

УДК 519.72; 517.987

З.Ж. Жанабаев², С.Н. Ахтанов^{1*}¹Научно-исследовательский институт экспериментальной и теоретической физики,²КазНУ им. аль-Фараби, Казахстан, г. Алматы

*E-mail: sayataktanov@mail.ru

Новый метод исследования бифуркационных режимов по реализации динамической системы

В настоящее время построение бифуркационной диаграммы нелинейной динамической системы проводится по известному параметру, который меняет состояние самой динамической системы. Поэтому нет возможности построить бифуркационную диаграмму динамической системы, не зная параметр порядка динамической системы. Многие природные явления можно описать как динамическую систему. Например, временные реализации астрономических процессов, изменения погоды, магнитуды землетрясения и т.д. явно не содержат параметра порядка. Встает естественный вопрос: можно ли построить бифуркационную диаграмму, не зная параметра порядка динамической системы?

Чтобы решить этот вопрос предлагается новое выражение для параметра порядка эволюционного процесса. Этот параметр позволяет построить бифуркационную диаграмму по реализации, не зная уравнения динамической системы. Приведены примеры построения бифуркационных диаграмм, показана универсальность предлагаемого метода.

Ключевые слова: Бифуркация, отображения, хаотические колебания, эволюционный параметр порядка.

Z.Zh. Zhanabaev, S.N. Akhtanov

New method of investigating of bifurcation regimes by use of realizations from a dynamical system

At the present time constructing of bifurcation diagrams for a nonlinear dynamical system can be realized by use of a certain parameter which changes the state of the system. Therefore it is impossible to construct a bifurcation diagram of a dynamical system without of using an order parameter of the dynamical system. A lot of natural phenomena can be described without of using an order parameter of the dynamical system. For example, time realizations of astronomical processes, changes of weather, earthquake magnitude, etc., doesn't contain an order parameter. Naturally, we arise the question: is it possible to construct a bifurcation diagram without the order parameter of a dynamical system?

To solve this problem we propose the new expression for the order parameter of an evolutionary process. This option allows constructing a bifurcation diagram for a realization without knowing the equation describing a dynamical system. The presented examples of bifurcation diagrams are shown universality of the method.

Keywords: Bifurcation, maps, chaotic oscillations, the evolutionary order parameter.

З.Ж. Жанабаев., С.Н. Ахтанов

Динамикалық жүйенің реализациясы арқылы бифуркациялық режимдерді зерттеудің жаңа әдісі

Қазіргі уақытта бейсызық динамикалық жүйенің бифуркациялық диаграммасын тұрғызу, динамикалық жүйенің өзінің күйін өзгертетін белгілі бір параметр бойынша жүргізіледі. Сондықтан

динамикалық жүйенің тәртіп параметрін білмей динамикалық жүйенің бифуркациялық диаграммасын тұрғызуға мүмкіндік жоқ. Көптеген табиғи құбылыстарды динамикалық жүйе ретінде қарастыруға болады. Мысалы, тәртіп параметрі белгісіз: астрономиялық құбылыстардың уақыт қатарлары, ауа райы өзгерісі, жерсілкініс магнитудалары және т. б. Мынадай орынды сұрақ туады: бифуркациялық диаграмманы динамикалық жүйенің тәртіп параметрін білмей тұрғызуға болады ма?

Осы сұрақты шешу үшін эволюциялық құбылыстың тәртіп параметрі үшін жаңа өрнек ұсынылды. Осы параметр динамикалық жүйенің тендеуін білмей реализация бойынша бифуркациялық диаграмманы тұрғызуға мүмкіндік береді. Бифуркациялық диаграмманы тұрғызу мысалдары келтірілді, ұсынылатын әдістің универсалдығы көрсетілді.

Түйін сөздер: бифуркация, бейнелеу, хаустық тербелістер, эволюциялық тәртіп параметрі.

Введение

В современных исследованиях [1-8] рассматриваются бифуркации в разных динамических системах, которые определяют качественные изменения состояния системы. Бифуркационные диаграммы строятся как зависимость максимальных и минимальных значений физической величины от управляющего параметра, заданного в уравнениях динамической системы.

Однако не всегда известны уравнения динамической системы и возникает естественный вопрос, можно ли определить режимы бифуркации по реализациям (по временному ряду, по фотографическим изображениям и т.д.). Поэтому в настоящей работе ставится цель определить соответствующий параметр порядка, изменение которого привело бы к бифуркациям.

В качестве генератора реализации выбраны ранее исследованные модели динамических систем, как логистическое отображение, отображение Хенона, модифицированная система Лоренца, для которой реализуется «склеивающаяся» («gluing») бифуркация [7, 8] и отображение «накопление – выброса» [9], в которых заранее известны параметра порядка.

Эволюционный параметр порядка сильно неоднородных хаотических сигналов

Существование метрических характеристик (длины, площади, объема) следует из выполнения известного интегрального неравенства Гельдера для любых функций $x_i(t)$, $x_j(t)$, записанного в виде

$$\left(\frac{1}{T} \int_0^T |x_i(t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\frac{1}{T} \int_0^T |x_j(t)|^q dt \right)^{1/q} \leq K_{x_i, x_j}^{p, q} \frac{1}{T} \int_0^T |x_i(t) \cdot x_j(t)| dt, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad (1)$$

где $K_{x_i, x_j}^{p, q}$ – коэффициент, при постоянном значении которого выполняется равенство в (1)

$$K_{x_i, x_j}^{p, q} = \frac{\left(\langle |x_i|^p \rangle \right)^{1/p} \left(\langle |x_j|^q \rangle \right)^{1/q}}{\langle |x_i x_j| \rangle}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \quad (2)$$

Мы получим минимальное значение меры сложности (неоднородности) выражения в правой части для двух произвольных функций. Выражение (2) назовем обобщенно-метрической характеристикой согласно работе [10], где впервые была введена эта характеристика хаоса. Фор-

мула (2) отличается от обратного коэффициента нецентрированной автокорреляции: усредняется модуль произведения функций, учитывается возможность $p \neq q \neq 2$.

В физических приложениях можно пользоваться усреднением по времени $\langle x(t) \rangle$. В случае

$p = q = 2$ искомая характеристика определяется евклидовой метрикой. Если $x_i(t) \equiv x(t)$, $x_j(t) = 1$, $p = q = 2$, то мы получим $K_x^{2,2} = (\langle x^2 \rangle)^{1/2} / \langle |x| \rangle$ – коэффициент формы сигнала, который используется в радиофизике.

Рассмотрим вопрос о возможности использования формулы (2) для хаотических сигналов типа «накопление – выброс», которые являются сильно неоднородными и ассиметрично перемежаемыми.

Перемежаемые функции являются сильно неоднородными относительно друг друга

(x_i, x_j) и относительно аргумента (x, t) . В терминах теории подобия, масштабной инвариантности перемежаемые сигналы не являются подобными, а аффинными: не обладают свойством самоподобия, а могут быть самоаффинными. Чтобы учесть такую неравновесность в силу произвольности функций $x_i(t)$, $x_j(t)$ в формуле (2) мы можем выбрать одну из них в качестве параметра порядка – определяющей переменной. Если нас интересует эволюция по времени $x_i(t)$, то можно выбрать $x_j(t) = const * t$. Тогда выражение (2) имеет вид

$$K_{x,t}^{p,q} = (\langle |x(t)|^p \rangle)^{1/p} \cdot (\langle t^q \rangle)^{1/q} / \langle |x(t) \cdot t| \rangle. \tag{3}$$

Выражение (3) назовем эволюционным параметром порядка. Этот параметр имеет смысл безразмерного времени и является пропорциональным номеру шага дискретных отображений динамических систем. Если принять $q = 2 + D_N$, $p = q(q - 1)$ в (2), то можно увеличить разрешающую способность обобщенно – метрической характеристики, так как важной количественной характеристикой

аттрактора, несущей информацию о степени сложности поведения динамической системы, является корреляционная размерность D_c . Алгоритм расчета D_c основан на вычислении корреляционного интеграла, в качестве которого выступает функция $C(\delta)$, для каждого δ равная нормированному числу пар точек рассматриваемого объекта, расстояние между которыми не превосходит δ :

$$C(r) = \frac{1}{N^2} \sum \theta(\delta - |x_i - x_j|), \tag{4}$$

где $\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$ – функция Хевисайда для всех пар значений i и j , если $i \neq j$, $|x_i - x_j|$ – абсолютная

величина расстояния между точками множества, $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$, n – количество точек. Величина суммы зависит от δ , причем, если эта зависимость имеет степенной вид

$$C(\delta) \approx \delta^{D_N}, \tag{5}$$

то исследуемое множество фрактально. Для практического вычисления размерности на графике $\ln(C(\delta)) = f(\ln(\delta))$ выделяют область линейной зависимости (области скейлинга) и функция аппроксимируется прямой линией методом наименьших квадратов. Тогда тангенс угла наклона графика является размерностью D_c .

Результаты численного анализа

Вначале мы применяем предлагаемый нами новый метод к анализу ранее исследованных моделей динамических систем: логистическое отображение, отображение Хенна, отображение накопления – выброса и система дифференциальных уравнений гомоклинической бифуркации.

Отображения Фейгенбаума и Хенона, соответственно, записываются в виде

$$x_{i+1} = rx_i(1 - x_i), \quad (6)$$

$$x_{i+1} = 1 - ax_i^2 - by_i, \quad y_{i+1} = x_i. \quad (7)$$

Бифуркационная диаграмма, построенная по формуле (6) приведена на рис. 1. При изменении параметра r отображение Фейгенбаума соответствующая система меняет свои режимы эволюции с каскадом удвоений периодов, приводящих к хаосу.

Используя реализации (6) для различных значений r мы построили бифуркационную диаграмму через эволюционный параметр порядка

определенный по формуле (3). В результате мы получили бифуркационную диаграмму, показанную на рис. 2.

Из рис. 2. отчетливо видны циклы удвоения периода и переход к хаосу. При этом все периодические реализации собираются в левой части, а хаотические в правой части бифуркационной диаграммы. Появляется возможность классификации разных бифуркаций

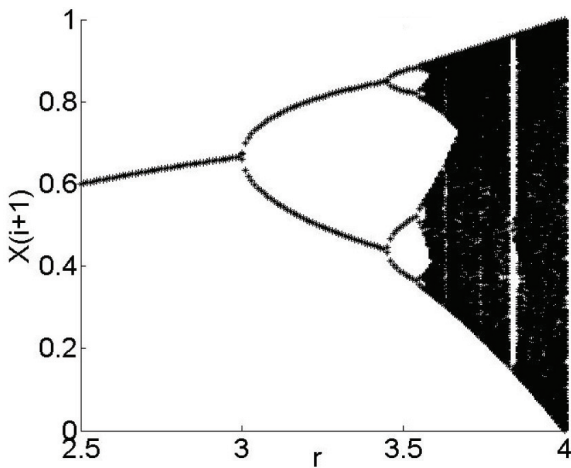


Рисунок 1 – Бифуркационная диаграмма логистического отображения при $r = 2.5:0.01:4$

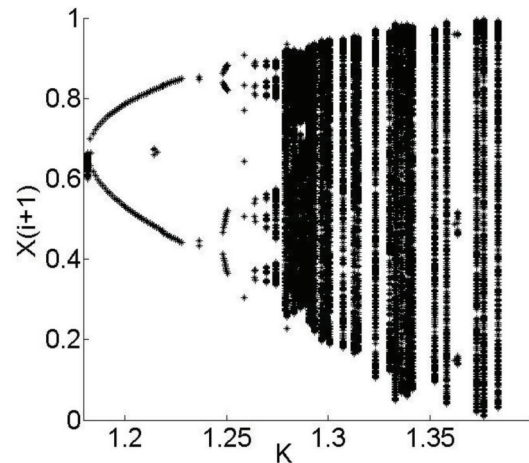


Рисунок 2 – Бифуркационная диаграмма логистического отображения, построенная по эволюционному параметру порядка при $q = 2 + D_C$; $p = q/(q-1)$; $r = 2.5:0.01:4$; $\hat{E} \equiv K_{x,t}^{p,q}$

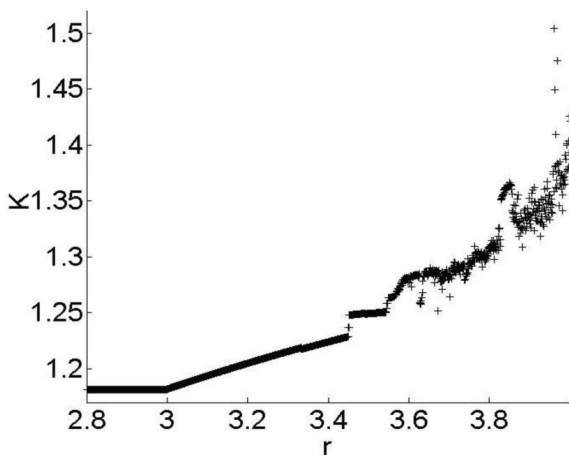


Рисунок 3 – Нелинейная зависимость параметра порядка от параметра r уравнения (6), $r = 2.5:0.001:4$

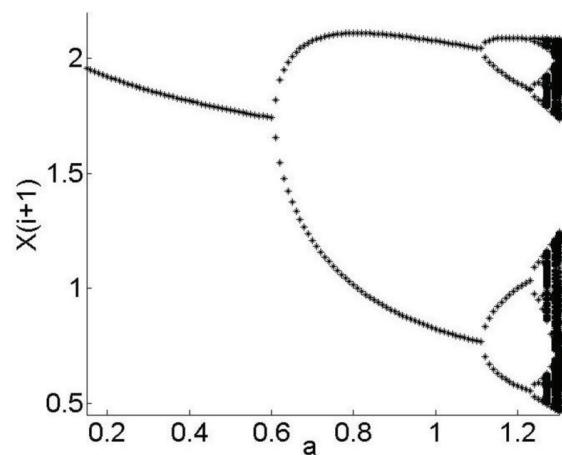


Рисунок 4 – Бифуркационная диаграмма отображения Хенона при $a = 0.15:0.01:1.3$, $b = 0.1$

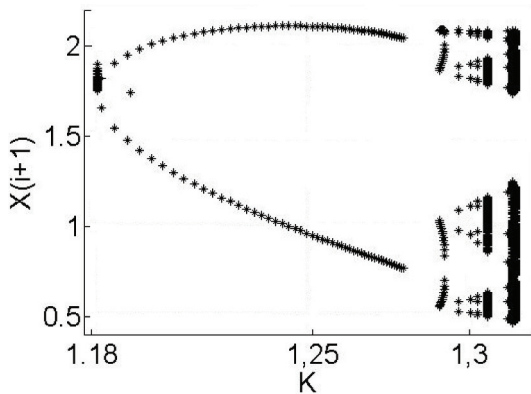


Рисунок 5 – Бифуркационные режимы отображения Хенона построенная по эволюционному параметру порядка при $q = 2 + D_C$; $p = q/(q-1)$; $a = 0.15:0.01:1.3$, $b = 0.1$, $\hat{E} \equiv K_{x,t}^{p,q}$

в динамических системах с неизвестными параметрами.

Эволюционный параметр порядка является одним из показателей сложности сигнала. Это видно из зависимости параметра порядка от параметра γ , показанной на рис. 3.

Отображение Хенона также демонстрирует переход к хаотическому поведению через последовательность бифуркаций удвоения

$$x_{i+1} = \left(\frac{1}{a} + \mu_i\right) |x_i|^{-\frac{1}{\gamma}}, \quad \mu_{i+1} = -\frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{a} + \mu_i\right) |x_i|^{-\frac{1}{\gamma} - 1}, \tag{8}$$

где γ – имеет смысл дробной части фрактальной размерности множества значений x_i , a – точность наблюдения x_i ($0 < 1/a < 1$).

Данное отображение реализует асимметричную перемежаемость с сильными всплесками, т.е. сигналы типа «накопление – выброс». Важно то, что именно такие сигналы удовлетворяют критериям самоорганизации. Такие сигналы ранее нами были получены теоретически, в схмотехническом, физическом экспериментах от радиотехнического генератора с фазовым управлением [11]. Сходство реализаций имеет физическую основу. Фрактальность процесса, использованная при выводе отображения, является основным свойством самоорганизованных систем. В системе уравнений генератора динамического хаоса нами была принята нелинейная

периода, как логистическое отображение. Из уравнения (7) при меняя параметр a получаем бифуркационную диаграмму (рис.4).

При вариации параметра a в системе (7) может наблюдаться явление мультистабильности, т.е. сосуществование двух и более различных динамических режимов, например, хаотического аттрактора и цикла периода n или 2-х различных по структуре хаотических множеств.

Бифуркационная диаграмма на рис.5, построенная по новому методу, содержит все режимы бифуркационной диаграммы, построенной через известный параметр a (рис. 4). Но наглядно видно преимущество предлагаемого нашего метода. При некоторых значениях $K_{x,t}^{p,q}$ отсутствуют значения $X(i+1)$. Это означает, что отсутствуют некоторые бифуркационные циклы из возможного набора $S1$ (предельный цикл), $S2$ (бифуркация удвоения периода), $S3$ (бифуркация утроения периода) и их образований.

Этот метод позволяет исследовать и более сложные бифуркационные явления. Бифуркационные режимы хаотических и ассиметрично перемежаемых процессов отличается от известных вышеперечисленных моделей. Для этой цели построена бифуркационная диаграмма отображения «накопление – выброса» [9]:

зависимость собственной частоты селективного контура от фазы обратной связи. Этот фактор тоже является одним из основных условий самоорганизации.

Бифуркационная диаграмма, полученная по формулам (8) и показанная на рис. 6. описывает реализации с перемежаемой структурой. Отображение накопления – выброса реализует особый тип перемежаемости – односторонние хаотические выбросы большой амплитуды на фоне мелкомасштабных осцилляций. Поэтому на рис. 6. показан только фрагмент бифуркационной диаграммы для $-5 < x < 5$.

В области периодических колебаний эволюционный параметр порядка имеет самый наименьшее значение. Максимальное его значение соответствует колебаниям взрывного характера.

В области периодических колебаний видны типичные удвоения периода, т. е. сценарии перехода Фейгенбаума (рис. 8). При этом также наблюдается восстановление порядка после возникновения хаоса. Присутствуют узкие интервалы

порядка, которые по структуре идентичные с широкими интервалами области порядка. Если увеличить амплитуду мелкомасштабных колебаний, то картина не меняет структуру. Это показывает, что реализация имеет фрактальную структуру.

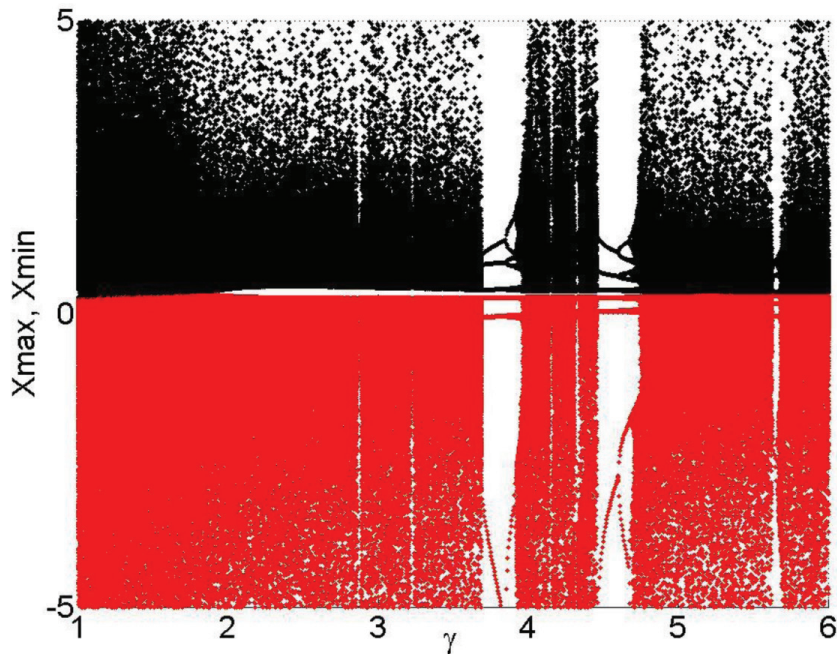


Рисунок 6 – Бифуркационная диаграмма отображения «накопление выброс» при $a = 2,806$

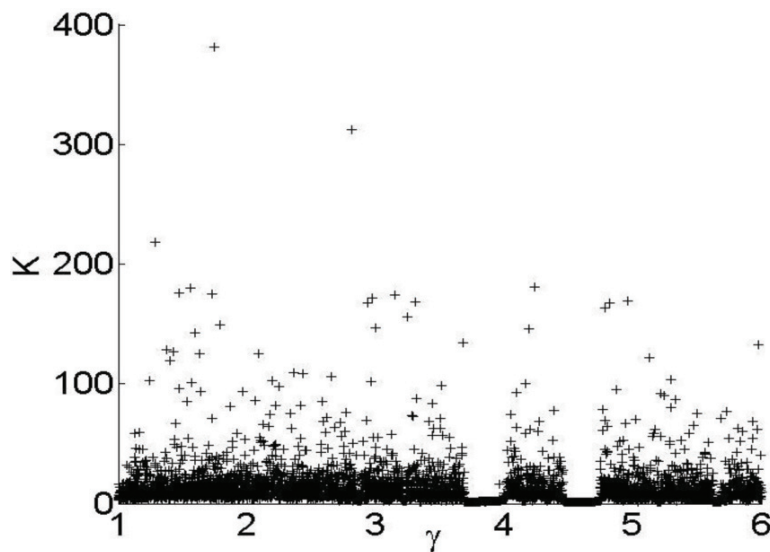


Рисунок 7 – Зависимость эволюционного параметра порядка от γ при $a = 2,806$

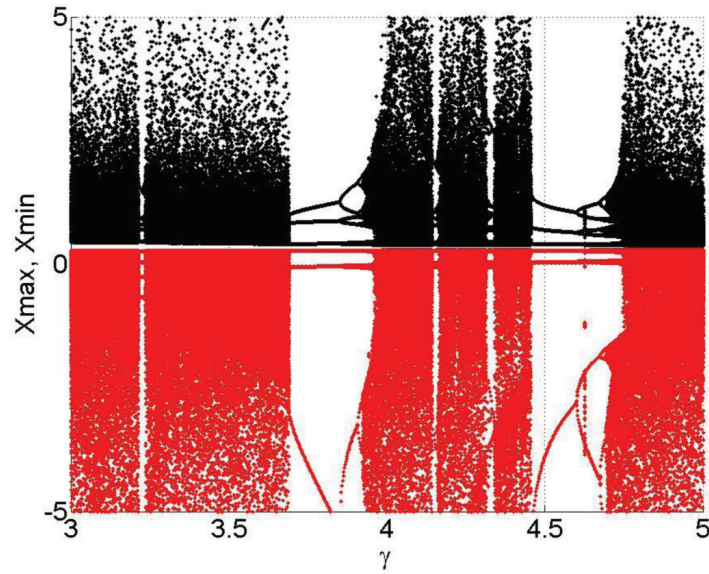


Рисунок 8 – Увеличенный фрагмент рисунка 6

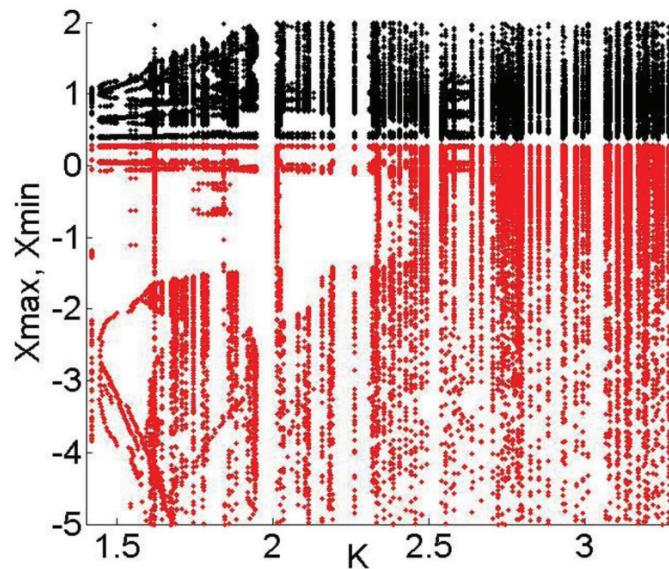


Рисунок 9 – Бифуркационная диаграмма отображения перемежаемости построенная по эволюционному параметру порядка при $q = 2 + D_C$; $p = q/(q-1)$; $a = 2,806$, $\gamma = 3.5:0.01:5$, $E \equiv K_{x,t}^{p,q}$

Бифуркационная диаграмма (рис. 9.) построенная по новой методике (через $K_{x,t}^{p,q}$) имеет различие от рис.6, 8. Все устойчивые режимы локализованы в левой части бифуркационной диаграммы. Хаотическим структурам соответствуют высокие значения $K_{x,t}^{p,q}$. Теперь бифуркационная картина становится более простой: качественно различные режимы сгруппируются. Видны типичные картины удвоения периода по

Фейгенбауму (цикл S2). Некоторые ветви наклонных линий бифуркации удвоения не реализованы, процесс имеет асимметрию.

Меняя параметр a при постоянном значении γ , мы получим аналогичную бифуркационную картину.

Мы применим наш новый метод построения бифуркационной диаграммы через эволюционный параметр порядка $K_{x,t}^{p,q}$ к исследованию особого типа гомоклинической

бифуркации (бифуркации «склеивания» или «gluing bifurcation»). Для этой цели восполь-

зуемся системой дифференциальных уравнений [12].

$$\frac{dx}{dt} = \sigma \cdot (y - x) + A \cdot y \cdot z, \quad \frac{dy}{dt} = R \cdot x - y - x \cdot z, \quad \frac{dz}{dt} = x \cdot y - b \cdot z, \quad (9)$$

где σ , b , R , A – параметры. Выбирая в качестве управляющего параметра A была построена бифуркационная диаграмма (рис. 10.) Видно, что есть точки «склеивания», которые являются также устойчивыми точками вблизи $x=0$. При этом, верхние и нижние бифуркационные диаграммы соответствуют сценарию перехода Фейгенбаума.

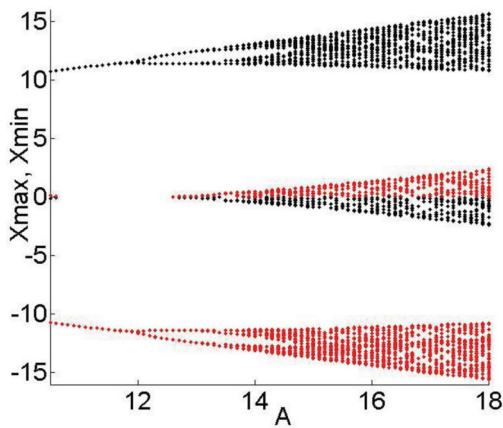


Рисунок 10 – Гомоклиническая бифуркация при $\sigma = 10$, $b = 2.67$, $R = 3$, $A = 10,5; 0,01; 18$

На рис. 11. приведена бифуркационная диаграмма системы (9) по нашему методу. Основное отличие рис. 11 от рис. 10 в том, что значения $K_{x,t}^{p,q}$ отсутствуют в некоторых полосах, так как согласно рис. 7 зависимость $K_{x,t}^{p,q}(\gamma)$ является скачкообразным.

Реализации и фазовые портреты гомоклинической бифуркации показаны на рис. 12. Сначала появляется одна периодическая орбита (рис. 12 a) и b)), затем при росте управляющего параметра

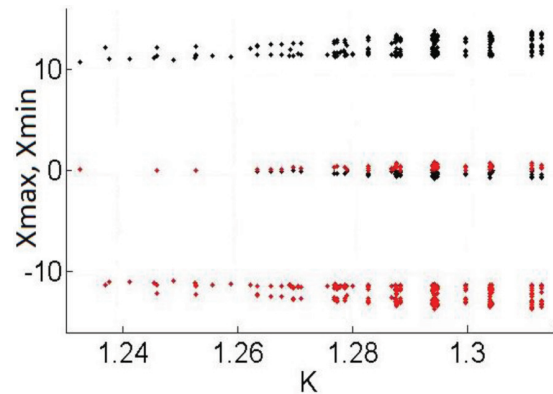


Рисунок 11 – Гомоклиническая бифуркация в координатах (X_{max}, X_{min}, K) при $q = 2 + D_C$; $p = q/(q-1)$; $\sigma = 10, 2,67$, $R = 3$, $A = 10,5; 0,01; 18$, $\hat{E} \equiv K_{x,t}^{p,q}$

наблюдается гомоклиническая периодическая орбита (рис. 12 c) и d)). После удвоения периода гомоклинической периодической орбиты (рис. 12 e) и f)) динамическая система переходит к хаосу (рис. 12 g) и h)).

Гомоклиническая бифуркация «склеивания» наблюдается и в взрывных колебаниях. Это можно наблюдать по реализациям и фазовым портретам отображения (8) показанным на рис. 13. Видны типичные картины циклов S2, S4 и переход к хаосу. Но при удвоении рождается склеивающийся с большим циклом маленький цикл. При переходе к учетверению периода каждый большой и малый цикл удваивается.

Гомоклиническая бифуркация теряет свой симметричный режим если видоизменить уравнение (9), то есть добавить в третье уравнение $d \cdot x$. Тогда уравнение (9) имеет вид:

$$\frac{dx}{dt} = \sigma \cdot (y - x) + A \cdot y \cdot z, \quad \frac{dy}{dt} = R \cdot x - y - x \cdot z, \quad \frac{dz}{dt} = x \cdot y - b \cdot z + d \cdot x, \quad (10)$$

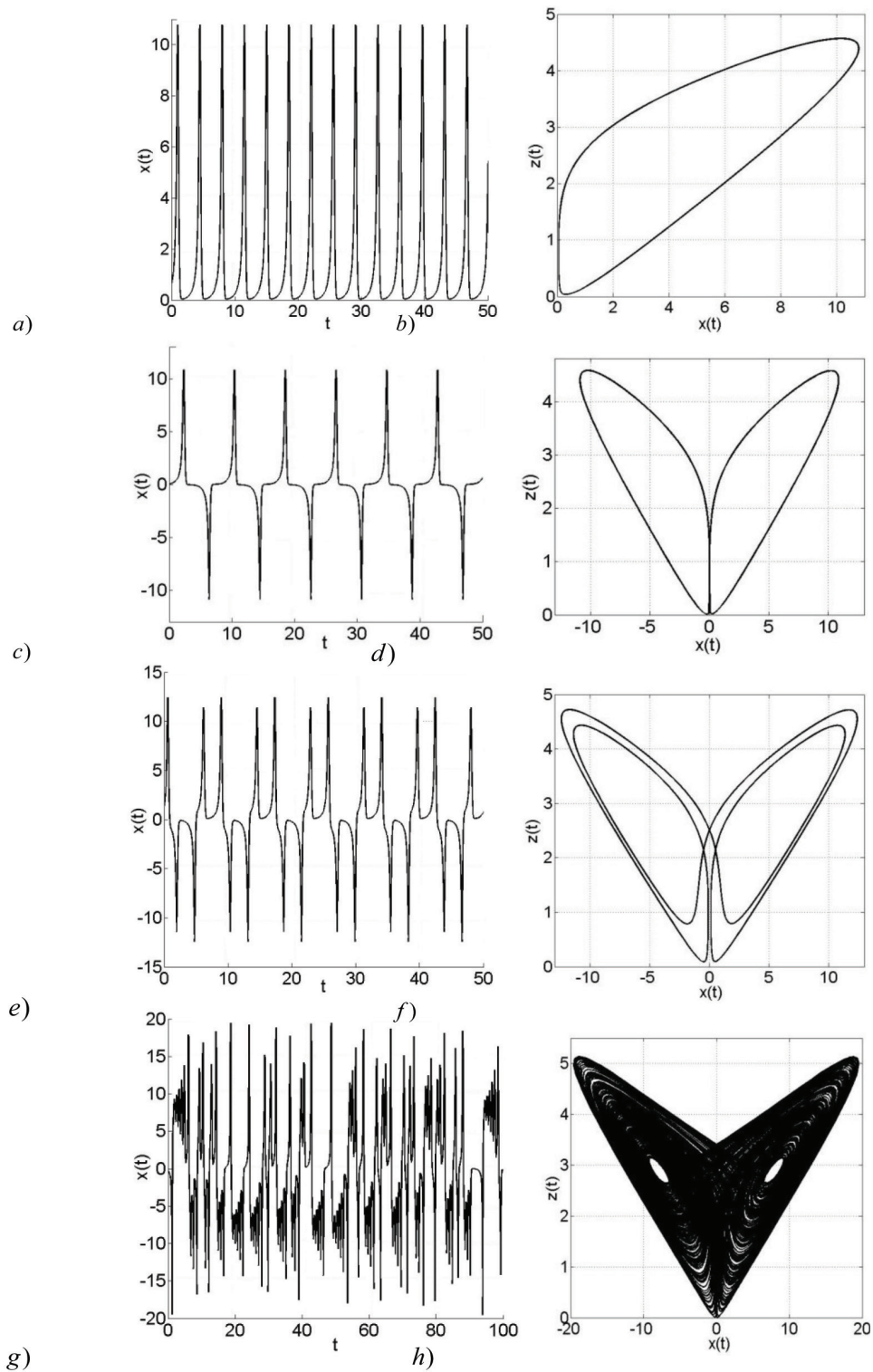


Рисунок 12 – Временные реализации и фазовые портреты гомоклинической бифуркации при $R = 3$; $\sigma = 10$; $b = 2.67$; a) и b) $A=10.6$; c) и d) $A=10.7$; e) и f) $A=13$; g) и h) $A=25$

На рис.14. показаны реализация и фазовый портрет системы (10). В левой части фазовой траектории наблюдается удвоение периода, в то вре-

мя, как в правой части остается только один цикл. Асимметричный режим наблюдается и в отображении (8) (рис. 15). Малый цикл переходит к

удвоению периода, в то время как большой цикл, «склеивающийся» к этому, имеет один цикл.

Если увеличить часть фазового портрета на рис.15 то можно увидеть «склеивание» с боль-

шим циклом двух малых циклов (рис. 16).

Приведенный анализ приводит к важному выводу: «склеивание» наблюдается для колебаний типа «накопление – выброс».

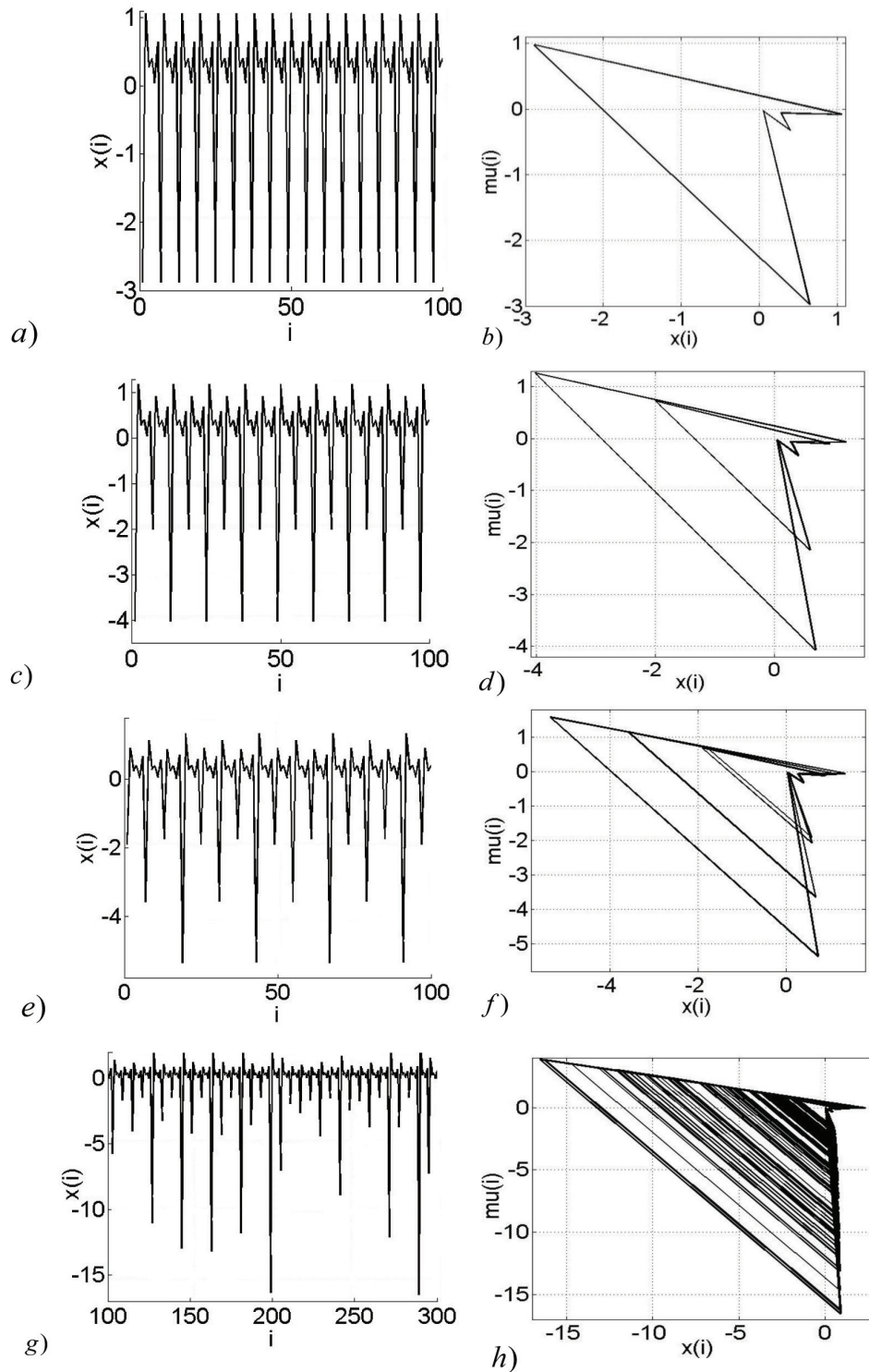


Рисунок 13 – Реализации и фазовые портреты отображения (8). *a*) и *b*) при $c = 2,806$; $\gamma = 4.59$; *c*) и *d*) при $c = 2,806$; $\gamma = 4.65$; *e*) и *f*) при $c = 2,806$; $\gamma = 4.69$; *g*) и *h*) при $c = 2,806$; $\gamma = 4.74$

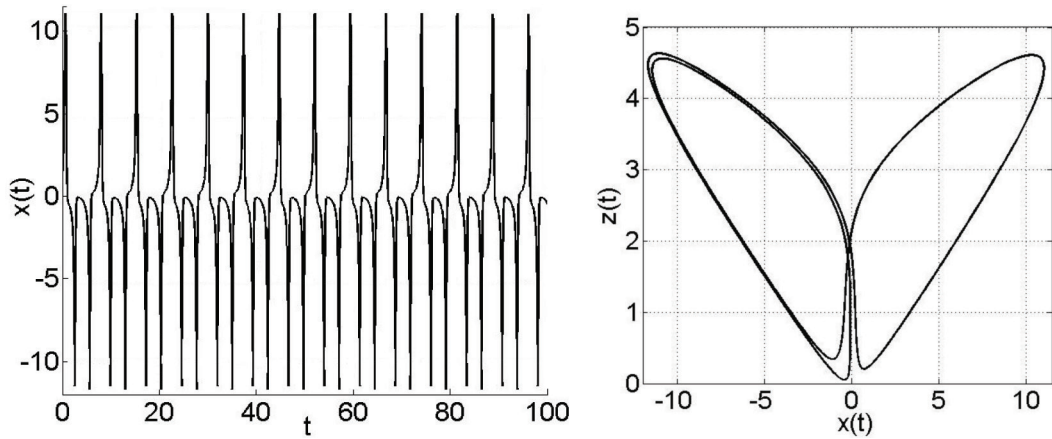


Рисунок 14 – Временная реализация и фазовый портрет уравнения (10) при $R = 3$; $\sigma = 10$; $b = 2.67$; $A = 11.5$ $d = 0.1$;

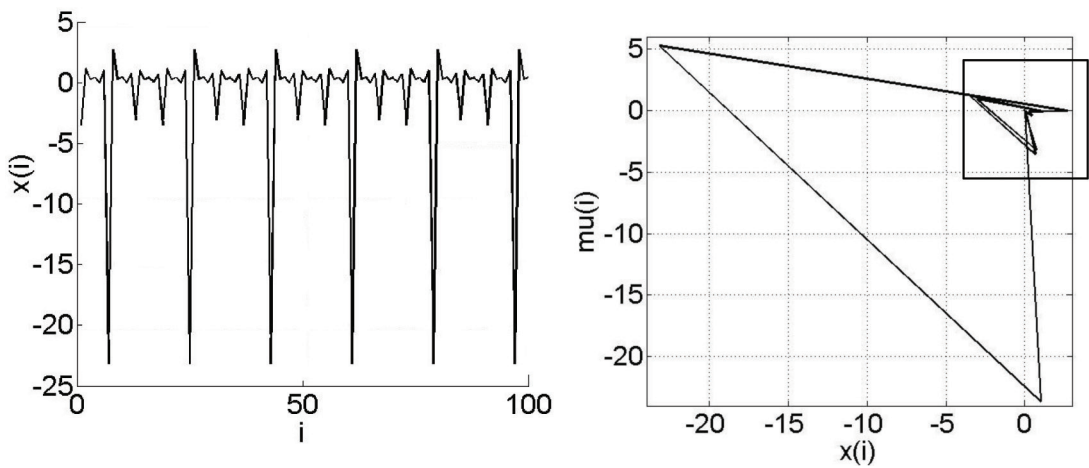


Рисунок 15 – Реализация и фазовый портрет отображения (8) при $c = 2,806$; $\gamma = 4.336$

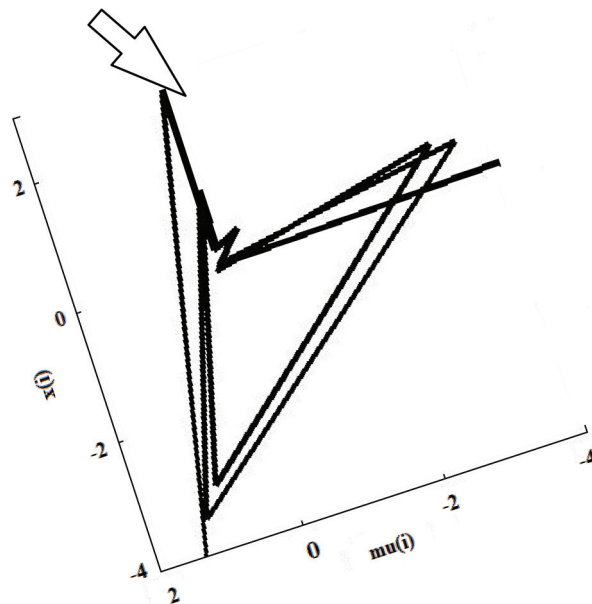


Рисунок 16 – Увеличенный фрагмент (отмеченной области) фазового портрета на рис.14

Заключение

В настоящей работе мы по новому методу построили бифуркационные диаграммы ранее исследованных моделей динамических систем: логистического отображения, отображения Хенона, отображения для колебаний типа «накопление – выброс» и для систем с гомоклиническими бифуркациями.

Эти диаграммы мы сопоставили с ранее известными диаграммами, построенными через параметры уравнений динамической системы.

Основным достоинством нашего метода является то, что можно исследовать бифуркационные явления по реализациям, не зная исходные уравнения. В этой работе мы также показали единство природы гомоклинической бифуркации типа «gluing» с бифуркацией в колебаниях типа «накопление – выброс».

По данной методике можно определить состояние системы с неизвестными параметрами. Данный метод можно применять к анализу различных сложных явлений.

References

- 1 Nirkhaus G. Khaos i samopodobie // Nelineynaya dinamika. – 2011. – Т.7, № 1. – S.153–175.
- 2 Gonchenko A.S., Gonchenko S.V., Shil'nikov L.P. K voprosu o stsenariyakh vozniknoveniya khaosa u trekhmernikh otobrazheniy // Nelineynaya dinamika. – 2012. – Т. 8, № 1. – S.3–28.
- 3 Ivanov A.P. Issledovanie razrivnykh bifurkatsiyi v negladkikh dinamicheskikh sistemakh // Nelineynaya dinamika. – 2012. – Т. 8, № 2. – S. 231–247.
- 4 Anishenko V.S., Biryukova N.I., Astakhov S.V., Boev Ya.I. Vremya vozvrata Puankare i lokal'naya razmernost' khaoticheskikh attraktorov // Nelineynaya dinamika. – 2012. – Т. 8, № 3. – S. 449–460.
- 5 Kuznetsov A.P., Pozdnyakov M.V., Sedova Yu.V. Svyazannye universal'nie otobrazheniya s bifurkatsiey Neimana-Sakera // Nelineynaya dinamika. – 2012. – Т.8, № 3. – S.473–482.
- 6 Gonchenko S.V., Shilnikov L.P., and Turaev D.V. On Global Bifurcations in Three-Dimensional Diffeomorphisms Leading to Wild Lorenz-Like Attractors // Regular and Chaotic Dynamics. – 2009. – Vol. 14, No. 1. – P. 137–147.
- 7 Thompson J. M. T., Stewart H. B. Nonlinear Dynamics and Chaos // John Wiley & Sons, England, 2002. – 458 p.
- 8 Glending P. Stability, instability and chaos. – Cambridge University Press, 2001. – 388 p.
- 9 Zhanabaev Z.Zh. And Akhtanov S.N. Universal'noe otobrazhenie peremezhaemosti // Vestnik KazNU, seriya fizicheskaya. – 2011. – № 2 (37). – S. 15-25.
- 10 Zhanabaev Z.Zh. Obobshchennaya metrichesкая характеристика динамического хаоса // Materialy VIII Mezhdunarodnoi shkoly "Khaoticheskie avtokolebanya i obrazovanie struktur" – Saratov, 2007. – S. 67-68.
- 11 Zhanabaev Z.Zh., Almasbekov N.E., Beisebaeva A.S. Manapbaeva A.B. Akhtanov S.N. Zashchita informatsii dinamicheskim khaosom s fazovim upravleniem // Materialy 7-i Mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii. Khaos i strukturi v nelineinikh sistemakh. Teoria i eksperiment. Karaganda, 2010. – S. 13-20.
- 12 Lyubimov D.V., Zaks M.A. Two mechanisms of the transition to chaos in finite – dimensional model of convection // Physica 9D. – 1983. – P. 52-64.

Работа выполнена по гранту КН МОН РК №1100/ГФ