

УДК 524.882

А.Б. Алтайбаева

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Республика Казахстан, г. Астана  
E-mail: aziza.bibol@mail.ru

### Геометротермодинамика нейтральных черных колец: большого и малого

В настоящей работе изучается геометрия черного кольца в двух случаях: при малом или большом. С помощью инвариантности преобразование Лежандра показано, что, можно восстановить геометрическим способом фазовые переходы от черной дырой к черным кольцам в самостоятельной последовательности. Помимо области устойчивости черных колец показали, что существуют многие особые точки соответствующей метрики как полюсы скаляра Риччи. Это означает, что фазовый переход из черной дыры в черное кольцо не является уникальным и может быть скопирована несколько раз, если мы исследуем геометрию системы смеси за пределы интервала стабильности.

**Ключевые слова:** черные дыры, черные кольца, большое черное кольцо, малое черное кольцо, скаляр Риччи, метрика Гессе.

A.B. Altaibayeva

### Geometrothermodynamics of neutral black ring: large and small

In this paper we study geometry of black ring in two cases of small or large. By using a Legendre invariant transformation we show that how we are able to recover the phase transitions between black hole to black ring in a self consistent geometrical way. Beyond the stability region of black ring we show that many singular points exist as the poles of Ricci scalar of the correspondent metric. It indicates that the phase transition from black hole to black ring is not unique and can be copied several times if we investigate the geometry of the mix system beyond the stability interval.

**Keywords:** black holes, black rings, large black ring, small black ring, Ricci scalar, metric Hesse.

А.Б. Алтайбаева

### Нейтрал қара сақиналардың геометротермодинамикасы: үлкен және кіші сақиналар

Аталған жұмыста үлкен және кіші жағдайындағы нейтрал қара сақиналардың геометротермодинамикасы зерттеледі. Лежандр түрлендіруінің инварианттылығы көмегімен өзбетіншелік бірізділікпен қара құрдымнан қара сақиналарға өтетін фазалық өтпелерді геометриялық үрдіспен қалпына келтіру мүмкіндігі дәлелденген. Риччи скалярының метрикасына сәйкес келетін қара сақиналардың орнықтылық аймағынан басқа да көптеген айрықша нүктелерінің бар екендігі көрсетілген. Бұл қара құрдымнан қара сақиналарға өтетін фазалық өтпелер бірегей емес екендігін білдіреді. Сонымен қатар, егер де біз тұрақтылық интервалынан тысқары жүйе қоспарларының геометриясын зерттейтін болсақ, онда ол бірнеше рет көшілуі мүмкін.

**Түйін сөздер:** қара құрдымдар, қара сақиналар, үлкен қара сақина, кіші қара сақина, Риччи скаляры, Гессе метрикасы.

#### 1. Геометрия нейтральных черных колец

Черное кольцо является точным решением из пяти одномерных уравнений поля Эйнштейна [1]:

$$R_{MN} - \frac{1}{2} R g_{MN} = 0, \quad M, N = 0 \dots 4. \quad (1)$$

Это решение является естественным продолжением вращающегося решения черной

дыры Майера и Перри (МП) [2], так как является также асимптотически плоским и содержит две черные дыры с такими параметрами, как масса  $M$  и угловой момент  $J$ . Оно отличается от решения вращающегося черной дыры Керра в пяти измерениях тем, что имеет нетривиальную топологию горизонта  $S^2 \times S^1$ . Таким образом заслуживает того, чтобы сохранить как точное решение теоремы единственности черной дыры, которое она нарушает [3], и утверждает, что любое

асимптотически плоское решение уравнений гравитационного поля в вакууме должна быть асимптотически плоским и описываться решением Керра только с одним внутренним угловым моментом  $J$ . Также топология должна быть в общем виде  $S^{d-2}$ , где  $d$  указывает размерность пространства-времени. Но

$$ds^2 = -\frac{F(x)}{F(y)}(dt + R\sqrt{\lambda v}(1+y)d\psi)^2 + \frac{R^2}{(x-y)^2} \left[ -F(x) \left( G(y)d\psi^2 + \frac{F(y)}{G(y)}dy^2 \right) + F^2(y) \left( \frac{dx^2}{G(x)} + \frac{G(x)}{F(x)}d\phi^2 \right) \right], \quad (2)$$

Здесь функция метрики:

$$F(\xi) = 1 - \lambda\xi, \quad G(\xi) = (1 - \xi^2)(1 - v\xi). \quad (3)$$

Она представляет собой черное кольцо (дыру) в системе координат кольца  $(t, x, y,$

решение черного кольца имеет более двух угловых моментов, и если перейти к более высоким измерениям можно иметь больше возможности с угловыми моментами. Оно имеет представление двух параметров обеих черных дыр и метрика черного кольца будет иметь следующий вид:

$\psi, \phi)$ . Параметр  $R$  означает радиус кольца и два параметра  $\lambda, v$  являются не независимыми:

$$\begin{cases} \lambda = 1, & \text{(Черная Дыра (ЧД)),} \\ \lambda = \frac{2v}{1+v^2}, & \text{(Черное Кольцо (ЧК)).} \end{cases} \quad (4)$$

Поскольку пространство-время является асимптотически плоским, это является достаточным для определения массы ADM, углового

момента ZAMO, площади горизонта и температуру [4]:

$$\begin{cases} A = 8\pi^2 R^3 \frac{\sqrt{\lambda}(1+\lambda)(\lambda-v)^{3/2}}{(1+v)^2(1-v)}, & M = \frac{3\pi R^2}{4G} \frac{\lambda(\lambda+1)}{v+1}, \\ T = \frac{1}{4\pi R} \frac{1-v}{\sqrt{\lambda(\lambda-v)}}, & J = \frac{\pi R^3}{2G} \frac{\sqrt{\lambda v}(1+\lambda)^{5/2}}{(1+v)^2}. \\ \Omega = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{v}{\lambda(1+\lambda)}}. \end{cases} \quad (5)$$

Отметим здесь, что  $0 < v < 1$  безразмерный параметр. Также, когда мы ограничимся геометрией ЧД,  $v=0$  является геометрией статической (не стационарной) черной дыры. Случай экстремальной черной дыры получаем при  $v=1$ . Фактически, мы в состоянии подобрать геометрию плавных двух колец по  $v = \frac{1}{2}$ . Случай с  $v=0$  означает, что кольцо очень большое и очень тонкое и как мы догадываемся, угловой момент для этого случая переходит в бесконечность. Геометрия состоит из двух колец, один с  $0 < v < \frac{1}{2}$  и

второй с  $\frac{1}{2} < v < 1$ . Узловые условия гарантированы тем, чтобы мы могли удовлетворять заданному двум геометрию и полученному черному кольцу, который имеет минимальный угловой момент. Термодинамические параметры удовлетворяют следующую широко известную формулу Смарра:

$$M = \frac{3}{2} \left( \frac{TA}{4G} + \Omega J \right) \quad (6)$$

Это может быть первым шагом к построению первого закона термодинамики, а

также других термодинамических функций. Чтобы быть более точным о различных типах черных колец, мы определяем безразмерный нормализованной угловой момент на единицу массы в следующем виде:

$$j^2 : \frac{J^2}{M^3}.$$

Мы можем показать, что стационарное решение черной дыры совпадает для ряда параметров, как

$$\text{Черная дыра: } 0 \leq j < 1,$$

здесь  $j = 1$  обозначает экстремальный случай и является также сингулярной. Ключевой нотой является лучшее понимание природу геометрии черного кольца в том, что мы можем иметь два стационарных решения (несмотря на ЧД Керра в четырех измерениях), если общая угловая плотность импульса может быть больше, чем значение  $j_{Min}$  :

$$j_{Min} = \sqrt{\frac{27}{32}} \approx 0.919.$$

Таким образом, мы группируем эти два типа, как:

$$\begin{cases} \text{Большое Черное - Кольцо :} & j_{Min} \leq j < \infty, \\ \text{Малое Черное - Кольцо :} & j_{Min} \leq j < 1. \end{cases}$$

Фазовый переход существует между ЧД и ЧК, это соответствует  $j:0.942$ . В этот момент, если мы вычисляем энтропию большого черного кольца, мы находим, что оно

$$\begin{cases} \text{Большое Черное Кольцо (БЧК):} & v_L = \sqrt{8}j(\cos \theta/\sqrt{3} - \sin \theta) - 1, \\ \text{Малое Черное Кольцо (МЧК):} & v_S = \sqrt{8}j(\cos \theta/\sqrt{3} + \sin \theta) - 1. \end{cases}$$

Здесь  $\theta$  явно написано в следующем виде:

$$\tan(3\theta) = \sqrt{\frac{32}{27}j^2 - 1} \quad (10)$$

$$g_{БЧК} = \frac{2}{7} \frac{(40j^2 - 21)\mu^3 \pi^4}{G^2(8j^2 - 7)^2} dj^2 + \frac{3}{64} \frac{(40j^2 - 21)\mu^3 \pi}{G^2} d\mu^2 \quad (11)$$

превышает энтропию черной дыры. Также  $S_{j \rightarrow 1}^{BR} : 0$  является прямым сигналом для существования ЧД  $\rightarrow$  ЧК фазового перехода.

Полные термодинамические и местные стабильности этих черных колец были изучены подробно в литературе [5]. Также были подробно изучены метрика Рапейнера и Гессе.

## 2. Метрика ГТД и ее особенности

Для изучения геометрии термодинамики ЧК нам нужна основная функциональная форма, как  $M=M(S,j)$ . Она также может быть заменена другой эквивалентной формой, как  $S=S(M,j)$ ,  $j=j(M,S)$ . Первый значительный случай, когда мы работаем с  $S, M$  представлением. Итак, первым шагом является как написать такое уравнение. Как уже упоминалось в [5], такое уравнение записывается в виде функции двух новых уменьшенных параметров  $j, \mu = \frac{8G}{3\pi} M$ , первый является интенсивным, а второй обширным:

$$S = \frac{\sqrt{2}\pi^2}{4G} \mu^{3/2} \sqrt{v(1-v)}, \quad (7)$$

$$T = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1-v}{\mu v}}, \quad (8)$$

$$\Omega = \sqrt{\frac{2v}{\mu(1+v)}}. \quad (9)$$

К сожалению, параметр  $v = v(j)$  имеет два явные сложные выражения:

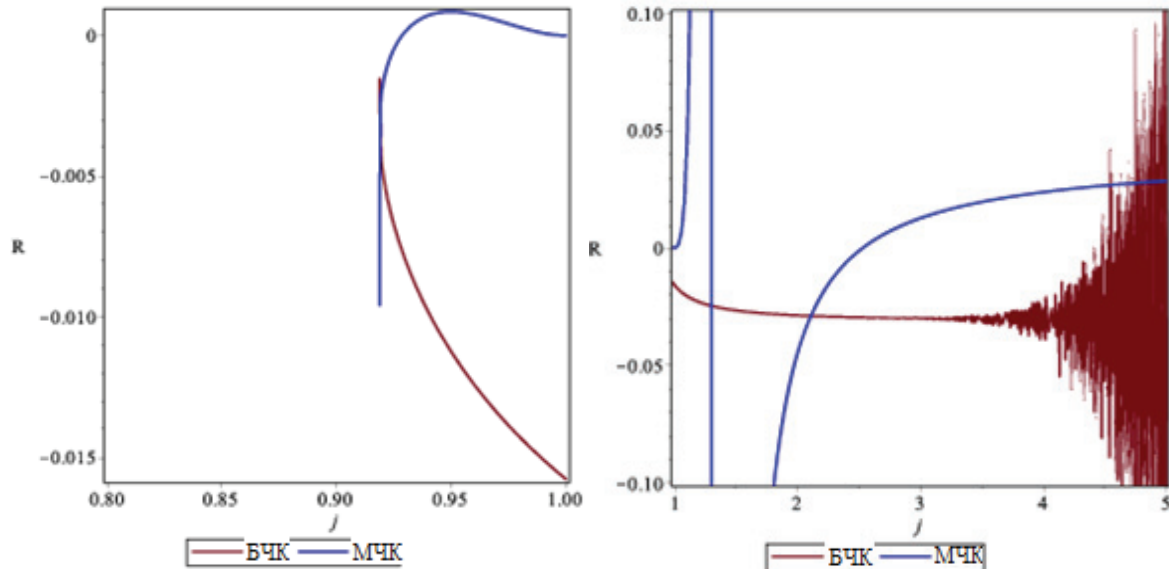
Нижний предел Керра  $j$  идет отсюда.

Метрика с  $\Phi = S$  и  $E^a = \{\mu, J\}$  записывается в виде:  
для большого ЧК

и для малого ЧК:

$$g_{\text{МЧК}} = \frac{2}{7} \frac{(40j^2 - 21)\mu^3 \pi^4}{G^2(8j^2 - 7)^2} dj^2 - \frac{3}{64} \frac{(40j^2 - 21)\mu^3 \pi}{G^2} d\mu^2 \quad (12)$$

Мы вычислили метрику скаляра Риччи, представленные на графике рисунка 1.



**Рисунок 1** – Метрика ГТД в представлении энтропии: скаляр Риччи в приведенной массе для  $j \in [0, 1]$ .

Заметим, что существует точка бифуркации в  $j^* \in [0.90, 0.95]$  (слева).

Скаляр Риччи вне фазовой области для  $j \in [1, \infty]$ .

Это показывает существование более критических точек, следовательно, больше фазовые переходы вне классическом режиме сосуществования ЧД, ЧК (справа)

Можно отметить, что метрика Гессе с  $\Phi = M$  (метрика Вайнхолда) для этого случая изогнута, но анализ его скаляра кривизны не дает дополнительную информацию о точках фазового перехода. Кроме того, для  $\Pi = S$  (метрика Раппейнера) плоская.

Черные объекты в пяти мерной эйнштейновской гравитации имеют точное решение с точки зрения черного кольца-черной дыры. Также наблюдался фазовый переход в двух режимах пониженного углового момента, особенно за стабильностью, когда как другие предыдущие методы не изучали фазовый переход.

### 3. Выводы

Черные объекты в пяти мерной эйнштейновской гравитации имеют точное решение с точки зрения черного кольца-черной дыры. Топология обычных асимптотических черных

дыр в четырех измерениях изменена на нетривиальную кольцевую топологию. Он указал, что уникальность черных дыр не действует так долго в более высоких измерениях. Мотивируя изучение геометрии термодинамических черных объектов в этой статье, изучалась инвариантность Лежандра геометрии черного кольца и метрика в представлении энтропии. Метрика имеет некоторые особенности кривизны. Эти особенности указывают на фазовый переход между черной дырой и черным кольцом. Также наблюдался фазовый переход в двух режимах пониженного углового момента, особенно за стабильностью, когда как другие предыдущие методы не изучали фазовый переход. Показана, как ГТД предсказывает фазовые переходы в качестве дополнительных переходов. Работа представила некоторые новые функции в термодинамике черного кольца с использованием геометрических показателей.

---

**References**

- 1 Emparan R. and Reall H. S., A rotating black ring in five dimensions // Physical Review Letters. – 2002. – Vol. 88. – № 10. – DOI: 10.1103/PhysRevLett.88.101101.
- 2 Myers R. C. and Perry M. J., Black Holes In Higher Dimensional Space-Times // Annals of Physics. – 1986. – Vol. 172. – № 2. – P. 304–347.
- 3 Emparan R., Rotating circular strings, and infinite non-uniqueness of black rings // Journal High Energy Physics. – 2004. – Vol. 2004. – DOI:10.1088/1126-6708/2004/03/064.
- 4 Elvang H. and Emparan R., Black rings, supertubes and a stringy resolution of black hole non-uniqueness // Journal High Energy Physics. – 2003. – Vol. 2003. – DOI: 10.1088/1126-6708/2003/11/035.
- 5 Arcioni G. and Lozano-Tellechea E., Stability and critical phenomena of black holes and black rings // Physical Review D. -2005. – Vol.72. -№10. – DOI: 10.1103/PhysRevD.72.104021