

УДК 524.1; 52-1/-8:530.12; 524.8

Е.С. Алдабергенов, В.Д. Джунушалиев*

Казахский национальный университет имени аль-Фараби,
НИИ экспериментальной и теоретической физики, Казахстан, г. Алматы

*E-mail: v.dzhunushaliev@gmail.com

Монопольные решения в классической $SU(3)$ калибровочной теории

Рассматриваются монопольные решения в неабелевой $SU(3)$ калибровочной теории Янга-Миллса-Хиггса. Используя сферически симметричный анзац для $SU(3)$ калибровочного и хиггсовского поля, получены уравнения Янга-Миллса-Хиггса, а также уравнения Богомольного. Показано, что в данном статическом случае уравнения Янга-Миллса-Хиггса следуют из уравнений Богомольного. Система дифференциальных уравнений Богомольного, состоящая из четырех уравнений первого порядка, была преобразована в систему, состоящую из двух алгебраических и двух дифференциальных уравнений второго порядка. Путем разложения в ряд Тейлора получены приближенные аналитические решения в центре монополя. Также исследовано асимптотическое поведение монопольных решений. Полное решение получено в численном виде. Показано, что данные монопольные решения зависят от двух параметров. Получена зависимость энергии $SU(3)$ монополя от этих параметров. На плоскости параметров, определяющих монопольные решения, получена кривая, разделяющая регулярные и сингулярные решения.

Ключевые слова: магнитные монополи, регулярные решения, $SU(3)$ калибровочная теория, уравнения Богомольного.

Е.С. Алдабергенов, В.Д. Джунушалиев

**Классикалық $SU(3)$ калибровтық теориясындағы
монополиялық шешімдер**

Абельді емес $SU(3)$ Янг-Миллс-Хиггс калибровтық теориясындағы монополиялық шешімдер қарастырылды. $SU(3)$ калибровтық және Хиггс өрістері үшін сферикалық симметриялы анзацты қолдана отырып Янг-Миллс-Хиггс теңдеулері алынды, сонымен қатар Богомольді теңдеулері алынды. Осы статистикалық жағдайда Янг-Миллс-Хиггс теңдеулері Богомольді теңдеулерінен шығатындығы көрсетілді. Төрт бірінші ретті теңдеуден тұратын Богомольді теңдеулер жүйесі екі алгебралық және екі дифференциалдық теңдеуден тұратын жүйеге айналдырылды. Тейлор қатарына жіктеу арқылы монополиялық орталығында жуық аналитикалық шешімдер алынды. Сонымен қатар, монополиялық шешімдердің асимптотикалық тәлімі зерттелді. Толық шешім санды түрде табылды. Осы монополиялық шешімдер екі параметрге тәуелді екендігі көрсетілді. $SU(3)$ монополиясының осы параметрлерге тәуелділігі табылды. Параметрлер жазықтығында регулярлы және сингулярлы шешімдерді бөлетін қисық сызық алынды.

Түйін сөздер: магнитық монополия, регулярлы шешімдер, $SU(3)$ калибровтық теория, Богомольді теңдеулері.

Y. Aldabergenov, V. Dzhunushaliev

Monopole solutions in classical $SU(3)$ gauge theory

We consider monopole solutions in nonabelian $SU(3)$ Yang – Mills – Higgs gauge theory. Using spherically symmetric ansatz for $SU(3)$ gauge and scalar fields, we obtain Yang – Mills – Higgs equations as well as Bogomol’nyi equations. We show that statically Yang – Mills – Higgs equations follow from Bogomol’nyi equations.

Bogomol'nyi equation system comprising four first-order differential equations was transformed into the system consisting of two second-order differential equations, and two algebraic equations. By Taylor-expanding equations, we obtain approximate analytical solutions at the centre of the monopole. We also consider asymptotic behavior of the monopole solutions. Complete solution is obtained numerically. We show that the monopole solutions depend on two parameters, and we obtain the dependence of the energy of the monopole on these parameters. On the parameters plane we obtain a curve that separates regular and singular solutions.

Key words: magnetic monopole, regular solutions, $SU(3)$ gauge theory, Bogomol'nyi equations.

Введение

В 1931 году Дирак показал, что существование магнитных монополей не противоречит уравнениям классической электродинамики [1]. Также их существование приводит к квантованию электрического заряда и делает уравнения Максвелла симметричными по отношению к замене электрического поля на магнитное. К сожалению, монополь Дирака является сингулярным. Эта проблема была решена Г. 'т Хоофтом и А.М. Поляковым в 1974 году, после того, как они независимо нашли решения уравнений в $SU(2)$ калибровочной теории Янга-Миллса-Хиггса, соответствующие магнитному монополю с конечной энергией [2], [3]. Более того, они показали, что существование магнитных монополей является обязательным в единичных полевых теориях, нарушающихся до компактной калибровочной группы $U(1)$. С тех

пор были найдены различные монопольные решения (обладающие как сферической [4], [5], так и другими видами симметрий [6], [7]), в том числе и для суперсимметричных теорий Янга-Миллса [5], [8]. В статье [7] показано, что существуют решения в виде пар монополь-антимонполь, а также цепочек таких пар. Найдены решения, соответствующие $SU(2)$ монополю с полузарядом, который может сосуществовать с монополем 'т Хоофта-Полякова [9], [10]. В данной работе целью является получение и исследование в численном виде монопольных решений в классической $SU(3)$ теории Янга-Миллса-Хиггса.

Уравнения Янга-Миллса-Хиггса

Лагранжиан теории Янга-Миллса с учетом скалярного, хиггсовского, поля [11], [12] имеет следующий вид:

$$L = -\frac{1}{4}F^{a\mu\nu}F_{\mu\nu}^a + \frac{1}{2}(D^\mu\Phi)^a(D_\mu\Phi)^a - \frac{\lambda}{4}(\Phi^a\Phi^a - v^2)^2, \quad (1)$$

где $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c$ – тензор напряженности поля Янга-Миллса, A_μ^a – калибровочное поле, $D_\mu = \partial_\mu + gf^{abc}A_\mu^b$ – ковариантная производная, g – константа взаимодействия, f^{abc} – структурные константы. Третье же слагаемое в лагранжиане – потенциал хиггсовского поля Φ , где

λ – безразмерный параметр, v – параметр с размерностью массы (в единицах $c = \hbar = 1$); $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$; Для группы $SU(3)$ $a = 1 \dots 8$. Соответственно хиггсовские поля образуют октет Φ^a . В присутствии скалярного поля в уравнениях Янга-Миллса появляется источник:

$$(D^\mu F_{\mu\nu})^a = J_\nu^a = gf^{abc}\Phi^b(D_\nu\Phi)^c. \quad (2)$$

Вместе с уравнениями скалярного поля,

$$(D_\mu D^\mu\Phi)^a = -\lambda\Phi^a(\Phi^b\Phi^b - v^2), \quad (3)$$

они образуют систему уравнений Янга-Миллса-Хиггса.

Сферически симметричный анзац для $SU(3)$ системы Янга-Миллса-Хиггса в калибровке $A_0^a = 0$ будет иметь форму [13], [14]

$$A_i^a = (\lambda_{ij}^a - \lambda_{ji}^a) \frac{x^j}{ir^2} (f(r) - 1) + \lambda_{jk}^a (\varepsilon_{ilk} x^k + \varepsilon_{ilk} x^j) \frac{x^j}{r^3} v(r), \quad (4)$$

$$\Phi = \frac{2\varphi(r)}{ir^2} (\lambda^2 x - \lambda^5 y + \lambda^7 z) + \frac{1}{2} \lambda^a (\lambda_{ij}^a + \lambda_{ji}^a) \frac{x^i x^j}{r^2} \omega(r), \quad (5)$$

где $i, j, k = 1, 2, 3$; x^i, x^j – сферические координаты, x, y, z – декартовы координаты, r – радиус, $f(r), v(r), \varphi(r), \omega(r)$ – радиальные функции. $\Phi = \lambda^a \Phi^a$, где λ^a – матрицы Гелл-

Манна, λ_{ij}^a – элементы этих матриц. Подставляя анзац (4), (5) в уравнения (2) и (3), мы получаем уравнения Янга-Миллса в явном виде в сферической системе координат:

$$\begin{aligned} r^2 f'' &= f^3 - f + 7fv^2 - 2v\omega\varphi + f(\omega^2 + \varphi^2), \\ r^2 v'' &= v^3 - v + 7vf^2 - 2f\omega\varphi + v(\omega^2 + \varphi^2), \\ r^2 \omega'' &= 6\omega(f^2 + v^2) - 12fv\varphi, \\ r^2 \varphi'' &= 2\varphi(f^2 + v^2) - 4fv\omega, \end{aligned} \quad (6)$$

где штрихом обозначается производная по радиусу r .

Уравнения Богомольного

Решения мы ищем в статическом виде ($\partial_0 A_\mu^a = \partial_0 \Phi^a = 0$) с учетом выбранной калибровки, $A_0^a = 0$. В этом случае энергия определяется следующим образом [11]:

$$\begin{aligned} E &= \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} [(D_i \Phi^a)^2 + \frac{1}{2} (F_{ij}^a)^2] + V(\Phi) \right\} \\ &= \int d^3x \left\{ \frac{1}{4} [F_{ij}^a \mp \varepsilon_{ijk} D^k \Phi^a]^2 \pm \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} F_{ij}^a D_k \Phi^a + V(\Phi) \right\}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $V(\Phi)$ – потенциал Хиггса. Условия, при которых функционал энергии (7) имеет минимум, имеют следующий вид

$$F_{ij}^a = \pm \varepsilon_{ijk} D^k \Phi^a, \quad F_{0j}^a = 0. \quad (8)$$

Энергии при этом (в пределе БПС, $\lambda \rightarrow 0$ [4][11]) равна

$$E_{min} = \pm \int d^3x \left(\frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} F_{ij}^a D_k \Phi^a \right). \quad (9)$$

Подставляя анзац (4) и (5) в уравнения (8), получаем уравнения Богомольного:

$$\begin{aligned} r\varphi' &= 2f^2 + 2v^2 + \varphi - 2, \\ r\omega' &= \omega + 12fv, \\ 2rf' &= f\varphi + v\omega, \\ 2rv' &= v\varphi + f\omega. \end{aligned} \quad (10)$$

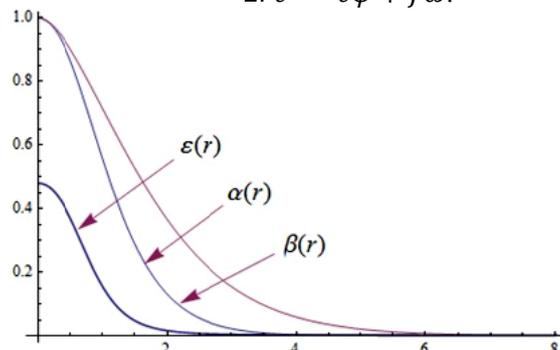


Рисунок 1 – Решения уравнений (13) в численном виде (α, β) и плотность энергии $\varepsilon(r)$ монополя

Легко показать, что из уравнений Богомольного следуют уравнения Янга-Миллса-Хиггса, однако, обратное неверно.

Уравнения (10) можно привести к двум дифференциальным и двум алгебраическим уравнениям заменой:

$$\begin{aligned} f + v &= \alpha, \\ f - v &= \beta. \end{aligned} \quad (11)$$

В итоге исходные функции f, v, φ, ω выражаются через α и β следующим образом:

$$\begin{aligned} f &= \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad v = \frac{\alpha - \beta}{2}, \\ \varphi &= -\frac{r}{2} \left(\frac{\alpha'}{\alpha} + \frac{\beta'}{\beta} \right), \quad \omega = \frac{r}{2} \left(\frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{\beta'}{\beta} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Таким образом, уравнения (10) переходят в следующую систему дифференциальных уравнений второго порядка для функций α и β :

$$\begin{aligned} r^2 \left(\frac{\alpha'}{\alpha} \right)' &= 2\alpha^2 - \beta^2 - 1, \\ r^2 \left(\frac{\beta'}{\beta} \right)' &= 2\beta^2 - \alpha^2 - 1. \end{aligned} \quad (13)$$

Численное решение

Решение уравнений (13) в начале координат ищем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 + \alpha_0' r + \alpha_0'' \frac{r^2}{2} + \alpha_0^{(3)} \frac{r^3}{6} + \dots \\ \beta &= \beta_0 + \beta_0' r + \beta_0'' \frac{r^2}{2} + \beta_0^{(3)} \frac{r^3}{6} + \dots \end{aligned} \quad (14)$$

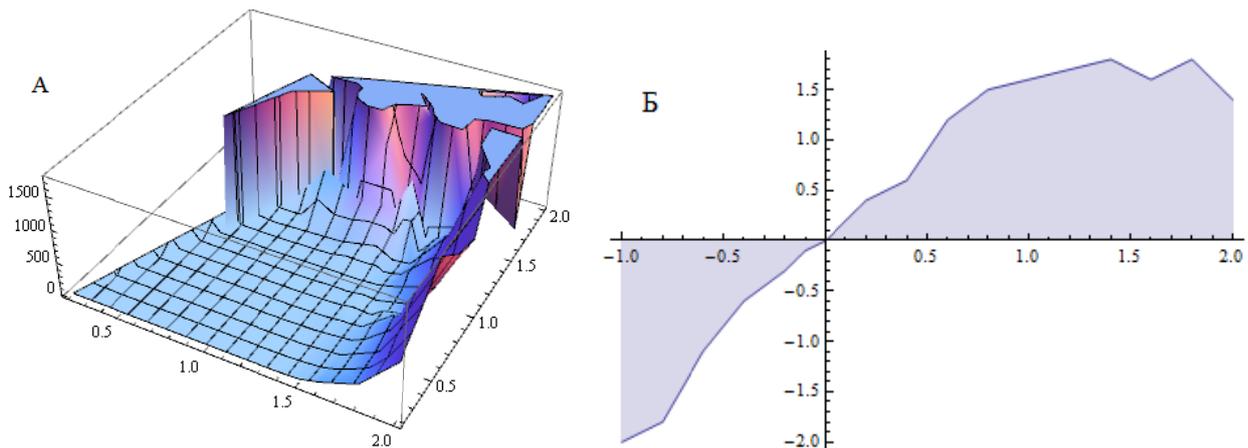


Рисунок 2 – А. Зависимость энергии монополя от α_0'' и $\alpha_0^{(3)}$. Б. Плоскость α_0'' , $\alpha_0^{(3)}$, где кривая разделяет решения с конечной энергией (закрашенная область) от сингулярных решений

После подстановки (14) в уравнения Богомольного (13) получаем

$$\alpha_0 = \pm \beta_0, \quad \beta_0 = \pm 1, \quad \alpha_0'' = \pm \beta_0'', \quad \alpha_0^{(3)} = \mp \beta_0^{(3)}. \quad (15)$$

Это означает, что существует два независимых параметра: α_0'' и $\alpha_0^{(3)}$. Используя уравнения (15) и взяв $\alpha_0 = \beta_0 = 1$ и $\alpha_0'' =$

$\alpha_0^{(3)} = 1$, мы получаем регулярное решение, представленное на рисунке 1 (α и β). При $r \rightarrow \infty$, функции α и β принимают вид:

$$\begin{aligned} \alpha &\approx A_1 r e^{A_2 r}, \\ \beta &\approx B_1 r e^{B_2 r}, \end{aligned} \tag{16}$$

где A_1, A_2, B_1, B_2 – произвольные константы.

Также, в соответствии с решением получена плотность энергии монополя (рисунок 1, кривая $\varepsilon(r)$). Варьируя α_0'' и $\alpha_0^{(3)}$, мы получаем решения с различными энергиями. Соответственно, мы можем построить трехмерный график энергии монополя как функции от α_0'' и $\alpha_0^{(3)}$, как показано на рисунке 2А. Вертикальная ось представляет собой энергию монополя, в то время как горизонтальная плоскость – α_0'' и $\alpha_0^{(3)}$. Как видно из графика, решения с конечной энергией заключены в определенной области на плоскости α_0'' , $\alpha_0^{(3)}$. Эта плоскость изображена на рисунке 2Б, где кривая отделяет решения с

конечной энергией (закрашенная область) от сингулярных решений. Стоит отметить, что графики на рисунках 3 и 4 построены в соответствии с приближенными вычислениями.

Заключение

В численном виде получены монополярные решения в классической $SU(3)$ калибровочной теории Янга-Миллса-Хиггса в пределе БПС. Показано, что существуют как регулярные, так и сингулярные решения. Построен трехмерный график зависимости энергии $SU(3)$ монополя от параметров α_0'' и $\alpha_0^{(3)}$, определяющих его. На плоскости α_0'' , $\alpha_0^{(3)}$ построена кривая, разделяющая области регулярности и сингулярности.

References

- 1 Dirac P. Quantised singularities in the electromagnetic field // Proc. Roy. Soc. (London). – 1931. – Vol. A133. – P. 60.
- 2 't Hooft, G. Magnetic monopoles in unified gauge theories // Nuclear Physics B. – 1974. – Vol. 79. – P. 276-284.
- 3 Polyakov A.M. Spektr chastits v kvantovoi teorii polya // Pis'ma v ZhETF. – 1974. – Vol. 20. - № 6. – P. 430-433.
- 4 Prasad M.K., Sommerfield C.M. // Phys. Rev. Lett. – 1975. – 35. – С. 760; Bogomol'nyi Ye.B. // Yadernaya Fizika. – 1976. – Vol. 24. – P. 449.
- 5 Lee Ki-Myeong, Weinberg E.J., Yi Piljin. Electromagnetic duality and $SU(3)$ monopoles. Phys.Lett. – 1996. – Vol. B376. – P. 97-102.
- 6 Rosy Teh, Khai-Ming Wong. // J. Math. Phys. – 2005. – Vol. 46. – P. 082301; Int. J.Mod. Phys. – 2005. – Vol. A20. – P. 4291.
- 7 Kleihaus B., Kunz, J. Shnir, Y. Monopole-Antimonopole Chains and Vortex Rings // arXiv:hep-th/0405169. – 2004.
- 8 Sethi S., Stern S., Zaslav E. // Nucl. Phys. – 1995. – Vol. B457. – P. 484; Gauntlett, J.P., Harvey, J. S-Duality and the Dyon Spectrum in $N=2$ Super Yang-Mills Theory. // arXiv:hep-th/9508156. – 1995.
- 9 Rosy Teh, Ban-Loong Ng, Khai-Ming Wong. Electrically Charged One and a Half Monopole Solution // arXiv:hep-th/1312.6483. – 2013.
- 10 Rosy Teh, Ban-Loong Ng, Khai-Ming Wong. The one and a half monopoles solution of the $SU(2)$ Yang-Mills-Higgs field theory // Annals of Physics – 2014. – Vol. 343. – P. 1-15.
- 11 Sardanashvili, G.A. Sovremennyye metody teorii polya. 1. Geometriya i klassicheskiye polya. – 2nd edition. – М.: URSS, 2011.
- 12 Gal'tsov, D.V., Grats, Yu.V., Zhukovskii, V.Ch. klassicheskiye polya. – М.: MGU, 1991.
- 13 Horvath, Z., Palla, L. Dyons in classical $SU(3)$ gauge theory and a new topologically conserved quantity // Phys. Rev. – 1976. – Vol. D14. – P. 1711.
- 14 Baltsov, D.V., Volkov, M.S. Phys.Lett. – 1990. – Vol. B274. – P. 173.
- 15 Irwin, P. $SU(3)$ monopoles and their fields // Phys.Rev. – 1997. – Vol. D56. – С. 5200-5208.
- 16 Dzhunushaliev, V.D., Singleton, D. Confining solutions of $SU(3)$ Yang-Mills theory. // arXiv:hep-th/9902076. – 1999.
- 17 Shnir, Y. Magnetic monopoles. – Springer-Verlag, Berlin, 2005 (ISBN 3540252770).