| 3-бөлім | Раздел 3 | Section 3 |
|---|---|---|
| **Бейсызық физикасы** | **Нелинейная физика** | **Nonlinear Physics** |

УДК 530.1

З.Ж. Жанабаев

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Казахстан, г. Алматы
E-mail: kazgu.kz@gmail.com

# Критерии самоподобия и самоаффинности динамического хаоса

Работа посвящена выяснению вопроса: существуют ли количественные критерии реализации универсального явления самоорганизации в открытых системах? Самоорганизацию также называют возникновением порядка из хаоса при выполнении условий нелинейности, неравновесности, незамкнутости.

В настоящей работе определены значения информации в неподвижных точках функции плотности вероятности реализации информации $I_1$ и энтропии $I_2$. Раскрыт смысл этих величин в виде критериев самоаффинности и самоподобия хаотических процессов, энтропии Колмогорова – Синая, фрактальных размерностей соответствующих масштабно-инвариантных множеств.

Показано, что самоорганизация имеет место, если нормированная на единицу информационная энтропия $S$ принимает значения в интервале $I_1 \leq S \leq I_2$, где $I_1 = 0.567$ , $I_2 = 0.806$ . Правомерность этих выводов доказана вычислением $S$ для известных фракталов и указаны возможные приложения результатов в современных отраслях науки и техники.

***Ключевые слова**:* информация, энтропия, фрактал, хаос, самоорганизация.

Z.Zh. Zhanabayev

**Criteria of self-similarity and self-affinityof dynamical chaos**

This work is devoted to study out the following question: does any qualitative criteria of realization of such universal phenomena as self-organization exist in open systems? Self-organization is also called the appearance of order from chaos under the conditions of non-linearity, non-equilibrium and non closure. Information entropy and fractal dimension of a set of physical values are usually used as quantitative characteristics of chaos. The more detailed characteristic of dynamical chaos is the Kolmogorov-Sinay entropy. Inhomogeneity of elements of a phase space can be taken into account by use of this characteristic. Technically, precise calculation of Kolmogorov – Sinay entropy can't be realized. Uncertain questions are: What is the minimum of increasing of entropy, how much it decreases at self-organization? Also it was not ascertained the connection between entropy criterion of self-similarity and self-affine with fractal dimensions characterized corresponding chaotic processes.

In the paper the values of information at fixed points of probability function of density of information $I_1$and entropy$I_2$ have been defined.Physical meaning of these values as criteria of self-affinity and self-similarity in chaotic processes have been explained. The Kolmogorov-Sinay entropy and fractal dimensions corresponding to scale-invariant sets have been described also.

It is shown that self-organization occurs when normalized information entropy Stakes values in the interval $I_1 \leq S \leq I_2$, where $I_1 = 0.567$, $I_2 = 0.806$. The precision of these findings is proved by calculation the value S. Applications of these results in modern scientific and engineering areas are possible.
***Keywords:*** information, entropy, fractal, chaos, self-organization.

З.Ж. Жаңабаев
**Динамикалық хаостың өзұқсас және өзаффиндік критерийлері**

Жұмыс мына сұрақты талқылауға арналған: ашық жүйелерде байқалатын әмбебап өзқауым құбылысының болуының сандық белгі-шарттары бар ма? Өзқауым құбылысын бейсызықтық, тепе-теңсіздік, тұйықталмағандық орындалғанда хаостан тәртіптің пайда болуы деп те қарастырады. Хаостың сандық сипаттамалары ретінде, әдетте, физикалық шаманың мәндері жиынының информациялық энтропиясын және фракталдық өлшемділіктерін қолданады. Динамикалық хаостың дәлірек сипаттамасы болып Колмогоров – Синай энтропиясы табылады, бұл шама фазалық кеңістік элементтерінің әртектілігін ескереді.
Алайда Колмогоров – Синай энтропиясын дәл есептеудің техникалық қиындықтары бар және мына сұрақтар жауапсыз қалуда: өзқауым кезінде энтропияның ең аз өзгерісі қандай, ол қаншалықты азаяды? Сонымен қатар хаосты сипаттайтын энтропиялық өзұқсастық және өзаффиндік белгі-шарттардың осы процестерге сәйкес фракталдық өлшемділіктермен байланысы белгісіз. Бұл жұмыста информацияның байқалу ықтималдығының тығыздық функциясының ($I_1$) және информациялық энтропияның ($I_2$) қозғалмайтын нүктелері анықталған. Бұл шамалардың мағынасы хаосты процестердің өзаффиндік, өзұқсастық белгі-шарттары және сәйкес фракталдық өлшемділіктері ретінде қарастырылған.
Егер бірлікке нормаланған информациялық энтропияның мәндері $I_1 \leq S \leq I_2$, ($I_1 = 0.567$; $I_2 = 0.806$) интервалында жатса, өзқауым процесі байқалатындығы көрсетілген. Бұл қорытындылардың дұрыстығы белгілі модельдік фракталдардың бір буындарының $S$ энтропиясын есептеу арқылы дәлелденген. $S$ шамасын нормалаудың жолдары және алынған нәтижелердің қазіргі ғылым мен техниканың салаларында қолдану мүмкіндіктері көрсетілген.
***Түйін сөздер:***информация, энтропия, фрактал, хаос, өзқауым.

## Введение

Дальнейшее развитие современных технологий нуждается в знании физических закономерностей, например, наноструктур, сверхвысокочастотных (гигагерцовых) хаотических сигналов, ансамбля нейронных сетей. Несмотря на разнообразную сложность перечисленных объектов и процессов, у них может проявляться единое общее свойство – масштабная инвариантность. Это означает отсутствие необходимости в параметрах с размерностью, например, длины. Масштабная инвариантность проявляется в виде самоподобия (коэффициенты подобия одинаковы по всем переменным) и самоаффинности (коэффициенты подобия различны по разным переменным). Общее название процессов различной природы с такими свойствами – самоорганизация материи и ее движения. Теорию самоорганизации называют синергетикой.

Самоорганизацию также называют возникновением порядка из хаоса при выполнении условий нелинейности, неравновесности, незамкнутости. Поэтому для простоты мы будем говорить об инвариантных свойствах хаотических процессов.

В качестве количественных характеристик хаоса обычно используют информационную энтропию и фрактальную размерность множества значений физических величин. Более детальной характеристикой динамического хаоса является энтропия Колмогорова – Синая, учитывающая неоднородность элементов фазового пространства. Известная теорема И. Пригожина утверждает, что при самоорганизации производная энтропии по времени стремится к минимуму. По теореме Ю.Климонтовича [1] при самоорганизации энтропия уменьшается, если сравнение произвести при одинаковых значениях энергии.

Однако непосредственный точный расчет энтропии Колмогорова – Синая технически не реализуется, упомянутые теоремы не отвечают на вопросы: каков минимальный прирост энтропии, насколько она уменьшается при самоорганизации? Также не выяснена связь между энтропийными критериями самоподобия и самоаффинности с фрактальными размерностями, характеризующими соответствующие хаотические процессы. Целью настоящей работы является поиск ответов на эти вопросы.

**Информационные критерии масштабной инвариантности**

Понятие информации широко используется в кибернетике, генетике, социологии. Развитие синергетики, физики открытых систем требует универсального определения информации, пригодного для использования в различных отраслях науки. Само определение открытой системы содержит понятие информации: открытой системой называется система, обменивающаяся с внешней средой веществом, энергией, информацией.

Обычно определение сложного понятия формируется через перечень его основных свойств. Информация $I(x)$ статистической реализации некоторой физической величины $x$ является положительной величиной и определена при наличии неравновесности $I(x) \neq I(x_0)$, если $x \neq x_0$. Если $P(x)$ является вероятностью появления величины $x$, то выражение для количества информации

$$I(x) = -\ln P(x) \tag{1}$$

описывает эти свойства. Повторяемость и неравновесность процесса учитывается условием $0 < P(x) < 1$. С точки зрения различных наук предложено много определений информации. Формула (1) совместима со всеми этими определениями.

При наличии некоторого условия $y$ информацию определяют через разность безусловной и условной энтропий:

$$I(x|y) = S(x) - S(x|y). \tag{2}$$

Эта формула используется для технических задач, например, для оценки пропускной способности каналов связи. Однако, сама информационная энтропия $S(x)$ является средним значением информации:

$$S(x) = \sum_i P_i(x) I_i(x) = -\sum_i P_i(x) \ln P_i(x), \tag{3}$$

где $i$– номер ячеек разбиения множества значений$x$. Поэтому формулу (1)мы примем за основное определение информации.

Таким образом, хотя нет универсального определения информации, она используется для описания явлений различной природы. Поэтому возможен другой новый подход к теории информационных явлений. Можно принять за определенную независимую переменную саму информацию. Выражая статистические характеристики процесса через информацию, можно искать новые свойства информации, например, масштабно – инвариантные свойства.

После этого можно говорить о вероятности реализации информации $P(I)$ согласно формуле (1):

$$P(I) = e^{-I}. \tag{4}$$

Для плотности вероятности $f(I)$ имеем формулы

$$0 \le P(I) \le 1,\ 0 \le I \le \infty,\ \int_0^\infty f(I)\,dI = 1,\ P(I) = \int_I^\infty f(I)\,dI, f(I) = P(I) = e^{-I}. \tag{5}$$

Функция вероятности реализации информации $P\ I$ совпадает с функцией распределения плотности вероятности $f\ I$. Именно информация, определенная по формуле (1), обладает масштабной инвариантностью: часть и целое имеют одинаковый закон распределения. Информационную энтропию распределения значений информации $S\ I$ определяем как среднее значение информации:

$$S\ I\ =\ {}_{I}^{\infty} If\ I\ dI = (1+I)e^{-I}. \tag{6}$$

Для $0 \leq I \leq \infty$ имеем $1 \geq S \geq 0$, т.е. энтропия нормирована на единицу. Известно, что энтропия непрерывного множества при скачкообразном изменении переменных бесконечна и поэтому интеграл вычисляется в смысле Лебега путем введения некоторой меры. В качестве меры мы приняли саму информацию и получили результат (6).

Воспользуемся известным функциональным уравнением, которому удовлетворяет некоторая характерная функция $g\ x$ с масштабно – инвариантным свойством:

$$g\ x\ = \alpha g\ g\ x\ \alpha\ \ , \tag{7}$$

где $\alpha$ – масштабный множитель. Любая непрерывная функция в своей неподвижной точке удовлетворяет уравнению (7). Принимая в качестве характерных функций $f\ I$ и $S\ I$, определим их неподвижные точки:

$$f\ I\ = I,\ e^{-I} = I,\ I = I_1 = 0.567\,, \tag{8}$$

$$S\ I\ = I,\ \ 1 + I\ e^{-I} = I,\ I = I_2 = 0.806\,. \tag{9}$$

Эти неподвижные точки являются единственно устойчивыми, так как они являются также и пределами бесконечных отображений, достигаемых при любых начальных значениях $I_0$:

$$I_{i+1} = f\ I_i\ ,\ \lim_{i\to\infty} exp\ -exp\ \ldots - exp\ I_0\ \ldots\ \ = \mathrm{I}_1, \tag{10}$$

$$I_{i+1} = S\ I_i\ ,\ \lim_{i\to\infty} exp\ -exp\ \ldots - exp\ \ln\ I_0 + 1\ \ -I_0\ \ldots\ \ = \mathrm{I}_2, \tag{11}$$

где число скобокравно $i + 1$.

Возможны различные толкования физического смысла чисел $I_1 = 0.567$, $I_2 = 0.806$. Плотность вероятности является локальной (мгновенной) характеристикой, поэтому она может быть различной по разным переменным и число $I_1$ можно принять за критерий самоаффинности. Энтропия – усредненная характеристика, поэтому число $I_2$ является критерием самоподобия.

С другой стороны, числа $I_1$, $I_2$ могут быть рассмотрены как аналоги числа Фиббоначчи $I_{20} = 0.618$ (“золотого сечения” динамической меры), соответственно, для статистических самоаффинных и самоподобных систем. Действительно, из формулы (9) при $I \lesssim 1$ имеем

$$1 + I\ \ 1 - I\ \ = I,\ I^2 + I - 1 = 0,\ I = I_{20} = 0.618\,, \tag{12}$$

также при $I \ll 1$ из (9) имеем $e^{-I} = I,\ I = I_1$. Мы видим, что закономерности подобия самоаффинности, динамического равновесия, самоподобия систем описываются одной формулой (9).

Связь чисел $I_1, I_2$ с фрактальными и мультифрактальными размерностями специальных множеств и энтропией Колмогорова – Синая рассмотрим отдельно.

**Энтропия Колмогорова – Синая фрактальных множеств**

Пусть $x(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))$ – траектория динамической системы на странном (фрактальном) аттракторе и $m$ – мерное фазовое пространство разделено на ячейки размера $l^m$. Если $P_{i_0,\dots,i_n}$ – совместная вероятность того, что $x(t=0)$ находится в ячейке $i_1$, $x(t=\tau)$ – в ячейке $i_2, \dots$, $x(t+(n-1)T)$ – в ячейке $i_n$, $\tau$ – интервал времени измерения состояния системы, то энтропия Шеннона определяется как

$$S_n = -\sum_{i_1,\dots,i_n} P_{i_1,\dots,i_n} \ln P_{i_1,\dots,i_n}. \quad (13)$$

Энтропия Колмогорова – Синая S (KS – энтропия) определяется как средняя скорость потери информации [2]:

$$S = \lim_{\tau\to 0}\lim_{l\to 0}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N\tau}\sum_{n=1}^{N}(S_{n+1} - S_n) =$$

$$= -\lim_{\tau\to 0}\lim_{l\to 0}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N\tau}\sum_{i_1,\dots,i_N} P_{i_1,\dots,i_N}\ln P_{i_1,\dots,i_N}. \quad (14)$$

В случае дискретности шага по времени принимается $\tau = 1$ и предел $\tau \to 0$ опускается. По смыслу $\tau$ представляет собой характерное время и нелинейно зависит от $l$.

Естественно поставить вопрос: существует ли постоянное определенное значение KS–энтропии? Прежде всего необходимо выяснить условия постоянства произведения $N\tau$ для масштабно – инвариантных пространственных и временных явлений.

По определению фрактальной размерности $D$ некоторой фрактальной меры $N(l)$, зависящей только от одного масштаба измерения самоподобного множества имеем

$$N(l) = l^{-D},\ D = \lim_{l\to 0}\frac{\ln N(l)}{\ln(1/l)}. \quad (15)$$

Мы можем выбрать в качестве $N(l)$ число переменных иерархической системы на этапе эволюции с минимальным характерным масштабом $l$. Самоаффинные множества переменных различной природы(например, координаты и времени) описываются показателем Херста $H$ ($H$ называется также показателем аффинности):

$$\frac{R}{\sqrt{\overline{x^2(t)}}} = \tau^H,\ R(\tau) = \max_{1\le t\le\tau} x(t,\tau) - \min_{1\le t\le\tau} x(t,\tau). \quad (16)$$

Для чисто стохастического броуновского движения $H = 1/2$. Для хаотических явлений $1/2 < H < 1$. Известны формулы

$$D = 1/H,\ D = 2 - H, \quad (17)$$

соответственно для самоподобных и самоаффинных случаев, которые следуют из требования масштабной инвариантности обобщенного (“дробного”) броуновского движения [3].

Принимая безразмерную переменную $l$ в виде $l = \ x^2 \ t \ \ ^{1\ 2} \ R$ из формул (15), (16), (17) получим

$$N\tau = l^{-D} l^{-1 \ \ H} = l^{-2D} = N^2, \tau = N. \tag{18}$$

Как ожидалось, самоподобие достигается при равенстве выбранных безразмерных масштабов времени и количества переменных. В этом случае можно принять $\tau = 1$.

Для самоаффинного случая имеем

$$N\tau = l^{-D} l^{-1 \ \ 2-D} \ = l^{-D_*}, \ D_* = D + 1 \ \ (2 - D), \tag{19}$$

где $D_*$ может иметь смысл некоторого эффективного значения фрактальных размерностейсамоаффинного множества. Отсюда следует возможность связи KS – энтропии с фрактальными и мультифрактальными характеристиками.

Из формулы Реньи для мультифрактальной размерности меры $N \ \ q, l$ имеем

$$D_q = \lim_{l \to 0} \frac{1}{q-1} \frac{\ln N \ \ q,l}{\ln l}, \ N \ \ q,l \ \ = \ \ {}_{i=1}^{N} P_i^q \ \ l \ , \tag{20}$$

где $q$ – порядок мультифрактального момента. Если дополнительно учесть переходы к пределам для случая $i = \ \ i_1, \ldots, i_N \ , N \to \infty, \tau \to 0$, то из формулы (20) при $q \to 1$ получим

$$D_{q \to 1} = D_1 = \lim_{l \to 0} \frac{S \ \ l}{\ln^1 \ _l} = S_1, \tag{21}$$

где $S \ \ l$ – выражение (14), записанное без указания предела $l \to 0$. В многомерном случае $S \ \ l$ вычисляется через суммирование по индексам $i_1, \ldots, i_N$.

Далее, чтобы сопоставить $S_1$ и $S_{KS}$ мы выясним возможности равенства величин $N\tau$и $\ln 1 \ \ l$. Для этой цели учтем, что самоаффинность характеризуется множеством значений фрактальной размерности $D_i, i = 1,2, \ldots$. Тогда нормированное по $D_{*_i}$ значение $N\tau \ \ _*$ определяется как $l^{-D_*} \ \ \ \ _i l^{-D_{*i}}$. В случае непрерывного спектра $D_*$ имеем

$$N\tau \ \ _* = l^{-D_*} \ \ \ \ e^{-D_*} dD_* = \ln 1 \ \ l. \tag{22}$$

Эти рассуждения показывают возможность $S_{KS} = S_1$.

С другой стороны, из известной теории мультифрактальной спектральной функции $f \ \ \alpha \ \ q$ следует

$$f(\alpha(q)) = q\alpha(q) + \tau(q),\ \tau(q) = (1-q)D_q,\ \alpha(q) = -\frac{d\tau(q)}{dq},$$

$$\alpha(q=1) = \alpha_1,\ f(\alpha(q=1)) = f_1,\ D_1 = \alpha_1 = f_1 = S_1\,, \tag{23}$$

где $\alpha$ – показатель сингулярности ячейки множества (показатель Липшица – Гёльдера), $f(\alpha)$ - фрактальная размерность множества ячеек с одинаковыми значениями $\alpha$. По самому определению фрактальные характеристики $D_1, \alpha_1, f_1$ не зависят от $l$, следовательно, $S_1$тоже не зависит от $l$.

Таким образом, $KS$ – энтропия, вычисленная по нормированному значению $N\tau_*$ равна самоподобному значению (неподвижной точке) информационной энтропии, т.е. числу $I_2$. Критерий $I_1$ является неподвижной точкой функции плотности вероятности информации (“локальной энтропии”), поэтому является самоаффинным значением $KS$ – энтропии.

**Приложения критериев самоподобия и самоаффинности**

Интервал значений нормированной энтропии Шеннона $I_1 \leq S_n / S_{n_{max}} \leq I_2$ определяет самоорганизованный процесс включая его режимы самоаффинности и самоподобия. Этот факт облегчает физический анализ хаотических сигналов в наноэлектронике, астрофизике, биофизике и т.д. Для одномерного сигнала $S_{n_{max}}$ равно энтропии равнобедренного треугольного импульса. В многомерном случае можно использовать нормированную мультифрактальную спектральную функцию $f(\alpha_1) = \alpha_1$ вместо $S_n$, т.к. $f_{max}(\alpha) = D_0$ и Хаусдорфова размерность $D_0$ вычисляется стандартными алгоритмами.

Числа $I_1,\ I_2$ определяют фрактальные меры самоаффинных и самоподобных явлений. Под мерой понимаем количественную характеристику любого аддитивного и измеримого множества. Фрактальная мера определяется как

$$M = M_0 l^{-(D-d)} = M_0 l^{-\gamma}, \tag{24}$$

где $d$ – топологическая размерность носителя меры, $M_0$ – нефрактальная (регулярная) мера. Определим значения $\gamma = D - d$ через $I_1,\ I_2$. Примем обозначения $d_{max}$ – наибольшее целочисленное значение $D$, $D_{max} = d_{max} + 1$, $I_* = (I_1, I_2)$. Возможны случаи

$$D = d_{max} + I_*, \gamma = D - d = d_{max} - d + I_*, d = 0,1,2,3; \tag{25}$$

$$D = D_{max} - I_* = d_{max} + 1 - I_*,\ \gamma = d_{max} - d + 1 - I_*, d = 0,1,2,3. \tag{26}$$

Формула (25) применима при “наружной” фрактализации, т.е. при расположении фрактальной меры вне регулярной меры. Этот случай можно рассматривать также как одномерный безусловный случай, соответствующий безусловным вероятностным процессам. При этом вместо $D$ можно пользоваться информационной размерностью $D_1 = S_1 = I_2$. Согласно формуле (23) $D_1$ удовлетворяет условию самоподобия. Формула (26) соответствует “внутренней” фрактализации. Появление слагаемого $1 - I$ можно обосновать, рассматривая размерность горизонтального сечения хаотического объекта [3].

Формулу (26) можно обосновать также из следующих рассуждений. Дробная часть фрактальной размерности равна минимальной информации, определенной в единицах $1/l$:

$$D - d_{max} = \frac{\log_{1/l} N(l)}{\log_{1/l}(1/l)} = -\log_{1/l} P(l) = I. \tag{27}$$

С другой стороны, в формуле (2) безусловная энтропия $S(x)$ всегда больше, чем условная энтропия $S(x|y)$ и нормируя все величины на $S(x)$, имеем

$$I = 1 - S,\ D - d_{max} = 1 - I_*\,, \tag{28}$$

где приняты масштабно-инвариантные значения $S = I_*$.

Общее число возможных значений $\gamma$ для формулы (25) определяется как

$$N_\gamma = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j\le i}^{4} \sum_{k=1}^{2} (d_{max,i} - d_j) = 2\sum_{i\ge j=1}^{4} (d_{max,i} - d_j) = 2\sum_{n=1}^{4} n = 2\cdot\frac{4(4+1)}{2} = 20. \tag{29}$$

Такое же значение $N_\gamma$ дает формула (26). Если использовать также значение числа Фибоначи, т.е. принять $I_* = I_1,\ I_2, I_{20}$, то $N_\gamma = 30$. $I_{20}$ имеет смысл переходного значения $I_*$от $I_1$ к $I_2$.

Таким образом, мы имеем возможность использовать 20 точных значений фрактальной размерности $D$ для каждого типа (внешней к внутренней фрактализации) задач. Если учесть, что определение фрактальной размерности $D$ представляет отдельную задачу и известные методы ее определения из опыта обеспечивают точность, не превышающей порядка одного процента, то использование чисел $I_1,\ I_2$ значительно облегчает эту проблему.

Приведем примеры использования формул (25), (26). Пусть необходимо моделировать, или описать эксперименты по оптике квантовых нитей на поверхности. Тогда $d_{max} = 2,\ d = 1$, по формуле (25) имеем $\gamma = 1 + 0{,}567$ для самоаффинного процесса, $\gamma = 1 + 0{,}806$ для самоподобного процесса. Если необходимо описать электрические явления в среде, то следует пользоваться формулой (26).

Выводы настоящей работы можно проверить, вычисляя энтропию Колмогорова – Синая для различных фракталов. Геометрические фракталы являются удобными моделями иерархической динамической системы, так как каждое поколение фрактала можно сопоставить эволюционному уровню.

Мы выделим два варианта сравнения теории с численным экспериментом. Первый подход может быть основан на вычислении – энтропии только для одного звена фрактала по формуле (6).

$$S = (1 + I)e^{-I} = (1 + D\ln(1/l))e^{-D\ln(1/l)}. \tag{30}$$

где, в отличие от формулы (27), информация определена через натуральный логарифм. Второй подход предполагает вычисление -энтропии по формуле (14) для множества $n$ поколений фрактала.

На рисунке представлена зависимость $S(D)$ согласно формуле (30). Названия фракталов общепринятые [4]. Согласно формуле (17) при $D > 1{,}5$имеем $H < 1/2$ (случаи отсутствия вероятностного поведения процесса) и необходимо пользоватся согласно (28) информацией вместо энтропии. Эти замены указаны стрелками. Расхождения $S > I_2$ связаны с тем, что этот график получен для дискретной модели одного звена, а критерии $I_1,\ I_2$ получены по теории непрерывных изменении энтропии.

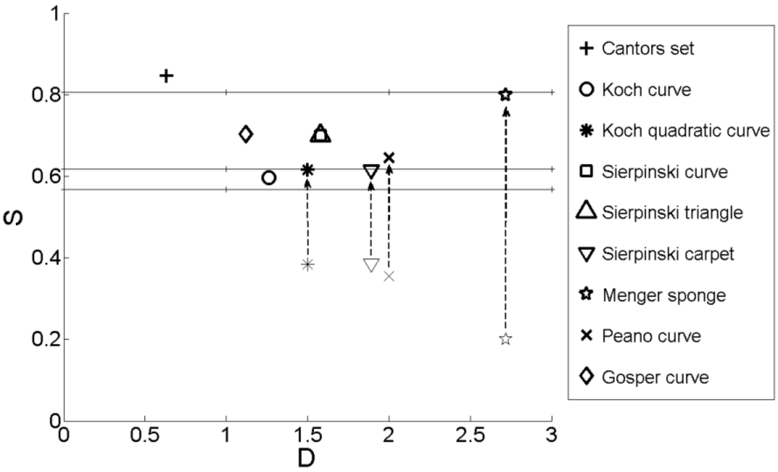


**Рисунок** – Нормированные энтропии одного звена модельных фракталов

Более близкие результаты к теории можно ожидать при использовании второго подхода, так как в этом случае мы рассматриваем множество фрактальных звеньев, у которых более четко проявляются статистические закономерности.

**Заключение**

Мы показали, что хаотические процессы и объекты могут быть количественно классифицированы на самоаффинные и самоподобные. Соответствующие критерии $I_1$, $I_2$ являются значениями энтропии Колмогорова – Синая, определяют характерные фрактальные меры. Существование этих критериев масштабной – инвариантности также доказывается соответствующей обработкой результатов экспериментальных исследований хаотических процессов различной природы (турбулентность, радиоизлучение Солнца, оптическое излучения переменных звезд и др.).

## References

1 KlimontovichYu.L. Information Conserning the States of Open Systems // PhysicaScripta. – 1998. – Vol. 58. – P.549.

2 Slomczynski W., Kwapier J., Zyczkowski K. Entropy Computing Via Integration over Fractal Measures // Chaos. – 2000. –Vol. 10, №1. -P. 180-188.

3 Piotzonero L., Tosatti E. Fractals in Physics // Elsiever Science 1986.

4 Feder J. Fractals. – New York:Plenum press, 1988.