

УДК 520.2/8

Г.М. Авхунбаева^{1,2*}, Е.Б. Курманов², Е.К. Сабаев²¹Астрофизический институт им. В.Г. Фесенкова, Республика Казахстан, г. Алматы²Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Республика Казахстан, г. Алматы

*E-mail: a.gulya90@mail.ru

К теории двухпараметрических гравитационных линз

В статье предлагаются четыре двухпараметрические модели гравитационных линз – линза, порожденная барионной материей и вращательным моментом; линза, обладающая барионной массой и электрическим зарядом; линзы, состоящие из барионной и небарионной материи, учитывающие наличие вращения и заряда.

В настоящей работе было исследовано распространение лучей света в сферически-симметричном гравитационном поле, порождаемом как темной материей, так и барионной составляющей, а также с учетом наличия заряда и вращательного момента. При исследовании распространения света мы ограничились условием его движения в одной плоскости.

Ключевые слова: гравитационная линза, двухпараметрическая модель, темная материя.

G.M. Avhunbaeva, E.B. Kurmanov, E.K. Sabayev
To the two-parameter theory gravitational lenses

The article offers four two-parametric models of gravitational lenses – lens of baryonic matter and rotational moment; lens possesses by baryonic mass and electric charge; lens consists of baryonic and non-baryonic matter with account of rotation and charge.

In the present work we investigated the propagation of light rays in the spherically symmetric gravitational field generated by dark matter, baryonic component, charge and rotational moment. In the study of light propagation we limited ourselves by its plane movement.

Keywords: gravitational lense, two-parametric model, dark matter.

Г.М. Авхунбаева, Е.Б. Курманов, Е.К. Сабаев
Екі параметрлі гравитациялық линзалар теориясына

Бұл мақалада гравитациялық линзаның төрт екіпараметрлі үлгісі – бариондық материя және айналу моментінен құралған линза ұсынылды; бариондық масса және электр зарядына ие линза; айналу моменті мен заряды ескерілетін бариондық және бариондық емес материядан тұратын линзалар.

Берілген жұмыста сфералық-симметриялық гравитациялық өрісте жарық сәулесінің таралуы зерттелді. Гравитациялық өріс қараңғы материя ретінде және бариондық материя түрінде де қарастырылып, зарядтың және айналудың үлесі көрсетілді. Жарық қозғалысын қарастырғанда, ол бір жазықтық бойымен таралады деген шартпен шектелінді.

Түйін сөздер: гравитациялық линза, екі параметрлік модель, қара материя.

Введение

Хорошо известно, что одним из методов исследования свойств Вселенной является

гравитационное линзирование. Оно было предметом многих исследований [1, 2, 3].

В нашей работе рассматриваются новые модели гравитационных линз, которые учиты-

вают как их размеры, так и внутреннюю структуру, а также другие ее параметры – гало темной материи, заряд и вращательный момент. При этом акцент делается на двухпараметрических гравитационных линзах. Такая постановка задачи обусловлена тем, что согласно современным астрономическим данным основными компонентами любой галактики являются темная материя [4] и барионная материя [5]. Кроме того, возросшая точность астрономических наблюдений и расширение теоретических базы современной космологии позволяют учесть в числе параметров гравитационной линзы ее заряд и вращательный момент.

В работе исследуются четыре новые двухпараметрические модели гравитационных линз – линза, порожденная барионной материей и вращательным моментом; линза, обладающая барионной массой и электрическим зарядом; линзы, состоящие из барионной и небарионной материи, учитывающие наличие вращения и заряда.

При исследовании двухпараметрических гравитационных линз будем руководствоваться следующими требованиями.

Первое, для нахождения показателя преломления гравитационного поля необходимо при-

равнять нулю его 4-мерный интервал. Это позволит, используя стандартное выражение для показателя преломления

$$n = \frac{cdt}{dl} = \frac{c}{v}, \quad (1)$$

найти его явный вид.

Второе, угол отклонения в гравитационной линзе находится из известного в теоретической оптике [6] выражения

$$\Delta\theta = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dr} (\ln n) dr = 2 \ln n \Big|_{-\infty}^r. \quad (2)$$

И третье, при исследовании распространения света будем ограничиваться условием его движения в одной плоскости.

1. Вращающиеся гравитационные линзы

Запишем метрику внешнего гравитационного поля вращающегося сферического тела в квазидекартовых координатах. Она имеет вид [7]

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r} + \frac{2G^2 m^2}{c^4 r^2}\right) c^2 dt^2 + \frac{8GI}{c^3 r^3} [\vec{\omega} \vec{r}]_i c dt dx_i - \left(1 + \frac{2Gm}{c^2 r}\right) dl^2 = \\ \left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r} + \frac{2G^2 m^2}{c^4 r^2}\right) c^2 dt^2 + \frac{8GI}{c^3 r^3} [\vec{\omega} \vec{r}]_i \vec{\eta}_i c dt dl - \left(1 + \frac{2Gm}{c^2 r}\right) dl^2 \quad (3)$$

В этом выражении m – масса центрального тела, $\vec{\omega}$ – его угловая скорость, I – момент инерции этого тела. Остальные обозначения являются стандартными в общей теории относительности.

Приравнивая левую часть к нулю, деля все на $c^2 dt^2$ и вводя показатель преломления, получаем из (3) квадратное уравнение относительно параметра $\xi = \frac{1}{n}$ –

$$\left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r} + \frac{2G^2 m^2}{c^4 r^2}\right) + \frac{8GI}{c^3 r^3} [\vec{\omega} \vec{r}]_i \vec{\eta}_i \frac{cdt}{dl} - \left(1 + \frac{2Gm}{c^2 r}\right) \frac{c^2 dt^2}{dl^2} = \\ \left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r} + \frac{2G^2 m^2}{c^4 r^2}\right) + \frac{8GI}{c^3 r^3} ([\vec{\omega} \vec{r}]_i \vec{\eta}_i) \frac{1}{n} - \left(1 + \frac{2Gm}{c^2 r}\right) \frac{1}{n^2} = \\ - \left(1 + \frac{2Gm}{c^2 r}\right) \xi^2 + \frac{8GI}{c^3 r^3} ([\vec{\omega} \vec{r}]_i \vec{\eta}_i) \xi^2 + \left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r} + \frac{2G^2 m^2}{c^4 r^2}\right) = 0 \quad (4)$$

Два решения этого квадратного уравнения имеют стандартный вид

$$\xi_{1,2} = \frac{\frac{4GI}{c^3 r^3}([\vec{\omega r}]_i \vec{\eta}_i) \pm \sqrt{1 + \frac{16G^2 I^2}{c^6 r^6}([\vec{\omega r}]_i \vec{\eta}_i)^2 - \frac{2G^2 m^2}{c^4 r^2} + \frac{4G^3 m^3}{c^6 r^6}}}{1 + \frac{2Gm}{c^2 r}}. \quad (5)$$

Поскольку здесь в подкоренном выражении стоят малые члены, то пренебрегая ими, из (5) находим

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= \frac{1}{n_1} \approx \frac{1 + \frac{4GI}{c^3 r^3}([\vec{\omega r}]_i \vec{\eta}_i)}{1 + \frac{2Gm}{c^2 r}}, \\ n_1 &= \frac{1 + \frac{2Gm}{c^2 r}}{1 + \frac{4GI}{c^3 r^3}([\vec{\omega r}]_i \vec{\eta}_i)} \approx 1 + \frac{2Gm}{c^2 r} - \frac{4GI}{c^3 r^3}([\vec{\omega r}]_i \vec{\eta}_i) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \xi_2 &= \frac{1}{n_2} \approx \frac{-1 + \frac{4GI}{c^3 r^3}([\vec{\omega r}]_i \vec{\eta}_i)}{1 + \frac{2Gm}{c^2 r}}, \\ n_2 &= \frac{-(1 + \frac{2Gm}{c^2 r})}{1 - \frac{4GI}{c^3 r^3}([\vec{\omega r}]_i \vec{\eta}_i)} \approx -(1 + \frac{2Gm}{c^2 r}) + \frac{4GI}{c^3 r^3}([\vec{\omega r}]_i \vec{\eta}_i) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Поскольку показатель преломления (7) является отрицательным, то он не имеет физического смысла. Поэтому им можно пренебречь и оставить для рассмотрения только выражение (6).

Вычислим показатель преломления и угол отклонения света для конкретного космического объекта. Известно, что самой быстрой вращающейся звездой является звезда VFTS 102. Ее параметры таковы [8]:

$$\begin{aligned} m &= 49.5 \cdot 10^{30} \text{ кг}, \quad r_0 = 2 \cdot 10^9 \text{ м}, \\ v &= 5 \cdot 10^5 \text{ м/с}, \quad \omega = \frac{v}{r} = 2.5 \cdot 10^{-4} \frac{\text{рад}}{\text{с}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Считая вращающуюся звезду сферически-симметричным телом $\left(I = \frac{2}{5} m r^2\right)$, показатель преломления ее гравитационного поля можно записать следующим образом

$$n = 1 + \frac{2Gm}{c^2 r} - \frac{8Gm}{5c^3 r}([\vec{\omega r}]_i \vec{\eta}_i). \quad (9)$$

Подставляя в (9) необходимые численные значения, получаем величину показателя

преломления покомпонентно

$$n \approx 1 + 36.7 \cdot 10^{-6} - 0.05 \cdot 10^{-6}. \quad (10)$$

Используя выражение (2), легко найти полный угол отклонения ($1'' \approx 5 \cdot 10^{-6}$)

$$\begin{aligned} \Delta\theta &= 2 \left(\frac{2Gm}{c^2 r} - \frac{8Gm}{5c^3 r}([\vec{\omega r}]_i \vec{\eta}_i) \right) \approx \\ &\approx 7.4 \cdot 10^{-5} - 0.1 \cdot 10^{-5} \approx +14.8'' - 0.02''. \end{aligned} \quad (11)$$

Отсюда видно, что угол отклонения, обусловленный вращением центрального тела, имеет значение

$$\Delta\theta_\omega \approx -0.02'' \quad (12)$$

2. Гравитационные линзы с электрическим зарядом

Метрика заряженного сферически-симметричного тела (метрика Рейсснера-Нордстрема) имеет вид [9]

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right) c^2 dt^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (13)$$

Здесь r_Q – масштаб длины, соответствующий электрическому заряду Q . Он определяется по формуле $r_Q^2 = \frac{Q^2 G}{4\pi\epsilon_0 c^4}$.

Параметры заряженного тела не могут быть произвольными. Максимальный заряд, который оно может иметь, равен $Q = M \approx \frac{10^{40} eM}{M_{sun}}$, где e – заряд электрона. Это частный случай ограничения Керра-Ньюмена для черной дыры с нулевым угловым моментом.

Используя требование о движении света в одной плоскости, угловую часть метрики (13) можно приравнять нулю. Тогда получаем выражение

$$\left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right) \frac{c^2 dt^2}{dt^2} = \left(1 + \frac{r_s}{r} + \frac{r_s^2}{r^2} - \frac{r_Q^2}{r^2}\right) \frac{dr^2}{dt^2}. \quad (14)$$

Отсюда легко найти показатель преломления заряженной гравитационной линзы

$$n = 1 + \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{4G^2 M^2}{c^4 r^2} - \frac{Q^2 G}{4\pi\epsilon_0 c^4 r^2}. \quad (15)$$

Тогда полный угол отклонения будет равен

$$\Delta\theta = \frac{4GM}{c^2 r_0} + \frac{8G^2 M^2}{c^4 r_0^2} - \frac{2Q^2 G}{4c^4 \pi\epsilon_0 r_0^2}. \quad (16)$$

Оценим его величину, опираясь на работу [10]. Так как $M = 19.8 \cdot 10^{30}$ кг, $r = 6 \cdot 10^6$ м, $Q = 1.6 \cdot 10^{21}$ Кл, то покомпонентно имеем следующие значения

$$n = 1 + 4.8 \cdot 10^{-3} + 0.02 \cdot 10^{-3} - 0.005 \cdot 10^{-3}. \quad (17)$$

Поскольку нас интересует вклад в угол отклонения, обусловленный зарядом тела, то из (16) и (17) получаем его численное значение

$$\Delta\theta \approx 2''. \quad (18)$$

3. Новые двухпараметрические гравитационные линзы

3.1 Вращающиеся гравитационные линзы с распределением темной материи по Наварро-Френку-Уайту

Модель Наварро, Френка и Уайта (НФУ) описывает пространственное распределение массы темной материи, примененное к гало, обнаруженному при моделировании системы N тел в стандартной космологической модели. Это аппроксимация равновесного распределения темной материи, полученного при моделировании динамики N частиц, не испытывающих столкновения.

Выражение для плотности в этой модели имеет вид [4]

$$\rho_{NFW}(r) = \frac{\rho_0}{\frac{r}{r_s} \left(1 + \frac{r}{r_s}\right)^2}. \quad (19)$$

Здесь r_s – характерный радиус в модели НФУ, имеющий смысл размера гало темной материи.

Ранее в работах [11, 12] были найдены показатель преломления и угол отклонения света в гравитационном поле галактики с распределением темной материи по Наварро-Френку-Уайту. Они имеют вид

$$n_{NFW} = 1 + \frac{8\pi G}{c^2} \rho_0 r_0^2 - \frac{8\pi G}{5c^2} \rho_0 r_0^2 \left(\frac{r}{r_0}\right). \quad (20)$$

$$\Delta\theta_{NFW} = 2 \left(\frac{8\pi G}{c^2} \rho_0 r_0^2 - \frac{8\pi G}{5c^2} \rho_0 r_0^2 \left(\frac{r}{r_0}\right) \right). \quad (21)$$

В них также отмечено, что в силу приближенного характера проводимых вычислений показатели преломления, обусловленные различными параметрами, являются аддитивными. Поэтому, опираясь на полученные в этих работах результаты, легко найти соответствующие выражения показателя преломления и угла отклонения для вращающейся гравитационной линзы с распределением темной материи по Наварро-Френку-Уайту. Они имеют вид, соответственно

$$n_{NFW-Rotation} = 1 + \frac{8\pi G}{c^2} \rho_0 r_0^2 - \frac{8\pi G}{5c^2} \rho_0 r_0^2 \left(\frac{r}{r_0} \right) - \frac{8Gm}{5c^3 r_0} ([\vec{\omega}r]_i \vec{\eta}_i). \quad (22)$$

$$\Delta\theta_{NFW-Rotation} = 2 \left(\frac{8\pi G}{c^2} \rho_0 r_0^2 - \frac{8\pi G}{5c^2} \rho_0 r_0^2 \left(\frac{r}{r_0} \right) - \frac{8Gm}{5c^3 r_0} ([\vec{\omega}r]_i \vec{\eta}_i) \right). \quad (23)$$

Что касается численных значений показателя преломления (22) и угла отклонения (23), то, используя ранее полученные результаты, так как из (10)

$$n_{Rotation} = -\frac{8Gm}{5c^3 r} ([\vec{\omega}r]_i \vec{\eta}_i) \approx -0.05 \cdot 10^{-6}$$

и имеем таких параметров [5]

$$\rho_0 = 10^{-23} \frac{\text{г}}{\text{см}^3}, r_0 = 2 \cdot 10^{22} \text{ см}, r = 2 \cdot 10^{20} \text{ см}.$$

Подставляя в (22) и (23) необходимые численные значения, получаем величину показателя преломления и угол отклонения покомпонентно

$$n_{NFW-Rotation} = 1 + 18.5 \cdot 10^{-6} - 0.05 \cdot 10^{-6} = 1.000018, \quad (24)$$

$$\Delta\theta_{NFW-Rotation} = 37.2 \cdot 10^{-6} - 0.1 \cdot 10^{-6} \approx 7.4'' - 0.02''. \quad (25)$$

3.2 Заряженные гравитационные линзы с распределением барионной материи по Идлису

Как показано в работе [12] показатель преломления с распределением барионной материи по Идлису имеет вид

$$n = 1 - \frac{4\pi G}{3c^2} \rho'_0 r_0^2 \left(\frac{r^2}{r_0^2} \right), \quad (26)$$

С учетом сделанных выше замечаний, следовательно, находим

$$\Delta\theta_{Id} = 2 \left(\frac{4\pi G}{3c^2} \rho'_0 r_0^2 \left(\frac{r^2}{r_0^2} \right) \right). \quad (27)$$

Отсюда видно, что показатель преломления квадратично зависит от расстояния. Следовательно, угол отклонения и показатель прелом-

ления

$$n_{Id-charge} = 1 - \frac{4\pi G}{3c^2} \rho'_0 r_0^2 \left(\frac{r^2}{r_0^2} \right) - \frac{Q^2 G}{4\pi\epsilon_0 c^4 r^2}, \quad (28)$$

$$\Delta\theta_{Id-charge} = 2 \left(\frac{4\pi G}{3c^2} \rho'_0 r_0^2 \left(\frac{r^2}{r_0^2} \right) - \frac{Q^2 G}{4\pi\epsilon_0 c^4 r^2} \right). \quad (29)$$

В четырех последних формулах ρ'_0 – величина центральной плотности барионной материи в галактике.

$$\text{Так как [5] } \rho'_0 = 4 \cdot 10^{-20} \frac{\text{г}}{\text{см}^3}, r_0 = 2 \cdot 10^{24} \text{ см},$$

$$r = 2 \cdot 10^{22} \text{ см и из (17)}$$

$$n_{charge} = -\frac{Q^2 G}{4\pi\epsilon_0 c^4 r^2} \approx -0.005 \cdot 10^{-3}, \text{ то}$$

покомпонентно имеем следующие значения

$$n_{Id-charge} = 1 - 0.496 \cdot 10^{-4} - 0.005 \cdot 10^{-3}. \quad (30)$$

$$\Delta\theta_{Id-charge} = 0.992 \cdot 10^{-4} - 0.01 \cdot 10^{-3} = 19'' - 2''. \quad (31)$$

Заключение

В данной работе нами было исследовано распространение лучей света в сферически-симметричном гравитационном поле, порождаемом как темной материей, так и барионной составляющей, а также зарядом и вращательным моментом. При этом впервые были вычислены угол отклонения для вращающейся гравитационной линзы с распределением темной материи по Наварро-Френку-Уайту, а также угол отклонения для заряженной гравитационной линзы с распределением барионной материи по Идлису.

Анализ показывает, что найденный нами угол отклонения луча света в поле Лензе-Тирринга полностью совпадает с ранее полученными результатами [9]. Что касается результата по нахождению угла отклонения света в поле Рейсснера-Нордстрема, то его сравнение с вычислениями других авторов [9] показывает, что они лишь численным коэффициентом отличаются друг от друга.

References

- 1 Blokh P.V., Minakov A.A. Gravitatsionnyye linzy. – Kiyev, Naukova dumka. 1989. – 240 s.
- 2 Zakharov A.F., Sazhin M.V. Gravitatsionnoyemikrolinzirovaniye. // UFN, 1998. – Т 168. – P. 1041-1082.
- 3 Melchiori P., Sutter P. M., Sheldon E. S., Krause E., Wandelt B. D. First measurement of gravitational lensing by cosmic voids in SDSS. // arXiv:1309.2045v1 [astro-ph.CO]
- 4 Navarro J.F., Frenk C.S., White S.D.M. The Structure of Cold Dark Matter Halos. // arXiv: astro-ph / 9508025, 7 Aug. 1995; Herritt D., Navarro J.E., Ludlow A., Jenkins A. Universal Density Profile for Dark and Luminous Matter. // arXiv: 0502515 V1 [astro-ph] 24 Feb. 2005.
- 5 Kardashev N. S. Fenomenologicheskaya model' yadra Galaktiki // V kn. Itogi nauki i tekhniki. Seriya "Astronomiya". – 1983. – Т. 24.
- 6 Drude P. Optika. L.-M.: Gostekhizdat, 1935. 254 s.
- 7 Brumberg V.A. Relyativistskaya nebesnaya mekhanika. – M.: Nauka, 1972. – 382 s
- 8 www.astronet.ru
- 9 Ivanitskaya O.S. Lorentsev bazis i gravitatsionnyye efekty v eynshteynovoy teorii tyagoteniya. – Minsk: Nauka i Tekhnika, 1979. – 334 s.
- 10 www.astrolab.ru
- 11 Chechin L.M., Avkhunbayeva G.M. Dvukhkomponentnaya gravitatsionnaya linza // Izvestiya Vuzov. – 2013, №2. – S. 30-35 .
- 12 Chechin L.M., Avkhunbayeva G.M., Aymuratov Ye.K., Umiraliyeva A.ZH. Otkloneniye luchey sveta v galo temnoy materii galaktik // Izvestiya VUZov. Fizika, 2012. – №6.

Авторы выражают искреннюю благодарность члену-корреспонденту НАН РК, д.ф.-м.н., профессору Л.М. Чечину за постановку задачи и консультации по данной работе.