ЗАМКНУТАЯ МОДЕЛЬ ВСЕЛЕННОЙ ФРИДМАНА В МОДИФИЦИРОВАННОЙ ГРАВИТАЦИОННОЙ ТЕОРИИ

О.Ш. Шаршекеев[1], А.М. Сагынбаев[2], А.С. Таукенова[3]
[1]*Кыргызский национальный университет им. Баласагына, г. Бишкек,*
[2]*Таласский госуниверситет, КР, г. Талас,*
[3]*Казахский национальный университет им. аль – Фараби, г. Алматы*

В работе рассмотрена замкнутая модель Вселенной Фридмана в модифицированной гравитационной теории (с учетом тензора Римана). Получена зависимость масштабного фактора от времени для горячего ультрарелятивистского случая $\left(p=\frac{\varepsilon}{3}\right)$. При этом показатель степени тензора Римана выбран $\alpha = 1/2$. Если положим параметр $A=\sqrt{6}$, то получается решение, в котором отсутствует физическая сингулярность. Аналогичное решение получено и при $A=\sqrt{3}$.

В развитии космологии XX в. было два важнейших этапа. Первый этап начался в 1922-1924 годах, когда А. Фридман, на основе общей теории относительности (ОТО), создал теорию однородной изотропной расширяющейся Вселенной. До середины 60-х годов XX века оставалось неясным, какой была Вселенная на ранних стадиях своей эволюции – горячей или холодной. Решающим моментом, ознаменовавший собой начало второго этапа в развитии современной космологии, было открытие Пензиасом и Вильсоном в 1964-1965 годах микроволнового реликтового излучения с температурой $T \approx 2,7K$, приходящего к нам из самых отдаленных областей Вселенной. Существование такого излучения предсказывалось теорией горячей Вселенной, которая сразу же после открытия реликтового излучения стала общепринятой.

Фридмановская космология вполне удовлетворительно описывает современное состояние Вселенной, но неясной остается проблема начального состояния Вселенной. Теорема Пенроуза – Хокинга [1], сформулированная и доказанная при достаточно общих предположениях, практически с необходимостью утверждает существование сингулярностей в решениях уравнений Эйнштейна.

В решении Фридмана при всех уравнениях состояния ($p=0$ и $p=\varepsilon/3$) плотность вещества во Вселенной при $t \to 0$ стремится к бесконечности, причем соответствующие решения оказываются формально непродолжаемыми в область $t<0$. После исследования общей структуры пространства-времени вблизи сингулярности [2] и после того, как был доказан ряд теорем о сингулярностях в ОТО с помощь топологических методов [3], возможность решить эту проблему в рамках классической теории гравитации стала представляться маловероятной [4]. Поэтому главный вопрос самой космологии - проблема сингулярности. Как мы отметили выше, в рамках ОТО появление сингулярности считается неизбежным. Таким образом, возникает необходимость обобщения ОТО в условиях, близких к сингулярности [5]. Уже имеются некоторые результаты, позволяющие надеяться на устранение сингулярности [6,7,8] и создание разумной космологической модели без сингулярностей.

Обычно считается, однако, что при плотности $\mu \sim 10^{94}\ \frac{г}{см^3}$ квантовогравитационные эффекты становятся настолько велики, что квантовые флуктуации метрики начинают превосходить значение g_{ik}, и описание Вселенной в терминах классического пространства-времени становится невозможным [4]. Все это потребовало сильной модификации основ модели. В модифицированном виде модель является одним из интенсивно разрабатываемых вариантов сценария раздувающейся Вселенной.

Таким образом, одной из наиболее интересных областей исследования МГТ (модифицированной гравитационной теории) является приложение к космологическим моделям. Поэтому в данной статье используется замкнутая модель Вселенной Фридмана с учетом 4-х тензора кривизны. Как уже отмечалось выше, предполагается, что отклонение от ОТО становится существенным вблизи сингулярности, и соответствующее решение может качественно отличаться от решений Фридмана.

Как известно, метрика однородной изотропной фридмановской космологической модели в сопутствующей системе координат, имеет вид:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - a^2(\tau)\left[d\chi^2 + \sin^2\chi\left(d\theta + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right], \tag{1}$$

где $a(\tau)$ - радиус Вселенной, или, точнее, ее масштабный фактор.

Описание эволюции Вселенной при $a(\tau) \to 0$ осуществимо лишь с учетом 4-х тензора кривизны. Это обстоятельство может привести к довольно неожиданным следствиям. В связи с этим масштабный фактор $a(\tau)$ определяется уравнением гравитационного поля с учетом 4-х тензора кривизны [9]:

$$R_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k R = \left[-A\widetilde{R}^{2(\alpha-1)}\left(2\alpha R_{\ell mni}R^{\ell mnk} - \frac{1}{2}\delta_i^k \widetilde{R}^2\right) - \alpha A\widetilde{R}^{2(\alpha-1)}\theta_i^k\right] + \chi T_i^k, \tag{2}$$

где

$$\theta_{ik}\delta g^{ik} = 2g_{ia}g^{kb}g^{\ell c}g^{md}R^a_{bcd}\delta R^i_{k\ell m}, \tag{3}$$

где R_{ik} - тензор Риччи, R - скаляр кривизны пространства, R^i_{klm} - четырехмерный тензор кривизны, $\widetilde{R}^2$ - квадрат R^i_{klm}, A - постоянная величина, T_i^k - тензор энергии–импульса материи, α - произвольный показатель степени, а θ_i^k - величина, содержащая производные третьего и четвертого порядка по g_{ik}.

При исследовании системы обобщенных уравнений гравитационного поля (с учетом R^i_{klm} тензора кривизны) для случая $\alpha = 1$ множитель в (2) $\widetilde{R}^{2(\alpha-1)}$ обращается в константу, и выбор постоянных интегрирования позволяет только смещать особую точку во фридмановских решениях. Поэтому представляет определенный интерес рассмотреть задачу при других значениях параметра α.

Выберем показатель степени в добавке к лагранжиану равным $1/2$, поскольку указанная степень приводит к существенному упрощению уравнений поля. Тогда система (2) имеет вид:

$$a^2 + a'^2 = \frac{2A}{a^4}\left(\widetilde{R}\right)^{-1}\left(a^2 + a'^2\right) - \frac{a^4}{3}\left[\frac{A}{2}\left(\widetilde{R}\right)^{-1}\theta_0^0 - \chi T_0^0\right], \tag{4}$$

$$a^2 + 2aa'' - a'^2 = \frac{2A}{a^4}\left(\widetilde{R}\right)^{-1}\left[2\left(aa'' - a'^2\right)^2 + \left(a^2 + a'^2\right)^2\right] - a^4\left[\frac{A}{2}\left(\widetilde{R}\right)^{-1}\theta_1^1 - \chi T_1^1\right].$$

Поскольку $\alpha = \dfrac{1}{2}$

$$\left(\widetilde{R}\right)^{-1} = \frac{a^4}{2\sqrt{3}}\left[\left(aa''-a'^2\right)^2 + \left(a^2 + a'^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{5}$$

то (4) перепишется в виде:

$$\begin{aligned} a^2 + a'^2 &= \frac{A}{\sqrt{3}}\left[\left(aa''-a'^2\right)^2 + \left(a^2 + a'^2\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}\left(a^2 + a'^2\right) - \\ &- \frac{Aa^8}{12\sqrt{3}}\left[\left(aa''-a'^2\right)^2 + \left(a^2 + a'^2\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}\theta_0^0 + \frac{1}{3}\chi a^4 T_0^0, \\ a^2 + 2aa''-a'^2 &= \frac{A}{\sqrt{3}}\left[\left(aa''-a'^2\right)^2 + \left(a^2 + a'^2\right)^2\right]^{-\frac{1}{3}}\left[2\left(aa''+a'^2\right)^2 + \left(a^2 + a'^2\right)^2\right] - \\ &- \frac{Aa^8}{12\sqrt{3}}\left[\left(aa''-a'^2\right)^2 + \left(a^2 + a'^2\right)^2\right]^{-\frac{1}{3}}\theta_1^1 + \chi a^4 T_1^1. \end{aligned} \tag{6}$$

Сумма последних уравнений дает

$$\begin{aligned} a^2 + 2aa''-a'^2 &= \frac{A}{\sqrt{3}}\left[\left(aa''-a'^2\right)^2 + \left(a^2 + a'^2\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} + \frac{\chi a^4}{2}\left(\frac{1}{3}T_0^0 + T_1^1\right) - \\ &- \frac{Aa^8}{8\sqrt{3}}\left[\left(aa''-a'^2\right)^2 + \left(a^2 + a'^2\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{3}\theta_0^0 + \theta_1^1\right). \end{aligned}$$

Это уравнение определяет эволюцию масштабного фактора $a(\tau)$ для замкнутой модели при $\alpha = \frac{1}{2}$.

Поскольку в рассмотренном случае отличными от нуля являются только диагональные компоненты g_{ik}, то величина показывает, что $\theta_0^0 = \theta_1^1 = 0$. Следовательно, последнее уравнение теперь имеет вид:

$$a^2 + aa'' = \frac{A}{\sqrt{3}}\left[(aa''- a'^2)^2 + (a^2 + a'^2)^2\right]^{\frac{1}{2}} + \frac{\chi a^4}{2}\left(\frac{1}{3}T_0^0 + T_1^1\right). \tag{7}$$

Для определения того, как Вселенная эволюционирует во времени, необходимо знать еще так называемое уравнение состояния вещества, которое показывает, как связаны между собой плотность энергии вещества и давление в нем. В данном случае рассмотрен предельный случай $p = \frac{\varepsilon}{3}$, реализуемый для горячего ультрарелятивистского газа невзаимодействующих частиц.

В выбранной сопутствующей системе координат вещество неподвижно. Отсюда следует, что $u^\alpha = 0,\ u^0 = \frac{1}{a}$, и из выражения для тензора энергии–импульса $T_i^k = (2+p)u_i u^k - p\delta_i^k$ следует, что $T_0^0 = \varepsilon,\ T_1^1 = -p$. При этом уравнение (7), после ряда преобразований, принимает вид:

$$2aa''\left(a^2 + \frac{A}{3}a'^2\right) + a^2\left(a''^2 + a^2\right)\left(1 - \frac{A^2}{3}\right) - \frac{2}{3}A^2 a^{1^2}\left(a^2 + a'^2\right) = 0. \tag{8}$$

Величина A, как следует из (8), безразмерна и определяется отношением характерной длины l к максимальному радиусу Мира в замкнутой модели. В случае, если указанный параметр велик, поляризационная добавка в решении всюду существенна. Последнее можно проиллюстрировать рассмотрением случая $A=\sqrt{6}$, когда уравнение (8) принимает простой вид:

$$a^2 a''^2 - 2\left(2a'^2 + a^2\right) aa'' + \left[4a'^2\left(a^2 + a'^2\right) + a^4\right] = 0 .$$

Последнее равенство относительно aa'' является квадратным уравнением, следовательно:

$$aa'' - 2a'^2 - a^2 = 0 . \qquad (9)$$

Решение этого уравнения есть

$$a = \frac{a_0}{\cos(\eta)}, \qquad (10)$$

где a_0 произвольная постоянная, причем a_0 имеет размерность длины. Таким образом, (10) является законом расширения Вселенной.

Связь между τ и η находим из равенства $cd\tau = ad\eta$. Согласно (10) имеем

$$c\tau = a_0 \ln\left| tg\left(\frac{\eta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| . \qquad (11)$$

Постоянная интегрирования выбрана равной нулю с тем, чтобы при $\eta = 0$ величина τ обращалась в нуль. Полученные уравнения (10) и (11) определяют в параметрическом виде зависимость $a(\tau)$ и имеет регулярный минимум a_0 при $\eta = 0$. Последний достигается предварительным сжатием от $\eta = -\frac{\pi}{2}$ $(\tau = -\infty)$ до $\eta = 0$ после чего следует расширение, охватывающее всю временную положительную полуось.

Таким образом, модификация уравнений тяготения с учетом R^i_{klm} дает закрытую космологическую модель с регулярным минимумом масштабного фактора при $\tau = 0$. Эволюция модели симметрична относительно указанной точки: $a(\tau) = a(-\tau)$, в чем легко убедится из (10). Отсутствие асимптотического выхода на решение Фридмана связано с существенным влиянием поляризационной добавки на всех этапах решения.

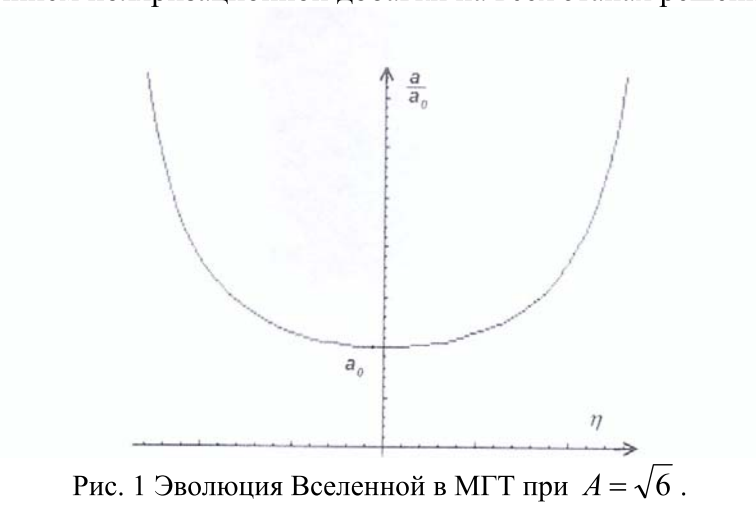

Рис. 1 Эволюция Вселенной в МГТ при $A=\sqrt{6}$.

Таким образом, квадратичные по 4-х мерному тензору кривизне добавки в лагранжиане гравитационного поля не дают возможности принять строгие теоремы Пенроуза – Хокинга о неизбежности сингулярности. Поэтому в рамках данной теории появляется вероятность устранения подобного явления. С физической точки зрения этот факт мог бы означать ликвидацию сингулярностей при более корректном учете квантовых эффектов в сильном гравитационном поле.

Нахождение общего решения в точном виде для всего пространства в течение всего времени невозможно. Но для решения поставленного вопроса в этом нет необходимости; достаточно исследовать вид решения вблизи особенности [10].

Представляет интерес рассмотреть случай и в при другом значении A, например $A=\sqrt{3}$. Тогда из уравнения (8) имеем:

$$aa''-a'^2=0.$$

Производя интегрирования, получим

$$a=a_0 e^{\eta/\eta_0}. \qquad (12)$$

где a_0 - опять произвольная постоянная, имеющая размерность длины, а η_0 безразмерная постоянная величина. Зависимость a/a_0 от η изображается в виде зависимости, представленной на рисунке 2.

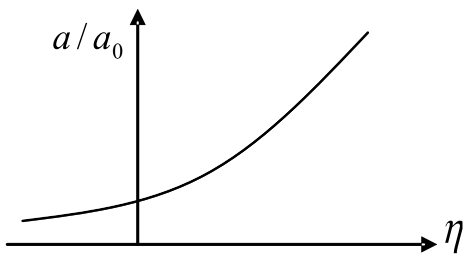

Рис.2 Эволюция Вселенной в МГТ при $A=\sqrt{3}$.

Для связи между τ и η имеем:

$$c\tau=a_0\eta_0\left(e^{\eta/\eta_0}-1\right) \qquad (13)$$

При этом постоянная интегрирования принята равной - $a_0\eta_0$, так как по требованию при $\eta=0$ величина τ должна обращаться в нуль. Как видно из (12) и (13) зависимость масштабного фактора a от τ выражается непосредственно:

$$a=c\tau/\eta_0+a_0.$$

Т.е. масштабный фактор зависит от собственного времени линейно. Это означает, что расширение Вселенной идет с постоянной скоростью, заданной в момент $\tau=0$. Эволюция такого мира особенно проста. Отметим, что сингулярность смешается в прошлое (при отрицательном времени τ).

Если рассматривать открытую модель Вселенной Фридмана в МГТ при $A=\sqrt{3}$, то также получается решения в виде (12). Отсюда можно прийти к заключению о том, что в рамках данной модификации (с учетом тензора Римана) все модели Фридмана дают одно и то же решение в виде (12). Физически это соответствует одинаковости эволюции Вселенной вне зависимости от знака кривизны пространства–времени.

Литература

1. Пенроуз Р. Структура пространства – времени. - М.: Мир, 1972, 300 с.
2. Зельдович Я.Б., Новиков И.Д. Строение и эволюция Вселенной. - М.: Наука, 1975, 736с.
3. Хокинг С., Эллипс Дж. Крупномасштабная структура пространства. - М.: Мир 1977, 436 с.
4. Линде А.Д. Физика элементарных частиц и инфляционная космология. - М.: Наука 1990.
5. Гинсбург В.Л. Какие проблемы физики и астрономии представляются сейчас особенно важный и интересный? // УФН, 1981 134с 469 – 517
6. Гурович В.И., Старабинский А.А. Квантовые эффекты и регулярные космологические модели. // ЖЭТФ,1977, с. 1683 – 1699.
7. Зельдович Я.Б. Теория вакуума и космология. // УФН 1981, 133 с. 479 -503.
8. Муханов В.Ф., Чибисов Г.В. Квантовые флуктуации и «несингулярная» Вселенная // Письма в ЖЭТФ, 1981, 33с.
9. Шаршекеев О.Ш. Модели метагалактики, поля Шварцшильда ОТО модифицированная теория гравитации. - Фрунзе: Мектеп,1980 116с.
10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.И. Теория поля. - М.: Наука, 1973, 504с.

МОДИФИКАЦИЯЛАНҒАН ГРАВИТАЦИЯЛЫҚ ТЕОРИЯДАҒЫ ФРИДМАН ӘЛЕМІНІҢ ТҰЙЫҚ МОДЕЛІ

О.Ш. Шаршекеев, А.М. Сағынбаев, А.С. Таукенова

Жұмыста модификацияланған гравитациялық теориядағы Фридман әлемінің тұйық моделі (Риман тензорын ескере отырып) қарастырылған. $\left(p=\frac{\varepsilon}{3}\right)$ ыстық ультрарелятивтік жағдайдағы масштабтық фактордың уақыттан тәуелділігі алынған. Риман тензоры көрсеткіші $\alpha = \frac{1}{2}$ деп алынған. Егер параметр $A=\sqrt{6}$ болса, физикалық сингулярлығы жоқ шешім алынады. $A=\sqrt{3}$ болған жағдайда да сәйкес шешім алынады.

CLOSED FRIEDMANN MODEL IN A MODIFIED GRAVITATIONAL THEORY

O.Sh. Sharshekeev, M. Sagynbaeva, A.S. Taukenova

We consider a closed Friedmann model in modified theory of gravity (including the Riemann tensor). The dependence of the scale factor on time for a hot ultrarelativistic case $\left(p=\frac{\varepsilon}{3}\right)$. In this case the exponent of the Riemann tensor chosen as $\alpha = \frac{1}{2}$. If we set the parameter $A=\sqrt{6}$, then, we obtain a solution in which there is no physical singularity. A similar solution was obtained at $A=\sqrt{3}$.