ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИСТИННОЙ ЭНЕРГИИ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ В ОТО (РТГЭ)

Г.Ж. Мурзагалиев, А.А. Комаров
Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г.Алматы

В статье рассматривается возможность определения выражения истинной энергии гравитационного поля во внешней задаче Шварцшильда на основе псевдотензора энергии-импульса.

Одной из серьёзных проблем или почти неразрешимой трудностью в эйнштейновской релятивистской теории гравитации (ОТО – общей теории относительности) является «неуловимый вклад выбора системы координат и это физически очень странная ситуация» [1,2].

Подробно не описывая и не анализируя эту проблему, мы в данной статье хотим обратить внимание на некоторую возможность определения истинного выражения для энергии гравитационного поля во внешней задаче Шварцшильда с помощью так называемого псевдотензора энергии-импульса [3].

Существуют разные выражения (формулы) определения энергии-импульса гравитационного поля и их потока. Мы выбрали данный вариант, а именно псевдотензор энергии-импульса по Ландау-Лифшицу, по соображениям его симметричности относительно своих двух значков, как должно быть для изолированной замкнутой системы, и достаточной убедительности и корректности его вывода.

Вклад выбора системы координат по-другому называется координатным эффектом. Координатный эффект – отклонение от галилеевых значений метрического тензора и других, зависящих от него выражений, обусловленное переходом в другую (не декартову) систему координат. Задача состоит в том, чтобы выделить этот вклад.

В отсутствии гравитационного поля в 4^{ex}-мерной декартовой системе координат

$$x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z \tag{1}$$

метрика имеет вид

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 . \tag{2}$$

Соответственно, компоненты метрического тензора, согласно общему выражению для квадрата интервала,

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \mu,\nu = 0,1,2,3 \tag{3}$$

равны

$$g_{00} = 1, g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1; g_{\alpha\beta} = 0, \alpha \neq \beta. \tag{4}$$

Это и есть галилеевы значения метрического тензора. Для 4^{ex}-мерного псевдоевклидова пространства в случае сферических координат в качестве пространственных

$$x^0 = ct, x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \varphi \tag{5}$$

и отсутствия гравитационного поля квадрат интервала приобретает вид

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right), \tag{6}$$

где

$$g_{00} = 1, g_{11} = -1, g_{22} = -r^2, g_{33} = -r^2 \sin^2\theta; g_{\alpha\beta} = 0, \alpha \neq \beta. \tag{7}$$

Контравариантные компоненты метрического тензора определяются по правилу

$$g^{\mu\nu} = \frac{minor\left(g_{\mu\nu}\right)}{g}, \tag{8}$$

в котором $g = \left|g_{\mu\nu}\right|$ - определитель, составленный из ковариантных составляющих метрического тензора. В случае метрики (7)

$$g = \left|g_{\mu\nu}\right| = -r^4 \sin^2\theta \tag{9}$$

и соответствующие контравариантные компоненты метрического тензора равны

$$g^{00} = 1, g^{11} = -1, g^{22} = -\frac{1}{r^2}, g^{33} = -\frac{1}{r^2 \sin^2\theta}. \tag{10}$$

Среди скобок Кристоффеля второго рода

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu}\right), \tag{11}$$

у которых из 64=4[3] составляющих различными являются только 40 в силу симметричности по нижним индексам: $\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \Gamma^\mu_{\beta\varepsilon}$, для случая метрики (6) отличны от нуля только следующие

$$\Gamma^1_{22} = -r,\ \ \Gamma^1_{33} = -r\sin^2\theta,\ \ \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta,$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r},\ \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{23} = ctg\theta. \tag{12}$$

Рассмотрим 4[ex]-мерную метрику внешней задачи Шварцшильда

$$ds^2 = e^\nu c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{e^\nu} - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right), \tag{13}$$

где

$$e^\nu = 1 - \frac{r_g}{r}, r_g = \frac{2\gamma M}{c^2}, \tag{14}$$

r_g - гравитационный радиус центрального тела с массой M, γ - ньютоновская постоянная тяготения. Соответствующие этой метрике ковариантные компоненты метрического тензора определяются выражениями

$$g_{00}=1-\frac{r_g}{r}, g_{11}=-\frac{1}{1-\frac{r_g}{r}}, g_{22}=-r^2, g_{33}=-r^2\sin^2\theta; g_{\alpha\beta}=0,\ \alpha\neq\beta. \tag{15}$$

Используя (8), находим контравариантные компоненты метрического тензора

$$g^{00}=\frac{1}{1-\frac{r_g}{r}},\ g^{11}=-\left(1-\frac{r_g}{r}\right),\ g^{22}=-\frac{1}{r^2},\ g^{33}=-\frac{1}{r^2\sin^2\theta};\ g^{\alpha\beta}=0,\ \alpha\neq\beta. \tag{16}$$

Вычисление скобок Кристоффеля для этого случая даёт следующие значения

$$\begin{gathered}\Gamma_{22}^1=-r+r_g,\quad \Gamma_{33}^1=(-r+r_g)\sin^2\theta,\quad \Gamma_{33}^2=-\sin\theta\cos\theta,\\ \Gamma_{12}^2=\Gamma_{21}^2=\Gamma_{13}^3=\Gamma_{31}^3=\frac{1}{r},\ \Gamma_{23}^3=\Gamma_{32}^3=ctg\theta,\\ \Gamma_{11}^1=-\frac{r_g}{2r^2\left(1-\frac{r_g}{r}\right)}, \Gamma_{00}^1=\frac{r_g}{2r^2}\left(1-\frac{r_g}{r}\right), \Gamma_{10}^0=\Gamma_{01}^0=\frac{r_g}{2r^2\left(1-\frac{r_g}{r}\right)}.\end{gathered} \tag{17}$$

Сравнение (17) с (12) позволяет заключить: гравитационное поле приводит к появлению аддитивных добавок в скобках Кристоффеля для случая отсутствия гравитационного поля (Γ_{22}^1, Γ_{33}^1) и новых скобок Кристоффеля (Γ_{11}^1, $\Gamma_{00}^1, \Gamma_{10}^0=\Gamma_{01}^0$). В отсутствии гравитационного поля (17) переходит в (12).

В галилеевом пространстве-времени с метрикой (2) все скобки Кристоффеля равны нулю. Переход в другую пространственную систему координат сопровождается координатным эффектом и соответственно появлением скобок Кристоффеля. «Включение» гравитационного поля проявляется в том, что появляются аддитивные поправки и новые скобки Кристоффеля. Это наводит на мысль: если устранить координатный эффект, то истинное («чистое») влияние гравитационного поля проявится только в тех скобках Кристоффеля, в которых наблюдаются аддитивные поправки и которые вновь появляются:

$$\begin{gathered}\Gamma_{22}^1=r_g,\qquad \Gamma_{33}^1=r_g\sin^2\theta,\\ \Gamma_{11}^1=-\frac{r_g}{2r^2\left(1-\frac{r_g}{r}\right)},\ \Gamma_{00}^1=\frac{r_g}{2r^2}\left(1-\frac{r_g}{r}\right),\ \Gamma_{10}^0=\Gamma_{01}^0=\frac{r_g}{2r^2\left(1-\frac{r_g}{r}\right)}.\end{gathered} \tag{18}$$

Если «выключить» гравитационное поле (т.е. $r_g=0$), то и эти, подобно другим, скобки Кристоффеля станут равны нулю, что соответствует пространству-времени с метрикой (2), т.е. галилееву пространству.

По нашему мнению подстановка (18) в выражение для псевдотензора энергии-импульса позволит получить его составляющие, которые характеризуют те или иные свойства гравитационного поля. В частности, t^{00} - плотность энергии, t^{ik} – трехмерный тензор натяжения, t^{0i} - плотность потока энергии-импульса, I, k = 1,2,3..

Итак, для получения выражения энергии гравитационного поля во внешней задаче Шварцшильда нам необходимо найти t^{00}. Согласно [3] псевдотензор энергии-импульса гравитационного поля равен

$$t^{\mu\nu} = \frac{c^4}{16\pi\gamma}\Big\{\left(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} - g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\right)\left(2\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}\Gamma^{\theta}_{\sigma\theta} - \Gamma^{\sigma}_{\alpha\theta}\Gamma^{\theta}_{\beta\sigma} - \Gamma^{\sigma}_{\alpha\sigma}\Gamma^{\theta}_{\beta\theta}\right) +$$
$$+ g^{\mu\alpha}g^{\beta\sigma}\left(\Gamma^{\nu}_{\alpha\theta}\Gamma^{\theta}_{\beta\sigma} + \Gamma^{\nu}_{\beta\sigma}\Gamma^{\theta}_{\alpha\theta} - \Gamma^{\nu}_{\sigma\theta}\Gamma^{\theta}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}\Gamma^{\theta}_{\sigma\theta}\right) +$$
$$+ g^{\nu\alpha}g^{\beta\sigma}\left(\Gamma^{\mu}_{\alpha\theta}\Gamma^{\theta}_{\beta\sigma} + \Gamma^{\mu}_{\beta\sigma}\Gamma^{\theta}_{\alpha\theta} - \Gamma^{\mu}_{\sigma\theta}\Gamma^{\theta}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\Gamma^{\theta}_{\sigma\theta}\right) +$$
$$+ g^{\alpha\beta}g^{\sigma\theta}\left(\Gamma^{\mu}_{\alpha\sigma}\Gamma^{\nu}_{\beta\theta} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\Gamma^{\nu}_{\sigma\theta}\right). \tag{19}$$

Тогда плотность энергии гравитационного поля определяется выражением

$$t^{00} = \frac{c^4}{16\pi\gamma}\Big\{\left(g^{0\alpha}g^{0\beta} - g^{00}g^{\alpha\beta}\right)\left(2\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}\Gamma^{\theta}_{\sigma\theta} - \Gamma^{\sigma}_{\alpha\theta}\Gamma^{\theta}_{\beta\sigma} - \Gamma^{\sigma}_{\alpha\sigma}\Gamma^{\theta}_{\beta\theta}\right) +$$
$$+ 2g^{0\alpha}g^{\beta\sigma}\left(\Gamma^{0}_{\alpha\theta}\Gamma^{\theta}_{\beta\sigma} + \Gamma^{0}_{\beta\sigma}\Gamma^{\theta}_{\alpha\theta} - \Gamma^{0}_{\sigma\theta}\Gamma^{\theta}_{\alpha\beta} - \Gamma^{0}_{\alpha\beta}\Gamma^{\theta}_{\sigma\theta}\right) +$$
$$+ g^{\alpha\beta}g^{\sigma\theta}\left(\Gamma^{0}_{\alpha\sigma}\Gamma^{0}_{\beta\theta} - \Gamma^{0}_{\alpha\beta}\Gamma^{0}_{\sigma\theta}\right). \tag{20}$$

После подстановки (16) и (18) в (20) получим значение для плотности энергии гравитационного поля во внешней задаче Шварцшильда

$$t^{00} = -\frac{c^4}{8\pi\gamma}g^{00}\Gamma^{1}_{11}\left(g^{22}\Gamma^{1}_{22} + g^{33}\Gamma^{1}_{33}\right) = -\frac{c^4}{8\pi\gamma}\frac{r_g^2}{r^4\left(1-\dfrac{r_g}{r}\right)^2}. \tag{21}$$

Подставляя выражение (14) для гравитационного радиуса, окончательно получим

$$t^{00} = -\frac{\gamma M^2}{2\pi r^2\left(r - r_g\right)^2}. \tag{22}$$

Полученное выражение имеет размерность $L^{-1}MT^{-2}$ как у плотности энергии, что соответствует физическому смыслу компоненты t^{00} псевдотензора энергии-импульса гравитационного поля. Это выражение обусловлено гравитационным полем (γ или r_g), т.е., если r_g (γ) = 0, то t^{00}=0. Поскольку метрика (13) получена относительно внешней системы отсчёта, т.е. наблюдателя, расположенного на бесконечности, выражение (22) для плотности энергии гравитационного поля относится к той же системе отсчёта. Точка $r = r_g$ не является, как было доказано [3], истинной особой точкой. Относительно сопутствующей системы отсчёта она устраняется. Особой (сингулярной) точкой является r=0.

Полная энергия гравитационного поля получится путём интегрирования

$$W = \int t^{00}dV. \tag{23}$$

В случае слабого гравитационного поля $\frac{r_g}{r} << 1$ разложим выражение для t^{00} по степеням малого параметра и ограничимся постньютоновским (первым релятивистским) приближением $\left(\sim \frac{1}{c^2}\right)$:

$$t^{00} = -\frac{\gamma M^2}{2\pi r^4} - \frac{2\gamma^2 M^3}{\pi r^5 c^2} + O\left(\frac{1}{c^4}\right). \tag{24}$$

Тогда полная энергия гравитационного поля, согласно (23), получается равной

$$W = \frac{2\gamma M^2}{r} + \frac{4\gamma^2 M^3}{r^2 c^2} + const. \tag{25}$$

Поскольку шварцшильдово поле является статическим, поэтому считаем на бесконечности $(r \to \infty)$ значение энергии равным нулю. Поэтому аддитивная постоянная в (25) должна равняться нулю.

Литература

1 Петров А.З. Современное состояние учения о гравитации // Препринт ИТФ АН Украинской ССР -71-IМ, Киев. – 1971. – С. 35.

2 Петров А.З. Понятие энергии в общей теории относительности // Тематический сборник «Гравитация и теория относительности». - Изд-во Казанского университета. - 1963. – С. 119-147.

3 Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. – М.: Наука, 1988. – 512 с.

СЖТ (ЭГРТ)-ДА ГРАВИТАЦИЯЛЫҚ ӨРІСТІҢ ШЫН ЭНЕРГИЯСЫН ЕСЕПТЕУДІҢ БІР ЖАҒДАЙЫ ЖӨНІНДЕ

Ғ.Ж. Мырзағалиев, А.А. Комаров

Мақалада энергия-импульстің псевдотензоры негізінде Шварцшильдтің сыртқы есебі бойынша гравитациялық өрістің шын энергиясын анықтаудың бір мүмкіншілігі ұсынылады.

ON THE CALCULATION OF TRUE ENERGY OF THE GRAVITATIONAL FIELD IN GR

G.Zh. Murzagaliev, A.A. Komarov

The possibility to define the true energy of the gravitational field in external Schwarzschild' problem is treated on the basis of energy-momentum pseudotensor.