3$	$11/3$

Из таблицы видно, что

$$\sum_{m=1}^{\ell} m^2 \Big/ \sum_{m=1}^{\ell} m = (2\ell+1)/3.$$

Но так как

$$\sum_{m=1}^{\ell} m = \ell(\ell+1)/2,$$

то $\sum_{m=1}^{\ell} m^2 = \ell(\ell+1)(2\ell+1)/6$.

Отсюда имеем

$$L^2 \equiv \overline{L^2} = 3\frac{2}{2\ell+1}\frac{\ell(\ell+1)(2\ell+1)}{6}\hbar^2 = \hbar^2\ell(\ell+1),$$

что и требовалось доказать.

II. ***Метод, использующий дифференциальное исчисление.*** Определим следующее выражение

$$\sum_{m=0}^{\ell} m^2 = \left[\frac{d^2}{d\alpha^2}\sum_{m=0}^{\ell} e^{\alpha m}\right]_{\alpha=0} = \left.\frac{d^2}{d\alpha^2}\frac{1-e^{\alpha(\ell+1)}}{1-e^{\alpha}}\right|_{\alpha=0}.$$

Здесь использована формула геометрической прогрессии со знаменателем $q = e^{\alpha}$. После двукратного дифференцирования и раскрытия с помощью правила Лопиталя полученной неопределенности (0/0) имеем тот же результат. Данный способ расчета суммы рекомендуется в некоторых учебниках по квантовой механике (см., например, сборник задач по квантовой механике [7]).

III. ***Метод конечных разностей.*** Обозначим искомую сумму $S(\ell) = \sum_{m=0}^{\ell} m^2$, где $S(0) = 0$. Запишем разностное уравнение $S(\ell+1) - S(\ell) = (\ell+1)^2$. Будем искать $S(\ell)$ в виде следующего разложения: $S(\ell) = a_0 + a_1\ell + a_2\ell^2 + a_3\ell^3 + a_4\ell^4$, $a_0 = 0$. Подставим последнее разложение в разностное уравнение:

$$a_1(\ell+1) + a_2(\ell+1)^2 + a_3(\ell+1)^3 + a_4(\ell+1)^4 - a_1\ell - a_2\ell^2 - a_3\ell^3 - a_4\ell^4 = \ell^2 + 2\ell + 1.$$

После раскрытия скобок и соответствующей группировки слагаемых, получим:

$$a_1 + a_2(2\ell+1) + a_3(3\ell^2 + 3\ell + 1) + a_4(4\ell^3 + \ldots + 1) = \ell^2 + 2\ell + 1.$$

Для произвольных ℓ это равенство выполняется, если будут равны коэффициенты при одинаковых степенях ℓ. Приравнивая их, получим систему уравнений:

при $\ell^0 \Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1$;

при $\ell^1 \Rightarrow 2a_2 + 3a_3 = 2$;

при $\ell^2 \Rightarrow 3a_3 = 1$;

при $\ell^3 \Rightarrow a_4 = 0$.

Решая уравнения, получим $a_1 = 1/6$, $a_2 = 1/2$, $a_3 = 1/3$. Отсюда

$$S(\ell) = \sum_{m=0}^{\ell} m^2 = \frac{\ell(\ell+1)(2\ell+1)}{6}.$$

Задача 2. Используя метод конечных разностей, найти суммы:

1) $S(\ell)=\sum_{m=0}^{\ell} m^3$; 2) $S(\ell)=\sum_{m=0}^{\ell} m^4$.

1) $S(\ell)=\sum_{m=0}^{\ell} m^3$. Разностное уравнение имеет вид

$$S(\ell+1)-S(\ell)=(\ell+1)^3.$$

Запишем разложения:

$$S(\ell)=a_1\ell+a_2\ell^2+a_3\ell^3+a_4\ell^4,$$

$$S(\ell+1)=a_1(\ell+1)+a_2(\ell+1)^2+ a_3(\ell+1)^3+a_4(\ell+1)^4.$$

Разностное выражение примет вид:

$$a_1+a_2(2\ell+1)+a_3(3\ell^2+3\ell+1)+ a_4(4\ell^3+6\ell^2+4\ell+1)=\ell^3+3\ell^2+3\ell+1.$$

Выписывая коэффициенты при одинаковых степенях и решая уравнения, получим

$$a_1=0,\ a_2=1/4,\ a_3=1/2, a_4=1/4.$$

Тогда

$$S(\ell)=\frac{1}{4}\ell^2+\frac{1}{2}\ell^3+\frac{1}{4}\ell^4= \frac{1}{4}(\ell^2+2\ell^3+\ell^4)=\frac{1}{4}\ell^2(\ell+1)^2.$$

Искомая сумма равна

$$\sum_{m=0}^{\ell} m^3=\frac{1}{4}\ell^2(\ell+1)^2.$$

Вычислить такую сумму можно и методом индукции, если заметить, что

$$\sum_{m=0}^{\ell} m^3=\left(\sum_{m=0}^{\ell} m\right)^2,\ \sum_{m=1}^{\ell} m=\ell(\ell+1)/2.$$

2) $S(\ell)=\sum_{m=0}^{\ell} m^4$. Предоставляем читателю самостоятельно получить ответ для этого случая $\sum_{m=1}^{\ell} m^4=\ell\left(-1+10\ell^2+15\ell^3+6\ell^4\right)/30$.

Вышеизложенный метод конечных разностей в разных его интерпретациях широко применяется в физике и математике. Например, в работе [8] предлагается введение метода конечных разностей как одной из интереснейших тем в дисциплину «Квантовая механика» для студентов-физиков. Этот метод довольно прост для внедрения и может быть приведен в примерах в рамках шестичасового занятия, позволяя как количественные корректные, так и качественные высокоточные результаты. Благодаря широкой применимости метода, важно то, что студенты, будущие исследователи, смогут его легко воспринять. Метод рассмотрен детально и первоначально проверена его точность в расчете спектра энергий гармонического осциллятора и сделано его сравнение с хорошо известными аналитическими результатами. Также этот метод использован для ангармонического осциллятора и для осциллятора с линейным потенциалом. Для каждой их этих систем рассчитаны десять значений самых низких собственных значений энергии и соответствующие им собственные функции.

В литературе находится много других примеров использования метода конечных разностей в аэродинамике [9]. В этой работе была предложена схема конечных разностей для расчета сжимаемого дозвукового нестационарного потока, проходящего вдоль аэродинамического крыла, используя линеаризованную потенциальную теорию. Схема была протестирована на хорошо известных проблемах нестационарной аэродинамики – такие как ответная реакция на внезапное изменение угла атаки и гармоническое движение крыла – и было доказано, что этот метод является самым точным и эффективным по сравнению с другими методами, найденными в литературе.

В математике метод используется для решения большого класса уравнений, имеющих значение для физики. В работе [10] исследуется метод для вывода численного решения для большого класса нелинейных уравнений Пуассона. Эти типы задач исходят из уравнений стационарных диффузных реакций и теплопроводности, из упругости, механики жидкости, электростатики, и геометрии. Указанный метод основан на конечных разностях и гомотопическом анализе. В статье [11] предлагается схема конечных разностей для решения нелинейного уравнения Фоккера-Планка. Приближение конечных разностей применяется для дискретизации пространственных производных. Предложенный метод имеет второй порядок точности для пространственных переменных и четвертый порядок точности для временных переменных. В [12] представлена относительно простая и эффективная символически-численная процедура, основанная на методе конечных разностей для решения дифференциальных уравнений в частных производных для систем нерегулярной формы. Метод конечных разностей используется для решения трансформированных систем зависимых переменных. Предложенная техника используется для нестационарных состояний теплопередачи.

Также метод конечных разностей используется и в расчетах наноструктур, в [13] представлен эффективный и простой метод для расчета спектра энергий и волновых функций электронов и дырок в V-образной квантовой нитевидной структуре, где для гамильтониана используется именно метод конечных разностей. В [14] предлагается эффективный и простой метод для расчета зонной структуры полупроводниковой квантовой панели. Метод комбинирует координатные преобразования, основанные на аналитической функции, и метод конечных разностей для решения однополосного уравнения Шредингера.

Несколько примеров из научного творчества Л. Эйлера

1. Л.Эйлер (1707-1783) – один из самых удивительных ученых в истории человечества. Он внес неоценимый вклад в самые различные области науки. В свое время он был приглашен императрицей Екатериной для работы в Российской Академии Наук. У него было огромное число опубликованных, а еще больше неопубликованных научных работ. Он полагал, что после его смерти Академии наук потребуется 40 лет для того, чтобы разобрать его архив. Он ошибся: на самом деле для этого потребовалось 80 лет. Один из его замечательных результатов – это формула Эйлера:

$$e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x . \quad (1)$$

Эту формулу иногда связывают с именем современника Л.Эйлера Муавра. Однако именно последний получил соотношение

$$\left[r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)\right]^n = r^n\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right),$$

которое следует из (1).

Сама формула (1) легко доказывается, если использовать известные разложения для экспоненты, синуса и косинуса [15]:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots . \quad (2)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots . \quad (3)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots . \quad (4)$$

Заменяя x на (ix), мы убеждаемся в справедливости выражения (1). Если в (1) подставить $x = \pi$ или $x = \frac{\pi}{2}$, то получим удивительную связь между тремя замечательными числами e, i и π: $e^{i\pi} = -1$; $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$.

Приведем две цитаты из книги американских математиков [16] «Математика и фантазия»: «Эта формула, возможно, самая компактная и замечательная из всех формул – была обнаружена Эйлером еще до открытия ее Муавром. Она обращена к мистику, равно как и к естествоиспытателю, философу и математику». Далее авторы цитируют обращение некоего профессора математики к студентам: «Джентельмены, это, наверное, правда, но она (формула) абсолютно парадоксальна; мы не можем понять ее, и мы не знаем, что она значит, но мы доказали ее, и поэтому она должна быть достоверной». Отметим, что эта формула широко используется в современной физике, в частности, в квантовой теории рассеяния.

2. Еще в конце 17 века известный ученый Я.Бернулли сформулировал задачу: найти сумму ряда из обратных квадратов натуральных чисел $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Сам Я.Бернулли решить свою задачу не смог. За это взялся Л.Эйлер [17]. Он нашел

несколько приближенных формул для этой суммы, причем достаточных для практических приложений. Так, в одной из формул точность составляла семь значащих цифр. Однако, ученый стремился к получению точного ответа. Полученный впоследствии точный ответ выглядел так: $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^6}{6}$. Вызывает удивление, каким образом при суммировании простых дробей возникает иррациональное число π? Из алгебры [2] известно, что если уравнение степени n

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \qquad (5)$$

имеет n различных корней, то многочлен $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ можно представить в следующем виде $P_n(x) = a_n(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$. Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в этих выражениях, мы получим соотношение между корнями и коэффициентами многочлена, известное как обобщенная теорема Виета. Для $n=2$ имеем просто теорему Виета:

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_2(x-x_1)(x-x_2).$$

Тогда $a_1/a_2 = -x_1 - x_2$ и $a_0/a_2 = x_1x_2$. Исключая a_2, получим:

$$a_1 = -a_0\left(\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}\right) = -a_0\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right).$$

Для $n=3$ имеем: $a_1 = -a_0\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)$ и т.д. Для произвольных n:

$$a_1 = -a_0\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right) \qquad (6)$$

Далее Эйлер рассматривал уравнение:

$$\frac{\sin x}{x} = 0,$$

корни которого известны: $\pm\pi,\ \pm 2\pi,\ \pm 3\pi,\ldots$

Записывая для $\sin x$ вышеприведенное разложение в виде бесконечного ряда, получим уравнение «бесконечной степени»

$$1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\ldots=0.$$

Вводя обозначение $t = x^2$, имеем

$$1-\frac{t}{3!}+\frac{t^2}{5!}-\frac{t3}{7!}+\ldots=0, \qquad (7)$$

корни которого равны π^2, $(2\pi)^2$, $(3\pi)^2$, и т.д.

Предполагая, что для этого уравнения выполняются те же соотношения между коэффициентами (6), что и для обычных уравнений, получим

$$-\frac{1}{3!} = -\frac{1}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots\right), \qquad (8)$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}. \qquad (9)$$

Этим же методом Эйлер вывел сумму $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$

3. Еще 2 случая, связанные с именем Л.Эйлера. Они касаются также еще одного великого ученого П.Ферма, жившего в 17 веке. Ферма не был профессиональным математиком. Он работал в суде города Тулузы. Высокообразованный человек, знавший много языков: латынь, древнегреческий, итальянский, испанский, французский. Решенные им научные проблемы и задачи, сформулированные теоремы он не публиковал в виде научных статей, рассказывая о них лишь в письмах к коллегам, среди которых были Паскаль, Гюйгенс, Декарт и др. Ферма внимательно проштудировал переизданную в начале 17 века книгу древнегреческого математика Диофанта «Арифметика». На полях этой книги он делал заметки, приводя без доказательства придуманные им теоремы. После его смерти сын переиздал труд Диофанта с пометками отца. Более 100 лет крупнейшие математики доказывали его теоремы. Ферма ни разу не ошибся: все его теоремы оказались верными и были доказаны. Все, кроме одной –

великой теоремы Ферма, которая формулируется так: «Уравнение $x^n + y^n = z^n$ не разрешимо в целых числах для $n > 2$». По поводу этой теоремы на полях Ферма написал: «Я располагаю поистине чудесным доказательством, но поля слишком узки, чтобы его разместить». Эйлер был первым, кто доказал теорему для случая n = 3 и 4. В дальнейшем теорема Ферма была доказана для огромного множества различных значений n, но общее доказательство для любых n отсутствовало. Оно было найдено, в конце концов, в наше время группой математиков, использовавших современную математическую технику [18]. При этом найденное доказательство нашло косвенный характер. Судите сами. В 1955 году японский математик Ю. Танияма предложил теорему. Поскольку сам он ее не доказал, то теорема получила название гипотезы Таниямы. Почти через 30 лет немецкий математик Г.Фрей предложил новую теорему: если верна гипотеза Ю.Таниямы, то верна и великая теорема Ферма, то есть теорема Ферма есть следствие гипотезы Таниямы. Строго доказал эту теорему американский математик К.Рибет. Наконец, точку в этой истории в 1994 году поставили американские математики Э.Уайлс и Р.Тейлор, доказавшие гипотезу Ю.Таниямы. Таким образом, доказательство великой теоремы Ферма явилось итогом почти сорокалетней работы пяти крупных математиков мира. Однако, главная интрига великой теоремы – как сам Ферма доказал ее – осталась. В том, что он нашел это доказательство мало кто из ученых, знакомых с его прекрасными работами, сомневается.

И все-таки в истории науки сохранилось одно ошибочное утверждение П.Ферма. В 1654 году Ферма написал Паскалю с излишней самоуверенностью: «Последовательное квадрирование двух при увеличении степеней на 1, то есть $\left(2^{2^k}+1\right)$ всегда простое число – свойство, за истинность которого я ручаюсь». Однако, Л.Эйлер показал, что при k = 5 получается десятизначное число, которое делится на 641. Само число 4294967297. Доказательство может быть получено на простых калькуляторах.

Литература

1 Landau L.D., Lifshitz E.M. Quantum Mechanics: Non-relativistic Theory (Pergamon, Oxford, 1977), 3rd. ed.

2 Griffiths David J. Introduction Quantum Mechanics (Prentice Hall, Upper Saddle River, 1995).

3 Greiner W. Quantum Mechanics - An Introduction (Springer, New York, 2001) 4th ed.

4 Aljaber S.M. Quantization of angular-momentum in the N-dimensional space // Il Nuovo Cimento B. – 1995. – Vol. 110. (8) –P.993-995.

5 Ho V.B. On the quantization of angular-momentum // Journal of physics a-mathematical and general. – 1994. – Vol. 27(18). – P.6237-6241.

6 Жусупов М.А., Жусупов А.М., Кабатаева Р.С., Жаксыбекова К.А. Методика расчета характеристик экзотических атомов // Вестник КазНУ, серия физическая. – 2017. – № 1 (60). – – С.130-135.

7 Галицкий В.М., Карнаков Б.М., Коган В.И. Задачи по квантовой механике, учебное пособие. - М. Наука, 1981. – 648 с.

8 Monerat G.A., Ferreira Filho L.G.,Correa Silva E.V., Oliveira-Neto G., Nogueira P.H.A.S., de Assumpcao A.R.P. Quantization of hamiltonian systems via finite differences method // Revista brasileira de ensino de fisica. – 2010. – Vol.32(1). – 1304.

9 Colera M., Perez-Saborid M. An efficient finite differences method for the computation of compressible, subsonic, unsteady flows past airfoils and panels // Journal of computational physics. – 2017. – Vol.345. – P.596-617.

10 Cristescu I.A. Approximate solution of nonlinear poisson equation by finite differences method // Romanian reports in physics. –2016. – Vol.68(2). – P.473-485.

11 Sepehrian B., Radpoor M.K. Numerical solution of non-linear Fokker-Planck equation using finite differences method and the cubic spline functions // Applied mathematics and computation. – 2015. – Vol.262. – P.187-190.

12 Lakner M., Plazl I. The finite differences method for solving systems on irregular shapes // Computers and chemical engineering. – 2008. – Vol.32(12). – P.2891-2896.

13 Bouazra A., Abdi-Ben Nasrallah S., Said M. Application of coordinate transformation and finite differences method for electron and hole states calculations // Physica E-low-dimensional systems and nanostructures. – 2015. – Vol. 65. – P. 93-99.

14 Stupovski B.M., Crnjanski J.V., Gvozdic D.M. Application of coordinate transformation and finite differences method in numerical modeling of quantum dash band structure // Computer physics communications. – 2011. – Vol. 182(2). – P. 289-298.

15 Аленицын А.Г., Бутиков Е.И., Кондратьев А.С. Краткий физико-математический справочник. – М.: Наука, 1990. – 368 с.

16 Kasner E.N., Newman J. Mathematics and the Imagination. – N.Y., 1940.

17 Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. – М., 1957.

18 Соловьев Ю.П. Гипотеза Таниямы и последняя теорема Ферма // Соросовский образовательный журнал. – 1998. – №2. – С.135.

References

1 L.D. Landau and E.M. Lifshitz, Quantum Mechanics: Non-relativistic Theory (Pergamon, Oxford, 1977), 3rd. ed.
2 D.J. Griffiths, Introduction Quantum Mechanics (Prentice Hall, Upper Saddle River, 1995).
3 W. Greiner, Quantum Mechanics - An Introduction (Springer, New York, 2001) 4th ed.
4 S.M. Aljaber, Il Nuovo Cimento B, 110(8), 993-995 (1995.) doi: 10.1007/BF02722866.
5 V.B. Ho, Journal of physics a-mathematical and general, 27(18), 6237-6241 (1994). doi: 10.1088/0305-4470/27/18/031.
6 M.A. Zhusupov, A.M. Zhusupov, R.S. Kabatayeva, and K.A. Zhaksybekova, Recent Contributions to Physics, 1 (60), 130-135 (2017). (in Russ).
7 V.M. Galitsky, B.M. Karnakov, V.I. Kogan, Zadachi po kvantovoy mekhanike, uchebnoe posobie, (Moscow: Nauka, 1981), 648 p. (in Russ).
8 G.A. Monerat, Filho L.G. Ferreira, E.V. Correa Silva, G. Oliveira-Neto, P.H.A.S. Nogueira, A.R.P. de Assumpcao, Revista brasileira de ensino de fisica, 32 (1), 1304 (2010). doi: 10.1590/S1806-11172010000100004.
9 M. Colera, M. Perez-Saborid, Journal of computational physics, 345, 596-617 (2017). doi: 10.1016/j.jcp.2017.05.046.
10 I.A. Cristescu, Romanian reports in physics, 68 (2), 473-485, (2016).
11 B. Sepehrian, M.K.Radpoor, Applied mathematics and computation, 262, 187-190 (2015). doi: 10.1016/j.amc.2015.03.062.
12 M. Lakner, I. Plazl, Computers and chemical engineering, 32, 12, 2891-2896 (2008). doi: 10.1016/j.compchemeng.2008.02.005.
13 Bouazra, S. Abdi-Ben Nasrallah, M. Said, Physica E-low-dimensional systems and nanostructures, 65, 93-99 (2015). doi: 10.1016/j.physe.2014.08.011.
14 B.M. Stupovski, J.V. Crnjanski, D.M. Gvozdic, Computer physics communications, 182 (2), 289-298 (2011). doi: 10.1016/j.cpc.2010.09.014.
15 A.G. Alenitsyn, E.I. Butikov, A.S. Kondrat'yev Kratkiy fiziko-metematicheskiy sprovochnik (Moscow: Nauka, 1990), 368 p. (in Russ).
16 E.N. Kasner, J. Newman Mathematics and the Imagination (N.Y., 1940).
17 G. Polya Matematika i pravdopodobnye rassuzhdeniya (Moscow, 1957). (in Russ).
18 Yu.P. Solov'yov, Sorosovskiy obrazovatel'nyi zhurnal, 2, 135 (1998). (in Russ).