

УДК 530.1

З.Ж. Жанабаев., С.Н.Ахтанов

*Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан,
Научно-исследовательский институт экспериментальной и
теоретической физики sayataktanov@mail.ru*

Информационная энтропия неоднородных динамических систем

В данной статье рассматривается новый метод расчета энтропии с учетом степени однородности двумерного множества. Применение таких методов для анализа динамических систем является актуальным вопросом. Остается невыясненным вопрос: можно ли установить связь между энтропией и параметром порядка динамической системы?

Для этой цели использовано выражение для эволюционного параметра порядка динамической системы, которое описывает бифуркационные режимы и является определяющей переменной. Этот параметр был введен ранее нами (Жанабаев З. Ж., 2007) в виде обобщенной метрической характеристики.

Определена неаддитивная информационная энтропия S двумерного множества – фазового портрета временной реализации. Неаддитивность энтропии обусловлена учетом степени однородности системы q . Этот параметр определен в виде меры отклонения статистики Цаллиса от статистики Гиббса. При $q=1$ энтропия аддитивна, энтропия Цаллиса совпадает с энтропией Реньи.

Построена зависимость неаддитивной энтропии от эволюционного параметра порядка для динамических систем разного типа. Показано, что именно отображение фрактальной эволюции, предложенное нами, реализует асимметричные бифуркации типа «gluing» и хаос, удовлетворяющий энтропийным критериям самоорганизации $0,567 < S < 0,806$, где S – значение энтропии Колмогорова – Синяя. Эти критерии самоаффинности и самоподобия установлены нами (Жанабаев З. Ж., 1996) ранее.

Ключевые слова: бифуркация, отображение, хаотические колебания, степень однородности, энтропия.

Введение

Энтропийный анализ часто применяется в современных исследованиях [1-3]. Однако, определение самой энтропии при наличии различных реальных условий является незавершенным вопросом. Отсутствуют исследования, посвященные количественным энтропийным критериям структуры хаоса, условиям выполнения известных теорем Пригожина, Климонтовича и т.д.

Можно использовать выражение для эволюционного параметра порядка динамической системы, которое описывает бифуркационные режимы и является определяющей переменной. В последнее время установлены возможность неаддитивности энтропии, если учесть неоднородность системы [4].

Неаддитивность информационной энтропии Сдвумерного множества – фазового портрета временной реализации обусловлена учетом степени однородности системы q . Этот параметр может быть определен в виде меры отклонения статистики Цаллиса от статистики Гиббса. При $q=1$ энтропия должна быть аддитивной, энтропия Цаллиса должна совпадать с энтропией Реньи. Установление связи между энтропией с учетом степени однородности и параметром порядка динамической системы является целью настоящей работы.

В качестве генератора реализации и фазового портрета для построения зависимости неаддитивной энтропии от эволюционного параметра порядка выбраны ранее исследованные модели динамических систем, как логистическое отображение, отображение Хенона [7], модифицированная система Лоренца, для которой реализуется «склеивающаяся» («gluing») бифуркация [8], отображение фрактальной эволюции [9], отображение Рувькова [10].

Информационная энтропия двумерных объектов с учетом степени однородности

В физике открытых систем важными являются вопросы, связанные с определением режимов самоподобия и самоаффинности. Если число определяющих переменных больше единицы и коэффициенты подобия по этим переменным различные, то фрактальный объект называется самоаффинным. Если иерархические части фрактального объекта имеют одинаковые коэффициенты подобия по всем переменным, то объект называется самоподобным. Ранее З. Ж. Жанабаевым [4] были установлены информационно – энтропийные критерии самоаффинности (I_1) и самоподобия (I_2) в виде неподвижных точек плотности вероятности реализации информации и энтропии:

$$e^{-I} = I, \quad I = I_1 = 0.567; \quad (I+1)e^{-I} = I, \quad I = I_2 = 0.806. \quad (1)$$

В последние годы развивается новая обобщенная статистическая механика, которую можно назвать статистикой Цаллиса, или, квазиканонической статистикой Гиббса [4]. В основе таких теорий лежит использование экспоненциальной функции вида

$$\exp_{q-1}[-x] = (1 - q - 1 x)^{\frac{1}{q-1}}, \quad (2)$$

где q – степень однородности. В пределе $q \rightarrow 1$ мы получим обычную экспоненту. По смыслу введения

$$|q-1| \sim \frac{1}{M}, \quad M = L - N, \quad M \rightarrow \infty, \quad q \rightarrow 1, \quad (3)$$

где L – число частиц замкнутой системы, N – число частиц подсистемы. Полнота статистики, соответствующая каноническому распределению Гиббса равновесного состояния достигается при $q=1$. Отличие от единицы параметра q характеризует степень статистической неравновесности, неоднородности системы.

Определим полную энтропию $S(x, y)$ с учетом степени однородности. Примем в качестве переменных одномерную и условную вероятности $z_1 = P(x)$, $z_2 = P(y/x)$. Согласно формуле (2) имеем

$$\exp_{q-1}[z_1] \exp_{q-1}[z_2] = \exp_{q-1}[z_1 + z_2 + (q-1)z_1 z_2]. \quad (4)$$

Представляя левую часть как « $q-1$ логарифм» от произведения, получим

$$\ln_{q-1} z_1 z_2 = \ln_{q-1} z_1 + \ln_{q-1} z_2 + |q-1| \ln_{q-1} z_1 \ln_{q-1} z_2. \quad (5)$$

Из формулы (5) следует выражение для неаддитивной « S_{q-1} – энтропии»:

$$S_{q-1}(x, y) = S_{q-1}(x) + S_{q-1}(y/x) + |q-1| S_{q-1}(x) S_{q-1}(y/x). \quad (6)$$

В пределе $q \rightarrow 1$ мы имеем аддитивную энтропию $S(x, y) = S(x) + S(y/x)$.

Согласно определению q по формуле (3) его можно определить из экспериментальных данных. Для описания неоднородности геометрических объектов введем малый параметр $q \approx 1$:

$$q-1 = \frac{\langle m \rangle n(\delta) - N}{N}, \quad q = \frac{\langle m \rangle n(\delta)}{N}, \quad (7)$$

где N – общее число точек (отсчетов), $n(\delta)$ – число ячеек с масштабом измерения δ , в которых имеется хотя бы одна точка, $\langle m \rangle$ – среднее число точек в ячейке. Если для сильно неоднородных объектов окажется $q \ll 1$, то нужно пользоваться выражением $1-q$.

Для простоты мы далее будем пользоваться выражением $q-1$ вместо $|q-1|$, при необходимости выбирая положительный знак и условие нормировки искомой физической величины.

Используя выражение (2) мы определим зависимость от q информационной энтропии – единственной меры сложности, неопределенности неравновесной системы. Для квазиравновесного процесса, характеризуемого параметром q , информацию определим в виде

$$I = -\ln_{q-1} P. \quad (8)$$

Отсюда представим вероятность как функцию от информации:

$$P(I) = \exp_{q-1}[-I] = (1 - (q-1)I)^{\frac{1}{q-1}}. \quad (9)$$

Функция плотности распределения вероятности реализации информации $\rho(I)$ определяется как

$$\rho(I) = \frac{d}{dI} \exp_{q-1}[-I] = (1 - (q-1)I)^{\frac{2-q}{q-1}}. \quad (10)$$

Энтропия определяется как среднее значение информации:

$$S_q(I) = \int_I \rho(I) I dI = \frac{1}{q-1} \left((1 - (q-1)I)^{\frac{1}{q-1}} - \frac{1}{q} (1 - (q-1)I)^{\frac{q}{q-1}} \right). \quad (11)$$

Самоподобные значения $S(I_1) = I_1$ и $S(I_2) = I_2$ найдем как неподвижные точки отображений

$$I_{1q,i+1} = (1 - (q-1)I_{1,i})^{\frac{2-q}{q-1}}, \quad (12)$$

$$I_{2q,i+1} = \frac{1}{q-1} \left((1 - (q-1)I_{2,i})^{\frac{1}{q-1}} - \frac{1}{q} (1 - (q-1)I_{2,i})^{\frac{q}{q-1}} \right), \quad (13)$$

$$I_{1q,0} = I_{2q,0} = 0, \infty; \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Таким образом, значение q может характеризовать отклонение системы от состояния самоподобия и самоаффинности через значения информации и информационной энтропии. В мультифрактальном анализе некоторый параметр q задается в интервале $(-\infty, \infty)$, однако его физический смысл остается неясным. Однако мы отметим, что при условии

$$\sum_i (P_i^q - P_i) \ll 1, \quad (14)$$

энтропия Цаллиса, определяемая формулой (2), совпадает с энтропией Реньи:

$$S_{R,q} = -\frac{1}{q-1} \ln \sum_i P_i^q. \quad (15)$$

В работах [5,6] введена новая характеристика хаоса, называемая обобщенной метрической характеристикой:

$$K_{x_i, x_j}^{p,q} = \frac{\left(\langle |x_i|^p \rangle \right)^{\frac{1}{p}} \left(\langle |x_j|^q \rangle \right)^{\frac{1}{q}}}{\langle |x_i x_j| \rangle}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad (16)$$

где x_i, x_j – переменные, $q = 2 + D_C$, D_C – корреляционная размерность. Если x_i, x_j произвольные переменные, то этот параметр был назван обобщенной метрической

характеристикой (которого также можно назвать метрическим параметром порядка), если $x_j = t$ - время, то – эволюционным параметром порядка.

Универсальные энтропийные закономерности эволюции открытых систем к режимам самоподобия и самоаффинности согласно формулам (12), (13), (16) представлены на рис. 1., где принято $i = t$. В этих формулах энтропия нормирована на единицу. Диаграмма показанная на рис.1. учитывает изменение степени однородности q .

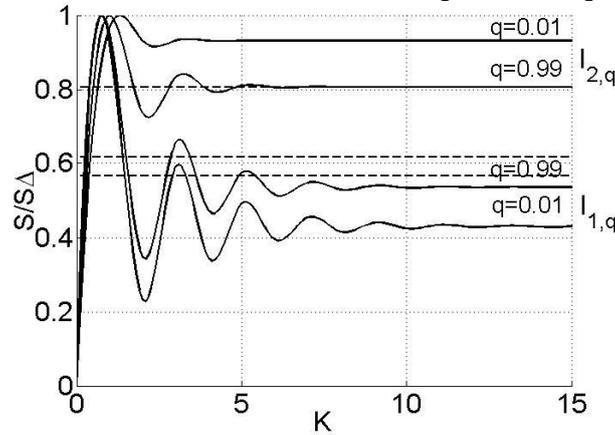


Рис. 1. Эволюция информационной – энтропии. $i \equiv K = K_{x,i}^{2+D_C \cdot q}$

Энтропия геометрических фигур

Для сопоставления энтропий различных объектов необходимо знать способ ее нормировки, т. е. определить форму объекта, у которой энтропия максимальна. Рассмотрим правильные многоугольники и определим энтропии этих объектов с учетом параметра неоднородности. Пусть x_c и y_c — координаты центра, а R — радиус описанной вокруг правильного многоугольника окружности, ϕ_0 — угловая координата первой вершины, тогда декартовы координаты вершин правильного n — угольника определяются формулами:

$$x_i = x_c + R \cos\left(\phi_0 + \frac{2\pi i}{n}\right), \quad y_i = y_c + R \sin\left(\phi_0 + \frac{2\pi i}{n}\right), \quad (17)$$

где $i = 0..n-1$.

Воспользуемся формулой (17) для построения правильных многоугольников. Рассмотрим три случая многоугольника: пустой, самоподобный и с случайным распределением точек внутри. Пример для треугольника показан на рис.2.

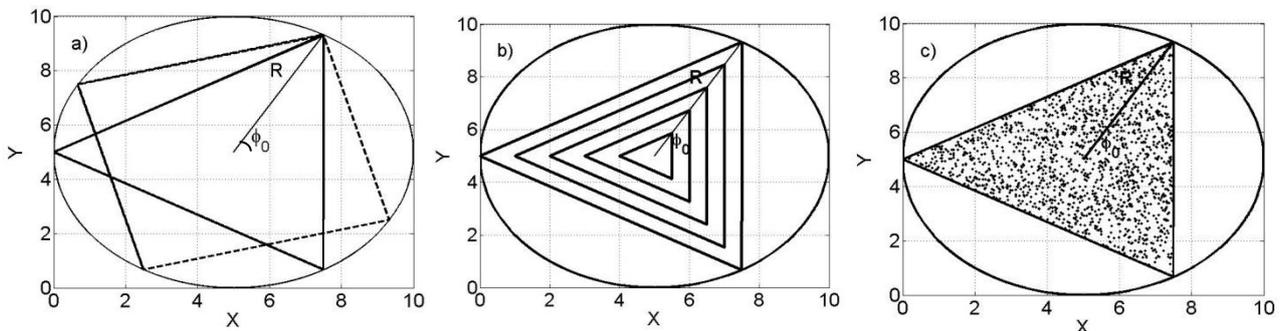


Рис.2.Правильный треугольника) пустой, б) самоподобный, с) с случайным распределением точек внутри огибающей области

Далее исследуем эти три случая по отдельности. Энтропия с учетом степени однородности зависит от положения угла вершины исследуемого многоугольника относительно оси ординаты. Зависимости энтропий правильного пустого многоугольника от угла ϕ_0 согласно формулам (6),(7), (16), (17), показаны на рис. 3.

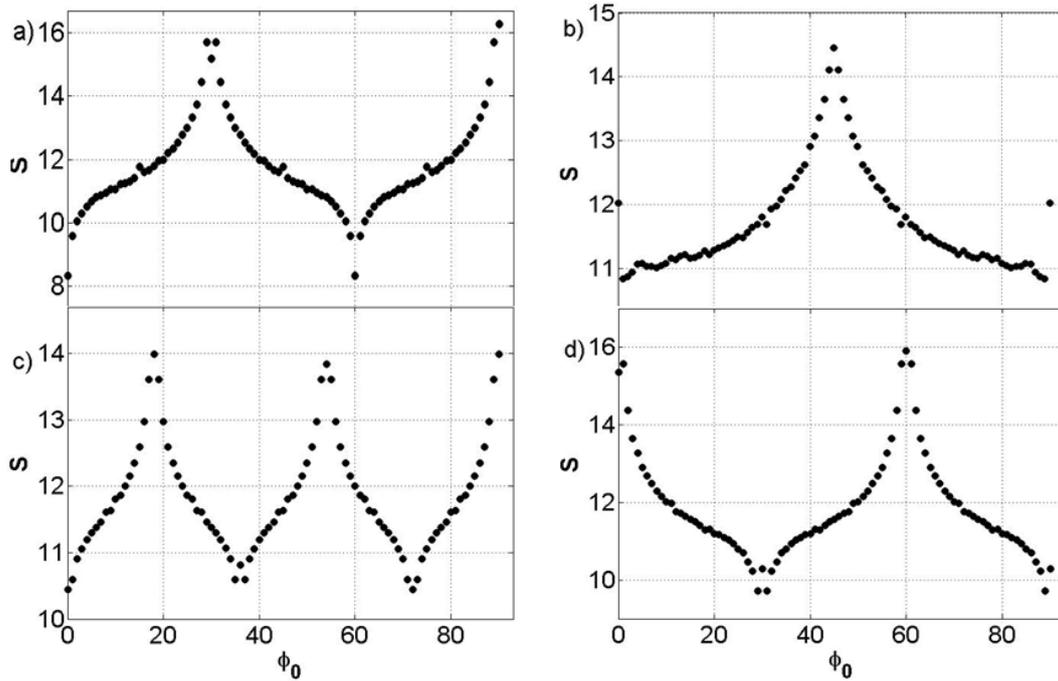


Рис. 3. Зависимость энтропии от угла ϕ_0 правильного пустого многоугольника: а) треугольника, б) квадрата, с) пятиугольника, д) шестиугольника. Общее число точек в каждом случае $N=10^5, \delta=10^{-2}$.

Энтропия пустого треугольника имеет наибольшее значение по сравнению с остальными пустыми многоугольниками, (рис.4)

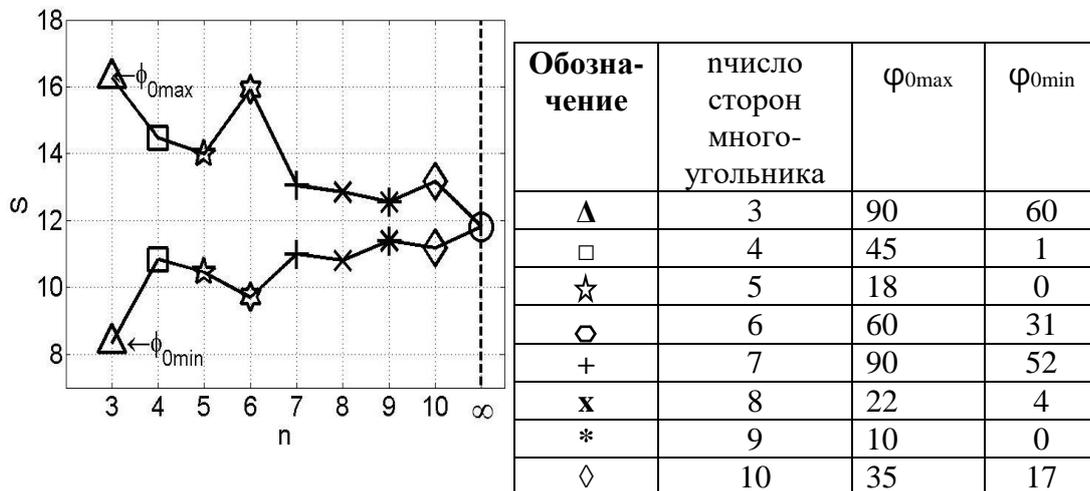


Рис.4. Изменение энтропии от угла поворота пустых многоугольников. $q=0.04, N=10^5, \delta=10^{-2}$.

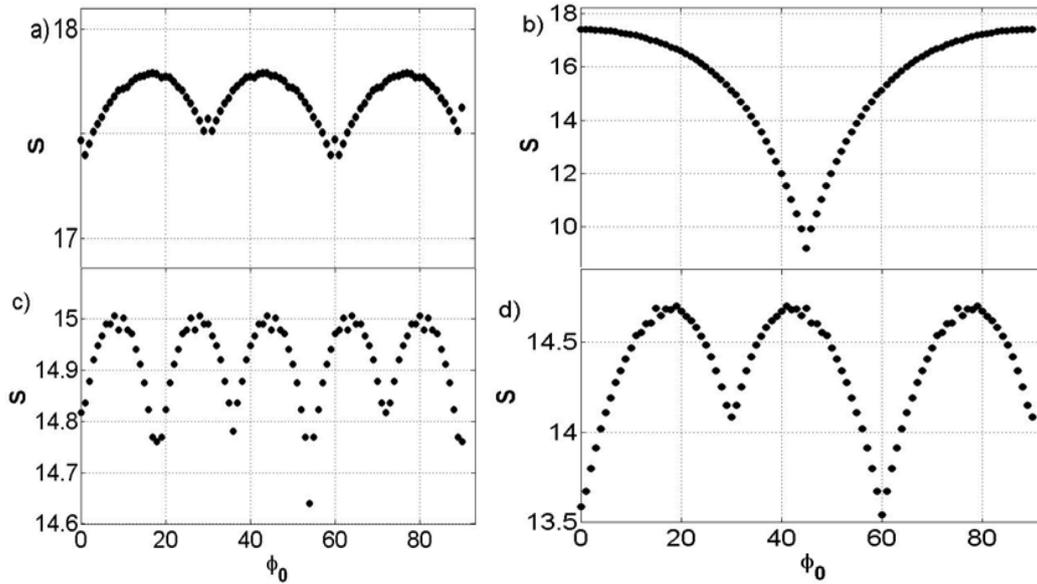


Рис. 5. Зависимость энтропии от угла ϕ_0 правильного самоподобного многоугольника: а) треугольника, б) квадрата, с) пятиугольника, д) шестиугольника. Общее число точек в каждом случае $N=10^5, \delta=10^{-2}$.

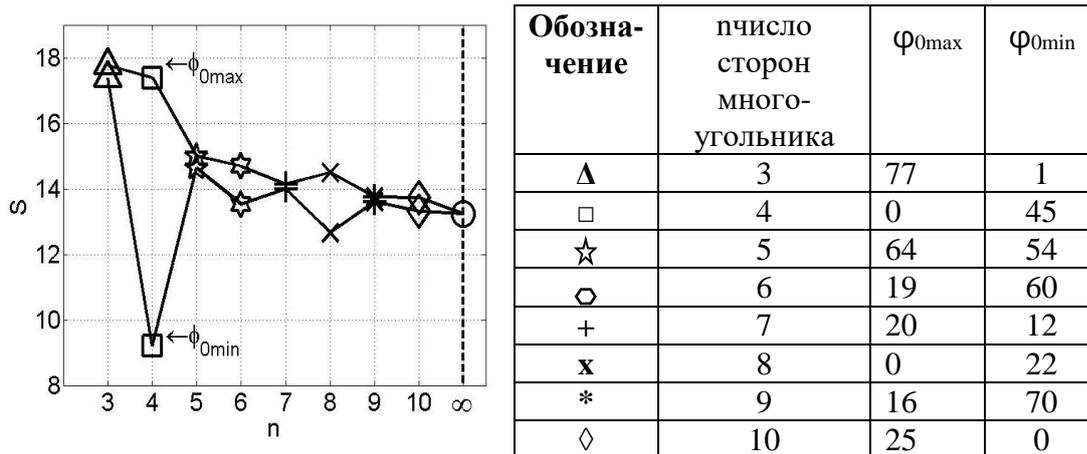


Рис.6. Изменение энтропии от угла поворота самоподобных многоугольников. $q=0.5, N=10^5, \delta=10^{-2}$.

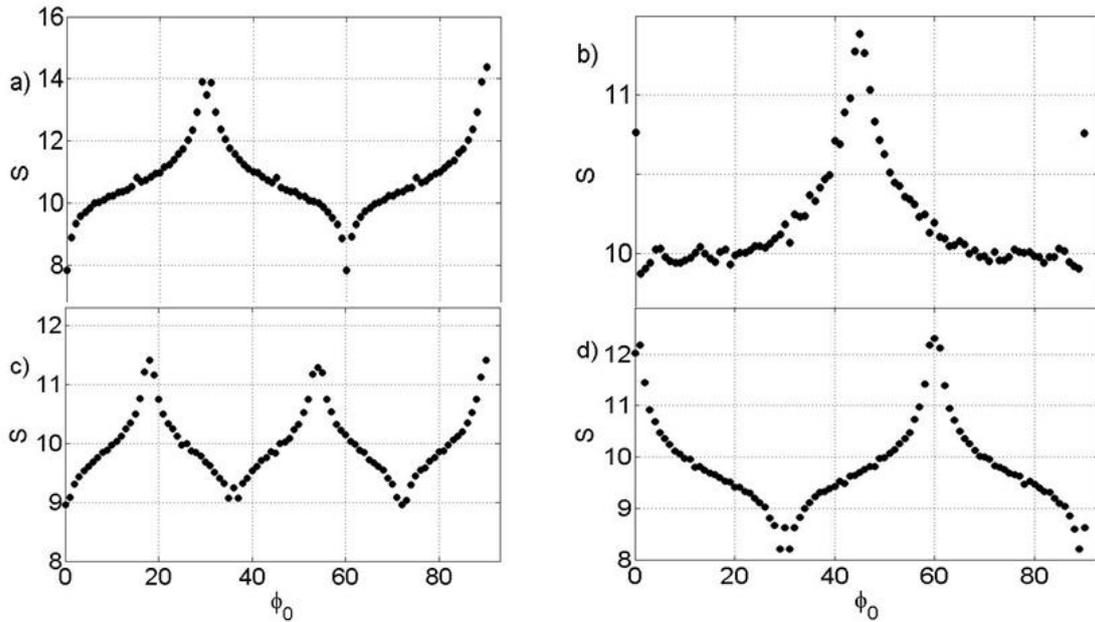
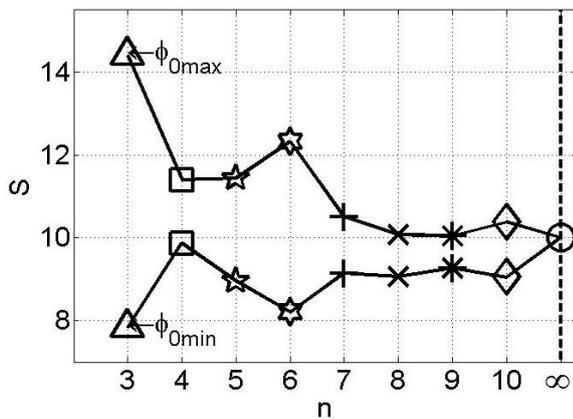


Рис. 7. Зависимость энтропии от угла ϕ_0 правильного многоугольника с случайным распределением точек внутри: а) треугольник, б) квадрат, с) пятиугольник, д) шестиугольник. Общее число точек в каждом случае $N=10^5, \delta=10^{-2}$.

В случае самоподобно заполненных фигур энтропия несколько возрастает. Энтропия самоподобного треугольника, также имеет наибольшее значение по сравнению с остальными самоподобными многоугольниками, (рис.6). Случайное распределение точек уменьшает энтропию многоугольника при условии, что общее число точек будет одинаковым для пустого и заполненного многоугольника (рис.6).



Обозначение	число сторон многоугольника	ϕ_{0max}	ϕ_{0min}
Δ	3	90	60
\square	4	45	1
\star	5	18	0
\diamond	6	60	29
$+$	7	90	52
\times	8	22	86
$*$	9	89	40
\diamond	10	35	18

Рис.8. Изменение энтропии от угла поворота многоугольника с случайным распределением точек внутри. $q=0.25, N=10^5, \delta=10^{-2}$.

Энтропия динамических систем

Применим вышеизложенный метод к анализу ранее известных моделей динамических систем: логистическое отображение, отображение Хенона, отображение накопления – выброса, система дифференциальных уравнений гомоклинической бифуркации и двумерное отображение нейронной модели.

Отображения Фейгенбаума и Хенона[7], соответственно, записываются в виде

$$x_{i+1} = rx_i(1 - x_i), \quad (18)$$

$$x_{i+1} = 1 - ax_i^2 - by_i, \quad y_{i+1} = x_i. \quad (19)$$

Система дифференциальных уравнений гомоклинической бифуркации (бифуркации «склеивания» или «gluingbifurcation»)[8]:

$$\frac{dx}{dt} = \sigma \cdot (y - x) + A \cdot y \cdot z, \quad \frac{dy}{dt} = R \cdot x - y - x \cdot z, \quad \frac{dz}{dt} = x \cdot y - b \cdot z, \quad (20)$$

где σ, b, R, A – параметры.

Отображение «накопление - выброса»[9]:

$$x_{i+1} = \left(\frac{1}{a} + \mu_i\right) |x_i|^{-\frac{1}{\gamma}}, \quad \mu_{i+1} = -\frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{a} + \mu_i\right) |x_i|^{-\frac{1}{\gamma} - 1}. \quad (21)$$

где γ – имеет смысл дробной части фрактальной размерности множества значений x_i , a – точность наблюдения x_i ($0 < 1/a < 1$).

Двумерное отображение нейронной модели [10]:

$$x_{i+1} = f(x_i, y_i), \quad y_{i+1} = y_n - \mu(x_i + 1) + \mu\sigma, \quad (22)$$

$$\text{где } f(x, y) = \begin{cases} \alpha/(1-x) + y, & x \leq 0 \\ \alpha + y, & 0 < x < \alpha + y, \\ -1, & x \geq \alpha + y \end{cases} \quad \alpha, \mu, \sigma - \text{параметры.}$$

Изменение энтропии Шеннона по Коопределенными из (16) показано на рис. 9. По формулам (6), (7), (16) построен рис. 10.

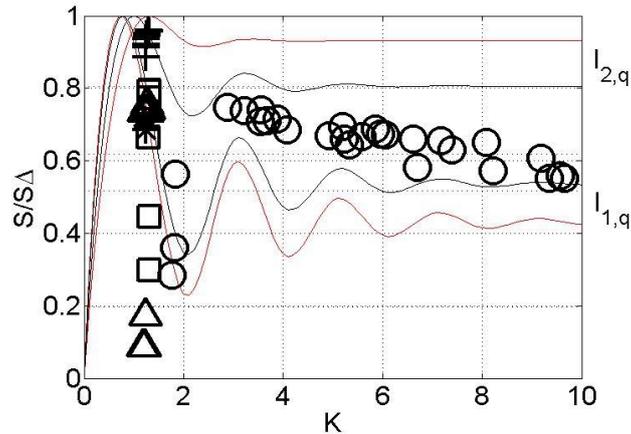


Рис. 9. Энтропийные закономерности эволюции динамических систем: гомоклинической (gluing) бифуркацией (+) ($\sigma = 10, b = 8/3, R = 3, A \in [10:15]$), отображение фрактальной эволюции (o) ($a = 2.806, \gamma \in [1:6]$), отображение Рутькова (*) ($\alpha = [4:6], \sigma = 0.14, \mu = 0.001$), логистическое отображение (Δ) ($r = [3.5:4]$) отображение Хенона (\square) ($b = 0.4, a \in [1:1.4]$). Общее число точек $N = 10^5$. $S_\Delta = 17.7$. Сплошные линии на рисунке соответствуют теории [10]. $K = K_{x,t}^{2+D_C \cdot p}$

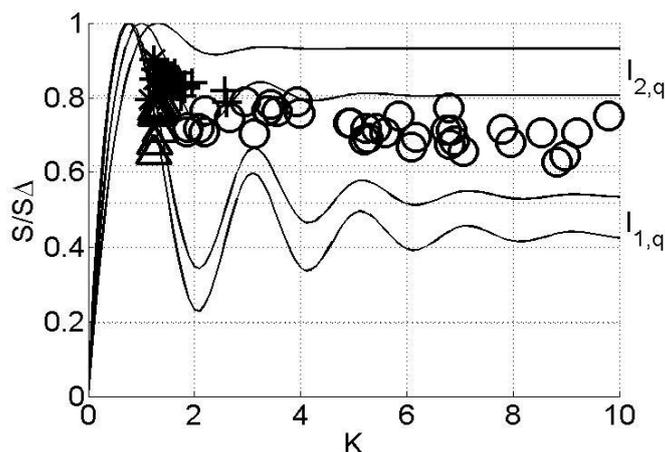


Рис. 10. Энтропийные закономерности эволюции динамических систем учетом степени однородности: с гомоклинической (gluing) бифуркацией (+) ($\sigma = 10, b = 8/3, R = 3, A \in [10 : 15], q = [0.0184, 0.0363]$); отображение фрактальной эволюции (o) ($a = 2.806, \gamma \in [1 : 6], q = [0.0004, 0.0071]$); уравнение Рутькова (*) ($\alpha = [4 : 6], \sigma = 0.14, \mu = 0.001, q = [0.0297, 0.0565]$); логистическое отображение (Δ) ($r = [3.5 : 4], q = [0.0004, 0.0205]$); отображение Хенона (\square) ($b = 0.4, a \in [1 : 1.4], q = [0.0273, 0.0369]$). Общее число точек $N = 10^5$. $S_{\Delta} = 17.78$. Сплошные линии на рисунке соответствуют теории [3]. $K = K_{x_i, x_j}^{p, 2+D_c}$

Рис. 10 станет более понятным, если учесть зависимость q от $K_{x_i, x_j}^{p, 2+D_c}$ (рис. 11).

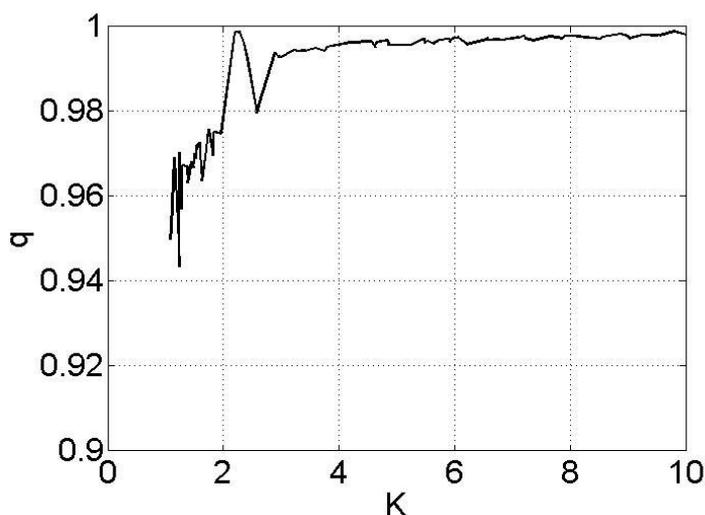


Рис. 11. Зависимость обобщенно – метрической характеристики $K = K_{x_i, x_j}^{p, 2+D_c}$ от степени однородности q .

Также из рис. 10. видно, что отображение «накопление - выброса» и система дифференциальных уравнений гомоклинической бифуркации имеют наиболее высокие значения параметра порядка по сравнению с остальными динамическими системами.

Заключение

В настоящей работе мы по новому методу определили энтропию с учетом степени однородности. Эта энтропия учитывает неоднородность в двумерном фазовом портрете. Для того, чтобы показать влияние степени однородности на энтропию, были рассчитаны значения энтропии при одинаковых количествах точек простых геометрических фигур для случаев:

пустой, самоподобный, с случайным распределением точек внутри. Максимальная энтропия использовалась для нормировки энтропии динамических систем.

Также был определен параметр порядка двумерного фазового портрета динамических систем для определения состояния динамической системы. Была установлена закономерность между энтропией с учетом неоднородности и параметром порядка динамической системы.

Анализ динамических систем, как логистическое отображение, отображение Хенона, система дифференциальных уравнений гомоклинической бифуркации, отображение фрактальной эволюции и отображение Рутькова показал, что отображение фрактальной эволюции реализуют колебания, удовлетворяющим условиям самоорганизации. Данный метод можно применять к анализу сложных явлений различной природы.

Работа выполнена по гранту КН МОН РК №1100/ГФ

References

1. Danilevich Ya. B., Kovalenko A. N., Nosyrev S. P., Irregularity of entropy processes in the body as an indicator of functional stability // Doklady Biological Sciences, 2009, Vol. 429, p. 490.
2. Klimontovich, Yu.L. Entropiya i informatsiya ot kriticheskikh sistem // Uspekhi fizicheskikh nauk, 1999, vol. 169, no. 4, pp. 443–452.
3. Pardalos P. M., Sackellares J. Ch., et. al., Statistical information approaches for the modelling of the epileptic brain // Vol. 43, Issue 1, 28 May 2003, p. 79–108.
4. Zhanabaev Z. Zh. Kvazikanonichesko raspreделение Gibbsa i masshtabnaya invariantnost' khaoticheskikh sistem // Materialy 5-oimejdunarodnoy konferentsii. "Khaos i struktura v nelineinikh sistemakh", 15-17 iyunya, 2006. Astana. Ch.1. – s.15-23.
5. Zhanabaev Z. Zh. Obobshchennaya metriceskaya kharakteristika dinamicheskogo khaosa // Materialy VIII Mezhdunarodnoy shkoly "Khaoticheskie avtokolebaniya i obrazovanie struktur" – Saratov, 2007. s. 67-68
6. Zhanabaev Z. Zh. and Akhtanov S. N., New method of investigating of bifurcation regimes by use of realizations from a dynamical system // Vestnik KazNU, seriya fizicheskaya. - №1(44)2013.
7. Glending P. Stability, instability and chaos. – Cambridge University Press, 2001. 388 p.
8. D.V. Lyubimov, M.A. Zaks, Two mechanisms of the transition to chaos in finite – dimensional model of convection // Physica 9D (1983) 52-64.
9. Zhanabaev Z. Zh. and Akhtanov S. N., Universal'noe otobrazhenie peremezhnosti // Vestnik KazNU, seriya fizicheskaya № 2 (37) 2011, s. 15-25
10. Nikolai F. Rulkov, Modeling of spiking-bursting neural behavior using two-dimensional map // Physical Review E, V 65, 10 April 2002.

З. Ж. Жаңабаев., С. Н. Ахтанов

БІРТЕКСІЗ ДИНАМИКАЛЫҚ ЖҮЙЕЛЕРДІҢ ИНФОРМАЦИЯЛЫҚ ЭНТРОПИЯСЫ

Осы мақалада екіөлшемді жиынның біртектілік дәрежесін ескеретін энтропияны есептеудің жаңа әдісі қарастырылады. Осындай әдістерді динамикалық жүйелерді талдау үшін қолдану өзекті сұрақ болып табылады. Анықталмаған мынадай сұрақ бар: динамикалық жүйенің тәртіп параметрі және энтропия арасында байланысты орнатуға болады ма?

Осы мақсатта бифуркациялық режимдерді анықтайтын және анықтауыш параметр болып табылатын динамикалық жүйенің эволюциялық тәртіп параметрі үшін өрнек қолданылады. Бұл параметр жалпылама метрикалық сипаттама түрінде ертеде (Жаңабаев З. Ж., 2007) енгізілген.

Уақыт қатарының фазалық бейнелеуі үшін S – екіөлшемді жиын аддитивті емес информациялық энтропия анықталған. Энтропияның аддитивті еместігі жүйенің q біртектілік дәрежесін ескерумен негізделген. Бұл параметр Цаллис статистикасының Гиббс статистикасынан ауытқуының өлшемі түрінде анықталған. $q=1$ жағдайында энтропия аддитивті, Цаллис Реньи энтропиясымен сәйкес келеді.

Әртүрлі түрдегі динамикалық жүйелер үшін аддитивті емес энтропияның эволюциялық тәртіп параметрі арасындағы тәуелділік тұрғызылған. Біз ұсынған фракталдық эволюция бейнелеуі ғана «gluing» түріндегі асимметриялық бифуркацияны жүзеге асыратынын және энтропиялық өзқауымдық критерияларын $0,567 < S < 0,806$ қанағаттандыратыны көрсетілген, мұнда S – Колмогоров – Синая энтропия мәні. Бұл өзқауым және өзэффинділік критериялар ертеде (Жаңабаев З. Ж., 1996) ұсынылған.

Түйін сөздер: бифуркация, бейнелеу, хаостық тербелістер, біртектілік дәрежесі, энтропия.

Z.Zh.Zhanabaev, S.N. Akhtanov

INFORMATION ENTROPY OF THE INHOMOGENEOUS DYNAMICAL SYSTEMS

In the present paper describe a new method for calculation of entropy with regard of degree of homogeneity of the two-dimensional set. The urgency of the work: application of these methods for analysis of dynamic systems. We need to consider the relationship between entropy and order parameter of a dynamical system.

For this purpose, we used the expression for evolution of order parameter of a dynamical system, which is a determining variable and for the description of the bifurcation regimes. This parameter was introduced earlier (Zhanabaev Z. Zh., 2007) in the form of the generalized metric characteristic.

Non-additive information entropy S of two-dimensional set which is the phase portrait of time realization was defined. Non-additivity of entropy exists due to homogeneity of q . This parameter is defined as a statistical measure of deviation of Tsallis from the Gibbs statistics. For $q = 1$, entropy is an additive value. Tsallis entropy coincides with Renyi entropy.

Dependence of the non-additive entropy on evolution of the order parameter for dynamical systems of different types was shown. Evolution of fractal mapping implements asymmetric bifurcations of the type «gluing» and chaos which satisfies the entropy criteria of self-organization $0,567 < S < 0,806$, where S is a value of Kolmogorov -Sinai entropy. These self-affine and self-similar criteria have been established by (Zhanabaev Z. Zh., 1996) previously.

Keywords: bifurcation, maps, chaotic oscillations, the degree of homogeneity, entropy.