

УДК 517.946:576.3(083.3)

²Г.Н. Шайхова, ¹А.А. Алибек, ²Д.Н. Талипова*¹Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Казахстан, г. Алматы²Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Казахстан, г. Астана

*E-mail: d.talipova1729@gmail.com

Построение солитонов уравнения Кадомцева-Петвиашвили

Уравнение Кадомцева-Петвиашвили описывает развитие волн на мелкой воде, ионно-акустические волны, длинные волны в сдвиговых потоках и множество других ситуаций. Модели такого типа уравнения описывают взаимодействия между различными уединенными волнами и актуальны в ряде задач гидродинамики, физики твердого тела, физики плазмы и т.д.

Среди известных решений этого уравнения – не расплывающиеся вихри или солитоны-вихри (вихревым является течение среды, при котором ее частицы имеют угловую скорость вращения относительно некоторой оси). Солитоны такого рода, найденные теоретически и смоделированные в лаборатории, могут самопроизвольно возникать в атмосферах планет. По своим свойствам и условиям существования солитон-вихрь подобен замечательной особенности атмосферы Юпитера – Большому Красному Пятну.

В данной статье исследовано уравнение Кадомцева-Петвиашвили, которое, в свою очередь, является многомерным солитоном. При помощи метода Хирота были построены односолитонное, двухсолитонное, трехсолитонное, четырехсолитонное решения уравнения Кадомцева-Петвиашвили. Показаны графики солитонных решений при различных параметрах времени.

Данная научная статья изложена на 9 страницах, содержит 6 пунктов. В настоящей работе также представлены 7 графиков, построенных в программном пакете Maple 17.

Ключевые слова: уравнение Кадомцева-Петвиашвили, метод Хирота, солитонные решения.

Г.Н. Шайхова, А.А. Алибек, Д.Н. Талипова

Кадомцев-Петвиашвили солитондар теңдеуінің құрастырылуы

Кадомцев-Петвиашвили теңдеуі сұйық судағы толқынның, ионды-акустикалық толқындарының, қозғалған тасқындардың ұзын толқындарының дамуын зерттейді. Бұл теңдеудің үлгілері түрлі оңаша толқындардың әрекеттестігін суреттейді.

Осы теңдеудің белгілі шешімдерінің арасынан 2 түрі кездеседі, олар: қозғалмайтын алай-дүлей немесе солитон-алай-дүлей. Теория жүзінде табылған және де зертханада қалыптасқан солитон үлгілері ғаламшарлардың атмосфераларында пайда болуы мүмкін. Өзінің сипаттарымен және тіршіліктің шарттарымен солитон-алай-дүлей Юпитер атмосферасының керемет өзгешелігіне – Үлкен Қызыл Даққа ұқсас.

Көп өлшемді болып табылатын Кадомцев-Петвиашвилидің теңдеуі зерттелді. Хирота әдісі арқылы Кадомцев-Петвиашвилидің теңдеуі үшін бір солитонды, екі солитонды, үш солитонды, төрт солитонды шешімдер құрастырылды. Әртүрлі уақыт параметрлері үшін солитон теңдеулерінің графиктері көрсетілді.

Айтылмыш ғылыми мақала 9 бетте баяндалып, 6 пунктты құрайды. Осы жұмыста Maple 17 бағдарламалық пакетінде салынған 7 кесте ұсынылып тұр.

Түйін сөздер: Кадомцев-Петвиашвилидің теңдеуі, Хирота әдісі, солитонды шешімдер.

G.N. Shaikhova, A.A. Alibek, D.N. Talipova

Construction of solitons of the Kadomtsev-Petviashvili equation

Kadomtsev-Petviashvili equation describes the evolution of waves in shallow water, ion-acoustic waves, long waves in shear flows, and many other situations. This type of model equations describe the interaction between solitary waves and relevant in a number of problems in hydrodynamics, solid state physics, plasma physics, etc.

Among the known solutions of this equation - nonspreading eddies or vortices solitons (vortex is for environment in which its particles have an angular velocity of rotation about an axis). Solitons of this kind have been found theoretic-

cally and simulated in the laboratory, can spontaneously occur in planetary atmospheres. On the properties and conditions of existence of soliton-like a whirlwind of wonderful features of Jupiter's atmosphere - the Great Red Spot.

This article investigated the Kadomtsev-Petviashvili equation, which, in turn, is a multidimensional soliton. Using the method of Hirota were built soliton, two-soliton, three-soliton, four-soliton solutions of the Kadomtsev-Petviashvili equation. Shows graphs of soliton solutions for various parameters of time.

This scientific article is presented on pages 9, contains 6 points. This paper also presents seven graphs, built in the software package Maple 17.

Key words: the Kadomtsev-Petviashvili equation, the method of Hirota, soliton solutions.

Введение

Уравнение Кадомцева-Петвиашвили – уравнение, которое возникает в теории длинных слабонелинейных волн на поверхности жидкости, распространяющихся вдоль оси x , причем изменение по оси y является достаточно медленным [1]. N -солитонное решение уравнения КП нашёл Сацума [1976]. Работы Майлза и Фримана пролили свет на структуру этих решений. Уравнение Кадомцева-Петвиашвили (КП) численно изучалось также Маханьковым, Литвиенко и Швачкой [1981], которые применили двумерный вариант конечно-разностной схемы «классиков» [2]. Автор работы [3] исследовал солитонные модели взаимодействия уравнения Кадомцева-Петвиашвили, подробно описал три вида солитонных резонансов, а также указал три типа взаимодействия триады и солитона. Он использовал уравнение КП с положительной дисперсией, а также показал решение между триадой и солитоном с помощью определителя Вронского. Определил солитонное решение с помощью компьютерного моделирования.

Автор статьи [4] показал роль солитонов в квантовой теории. Искал солитонные решения с помощью Грассманова многообразия и алгебры Ли. Показал, что классическое решение может быть получено в виде матричных элементов оператора, находящегося в состоянии N -частиц пространства Фока. Эти частицы, в свою очередь, могут быть либо бозонами, либо

фермионами. В ней показано свойство пространство-временной инвариантности солитонов, а также построено квантовое представление для решения классического уравнения КП. В работе [5] автор обнаружил, что пространство решений может параметрироваться на основе всеобщего многообразия Грассмана. Ю.И. Чен, Д.С. Хе и А. Рудольф [6] рассматривали иерархию уравнения Кадомцева-Петвиашвили, нашли односолитонное, двухсолитонное и переродическое солитонное решения, показали, что солитонное решение может перемещаться вдоль $(1+1)$ пространственно-временной области. Указали на то, что солитонное решение КП искали посредством детерминанта калибровочных преобразований. Свою лепту в развитие проблемы солитонов внес и Асли Пексан [7]. У индийских математиков С. Гоша и Д. Сарма [8] один из методов отыскания солитонных решений уравнения КП был также прямой метод Хирота, другой же метод был связан с конформной алгеброй. Сабуро Какей [9] уделял особое внимание тому, что иерархия КП может сводиться к алгебраическому тождеству пфаффианов.

В данной статье исследуем эволюцию солитонов уравнения Кадомцева-Петвиашвили. Используя метод Хирота, построим односолитонное, двухсолитонное, трехсолитонное и четырехсолитонное решения уравнения Кадомцева-Петвиашвили в следующем виде:

$$(-4U_t + 6UU_x + U_{xxx})_x + 3\sigma^2 U_{yy} = 0, \quad (1)$$

где $\sigma^2 = \pm 1$.

Билинейная форма

Для того чтобы привести данное уравнение к билинейной форме, необходимо ввести следующую замену

$$U = 2(\ln f)_{xx}. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1) получаем:

$$-8(\ln(f))_{xxx} + 24(\ln(f))_{xxx}(\ln(f))_{xx} + 24(\ln(f))_{xx}(\ln(f))_{xxx} + 2(\ln(f))_{xxxxx} + 6\sigma^2(\ln(f))_{yyx} = 0 \quad (3)$$

Проинтегрировав уравнение (3) дважды по x , с учетом того, что константы интегрирования приравняли нулю, получим

$$\frac{-4f_{tx}}{f} + \frac{4f_t f_x}{f^2} + \frac{f_{xxx}}{f} + \frac{3(f_{xx})^2}{f^2} - \frac{4f_{xxx} f_x}{f^2} + \frac{3\sigma^2 f_{yy}}{f} - \frac{3\sigma^2 (f_y)^2}{f^2} = 0. \quad (4)$$

Для дальнейшего анализа удобно ввести оператор Хирота, который в общем случае имеет вид

$$D_x^m D_t^n (F(x, t) \cdot G(x, t)) = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'} \right)^m \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'} \right)^n (F(x, t) G(x', t')) \Big|_{x=x', t=t'}. \quad (5)$$

Приведем некоторые основные свойства данного оператора, которые будем использовать в дальнейшем

$$D_t D_x (f \cdot f) = 2f_{tx} f - 2f_t f_x, \quad (6)$$

$$D_x^4 (f \cdot f) = 2f_{xxxx} f - 8f_{xxx} f_x + 6f_{xx}^2, \quad (7)$$

$$D_y^2 (f \cdot f) = 2f_{yy} f - 2f_y^2. \quad (8)$$

Используя оператор Хирота (5), можем переписать уравнение (4) в виде

$$[-4D_t D_x + D_x^4 + 3\sigma^2 D_y^2](f \cdot f) = 0. \quad (9)$$

(9) является билинейной формой уравнения (1).

Солитонные решения. Используя полученные результаты предыдущего раздела, можем построить солитонные решения уравне-

ния (1). Для этого согласно методу Хирота разложим функцию f в формальный ряд по малому параметру ε

$$f = 1 + \varepsilon f^{(1)} + \varepsilon^2 f^{(2)} + \varepsilon^3 f^{(3)} + \dots + \varepsilon^n f^{(n)}. \quad (10)$$

Подставляя (10) в (9), получаем

$$[-4D_t D_x + D_x^4 + 3\sigma^2 D_y^2]((1 + \varepsilon f^{(1)} + \varepsilon^2 f^{(2)} + \varepsilon^3 f^{(3)} + \dots) \cdot (1 + \varepsilon f^{(1)} + \varepsilon^2 f^{(2)} + \varepsilon^3 f^{(3)} + \dots)) = 0. \quad (11)$$

Приравнивая соответствующие коэффициенты при ε , получаем следующие равенства для уравнения (9)

$$\varepsilon^0 : [-4D_t D_x + D_x^4 + 3\sigma^2 D_y^2](1 \cdot 1) = 0, \quad (12)$$

$$\varepsilon^1 : [-4D_t D_x + D_x^4 + 3\sigma^2 D_y^2](f^{(1)} \cdot 1 + 1 \cdot f^{(1)}) = 0, \quad (13)$$

$$\varepsilon^2 : [-4D_t D_x + D_x^4 + 3\sigma^2 D_y^2](f^{(2)} \cdot 1 + 1 \cdot f^{(2)} + f^{(1)} \cdot f^{(1)}) = 0, \quad (14)$$

$$\varepsilon^3 : [-4D_t D_x + D_x^4 + 3\sigma^2 D_y^2](f^{(3)} \cdot 1 + 1 \cdot f^{(3)} + f^{(2)} \cdot f^{(1)} + f^{(1)} \cdot f^{(2)}) = 0, \quad (15)$$

$$\varepsilon^4 : [-4D_t D_x + D_x^4 + 3\sigma^2 D_y^2](f^{(4)} \cdot 1 + 1 \cdot f^{(4)} + f^{(3)} \cdot f^{(1)} + f^{(1)} \cdot f^{(3)} + f^{(2)} \cdot f^{(2)}) = 0, \quad (16)$$

$$\varepsilon^5 : [-4D_t D_x + D_x^4 + 3\sigma^2 D_y^2](f^{(5)} \cdot 1 + 1 \cdot f^{(5)} + f^{(4)} \cdot f^{(1)} + f^{(1)} \cdot f^{(4)} + f^{(3)} \cdot f^{(2)} + f^{(2)} \cdot f^{(3)}) = 0 \quad (17)$$

По методу Хирота для построения N-солитонных решений нелинейного уравнения, решение ищутся в следующем виде:

$$f^{(1)} = \sum_{j=1}^N \exp(\theta_j), \quad (18)$$

здесь $\theta_j = K_j x + \omega_j t + l_j y + \delta_j$; $K_j, \omega_j, l_j, \delta_j = const$.

Односолитонное решение

Для нахождения односолитонного решения уравнения (1), возьмем случай, когда $N=1$ в (18). Тогда

$$f = 1 + f^{(1)},$$

здесь

$$\theta_1 = K_1 x + \omega_1 t + l_1 y + \delta_1. \quad (19)$$

Односолитонное решение при (19) имеет следующий вид:

$$U = \frac{2K_1^2 e^{K_1 x + \omega_1 t + l_1 y + \delta_1}}{(1 + e^{K_1 x + \omega_1 t + l_1 y + \delta_1})^2}, \quad \text{где} \quad \omega_1 = \frac{K_1^4 + 3\sigma^2 l_1^2}{4K_1}. \quad (20)$$

График односолитонного решения уравнения КП представлен на рисунке 1.

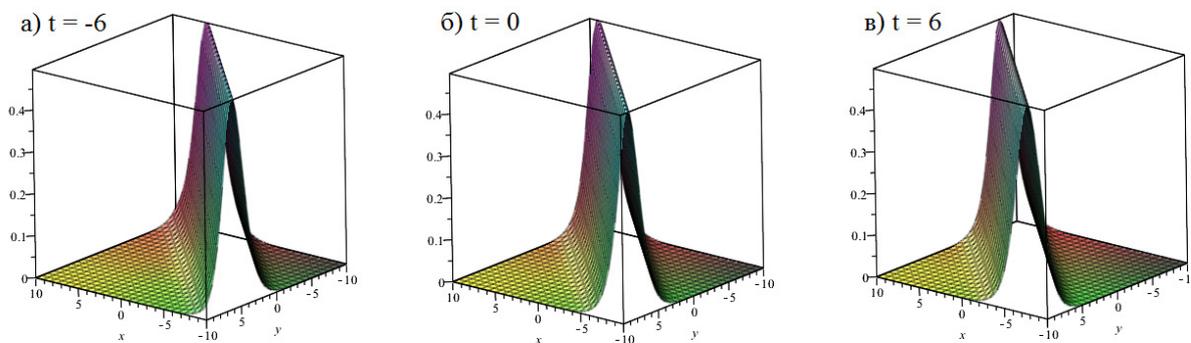


Рисунок 1 – Односолитонное решение уравнения Кадомцева-Петвиашвили при $K_1=1$, $l_1=1$, $\delta_1=1$, $\sigma^2=1$

Двухсолитонное решение

Для нахождения двухсолитонного решения уравнения (1) возьмем случай, когда $N=2$ в (18). Тогда:

$$f = 1 + f^{(1)} + f^{(2)}, \quad \text{где} \quad f^{(1)} = e^{\theta_1} + e^{\theta_2}, \quad f^{(2)} = A_{12} e^{\theta_1 + \theta_2}, \quad (21)$$

здесь $\theta_1 = K_1 x + \omega_1 t + l_1 y + \delta_1$; $\theta_2 = K_2 x + \omega_2 t + l_2 y + \delta_2$.

Двухсолитонное решение уравнения Кадомцева-Петвиашвили, учитывая (21), имеет следующий вид:

$$U = \frac{2(K_1^2 e^{\theta_1} + K_2^2 e^{\theta_2} + ((K_1 - K_2)^2 + A_{12}((K_1 + K_2)^2 + K_1^2 e^{\theta_2} + K_2^2 e^{\theta_1}))e^{\theta_1 + \theta_2})}{(1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + A_{12}e^{\theta_1 + \theta_2})^2}$$

$$A_{12} = \frac{2K_1^3 K_2 + 2K_1 K_2^3 - 3K_1^2 K_2^2 + 3\sigma^2 l_1 l_2 - 2K_1 \omega_2 - 2K_2 \omega_1}{2K_1^3 K_2 + 2K_1 K_2^3 + 3K_1^2 K_2^2 + 3\sigma^2 l_1 l_2 - 2K_1 \omega_2 - 2K_2 \omega_1}, \omega_1 = \frac{K_1^4 + 3\sigma^2 l_1^2}{4K_1},$$

$$\omega_2 = \frac{K_2^4 + 3\sigma^2 l_2^2}{4K_2}.$$

Графики двухсолитонного решения уравнения КП представлены на рисунках 2 и 3.

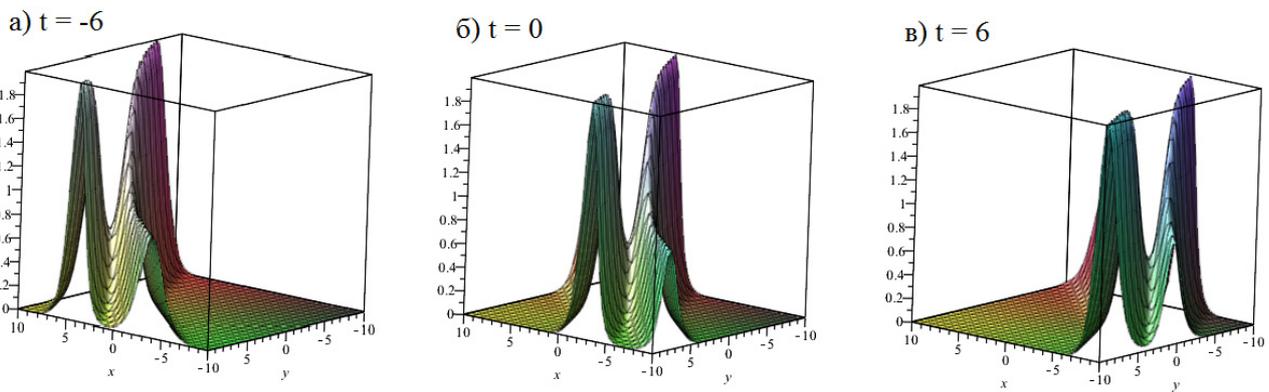


Рисунок 2 – Двухсолитонное решение уравнения Кадомцева-Петвиашвили при $K_1=2$, $K_2=1.3$, $l_1=1$, $l_2=1.5$, $\delta_1=1$, $\delta_2=1$, $\sigma^2=1$

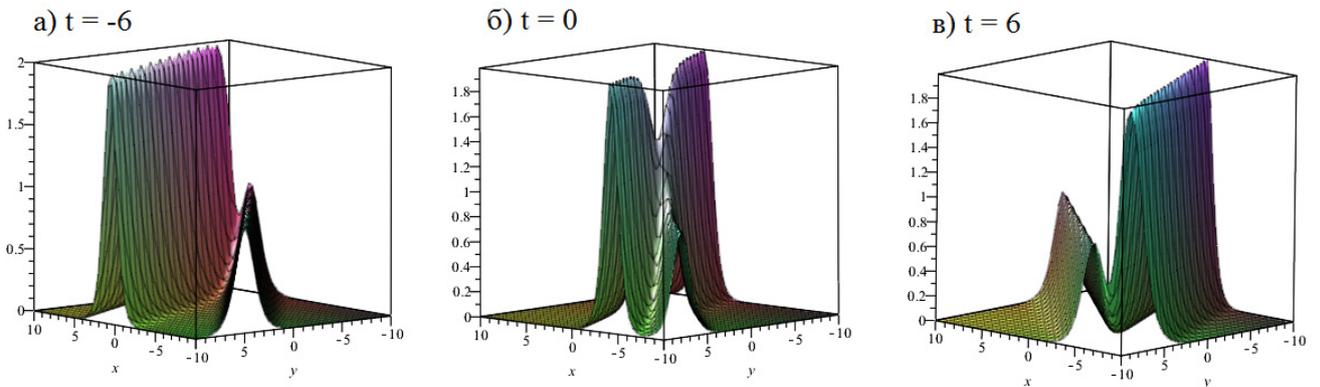


Рисунок 3 – Двухсолитонное решение уравнения Кадомцева-Петвиашвили при $K_1=2$, $K_2=1.3$, $l_1=1$, $l_2=1.5$, $\delta_1=1$, $\delta_2=1$, $\sigma^2=-1$

Трехсолитонное решение

Для нахождения трехсолитонного решения (1) возьмем случай, когда $N=3$ в (18). Тогда $f = 1 + f^{(1)} + f^{(2)} + f^{(3)}$, где $f^{(1)} = e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + e^{\theta_3}$, $f^{(2)} = A_{12}e^{\theta_1 + \theta_2} + A_{13}e^{\theta_1 + \theta_3} + A_{23}e^{\theta_2 + \theta_3}$, $f^{(4)} = B_{123}e^{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3}$.

Трехсолитонное решение уравнения Кадомцева-Петвиашвили имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
U = & \frac{2(K_1^2 e^{\theta_1} + K_2^2 e^{\theta_2} + K_3^2 e^{\theta_3} + A_{12}(K_1 + K_2)^2 e^{\theta_1 + \theta_2})}{1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + e^{\theta_3} + A_{12}e^{\theta_1 + \theta_2} + A_{13}e^{\theta_1 + \theta_3} + A_{23}e^{\theta_2 + \theta_3} + B_{123}e^{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3}} + \\
& + \frac{2(A_{13}(K_1 + K_3)^2 e^{\theta_1 + \theta_3} + A_{23}(K_2 + K_3)^2 e^{\theta_2 + \theta_3} + B_{123}(K_1 + K_2 + K_3)^2 e^{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3})}{1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + e^{\theta_3} + A_{12}e^{\theta_1 + \theta_2} + A_{13}e^{\theta_1 + \theta_3} + A_{23}e^{\theta_2 + \theta_3} + B_{123}e^{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3}} - \\
& - \left(\frac{2(K_1 e^{\theta_1} + K_2 e^{\theta_2} + K_3 e^{\theta_3} + A_{12}(K_1 + K_2)e^{\theta_1 + \theta_2} + A_{13}(K_1 + K_3)e^{\theta_1 + \theta_3})}{(1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + e^{\theta_3} + A_{12}e^{\theta_1 + \theta_2} + A_{13}e^{\theta_1 + \theta_3} + A_{23}e^{\theta_2 + \theta_3} + B_{123}e^{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3})^2} + \right. \\
& \left. + \frac{A_{23}(K_2 + K_3)e^{\theta_2 + \theta_3} + B_{123}(K_1 + K_2 + K_3)e^{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3}}{(1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + e^{\theta_3} + A_{12}e^{\theta_1 + \theta_2} + A_{13}e^{\theta_1 + \theta_3} + A_{23}e^{\theta_2 + \theta_3} + B_{123}e^{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3})^2} \right)
\end{aligned}$$

здесь

$$\begin{aligned}
A_{12} &= \frac{2K_1^3 K_2 + 2K_1 K_2^3 - 3K_1^2 K_2^2 + 3\sigma^2 l_1 l_2 - 2K_1 \omega_2 - 2K_2 \omega_1}{2K_1^3 K_2 + 2K_1 K_2^3 + 3K_1^2 K_2^2 + 3\sigma^2 l_1 l_2 - 2K_1 \omega_2 - 2K_2 \omega_1}, \\
A_{13} &= \frac{2K_1^3 K_3 + 2K_1 K_3^3 - 3K_1^2 K_3^2 + 3\sigma^2 l_1 l_3 - 2K_1 \omega_3 - 2K_3 \omega_1}{2K_1^3 K_3 + 2K_1 K_3^3 + 3K_1^2 K_3^2 + 3\sigma^2 l_1 l_3 - 2K_1 \omega_3 - 2K_3 \omega_1}, \\
A_{23} &= \frac{2K_3^3 K_2 + 2K_3 K_2^3 - 3K_3^2 K_2^2 + 3\sigma^2 l_3 l_2 - 2K_3 \omega_2 - 2K_2 \omega_3}{2K_3^3 K_2 + 2K_3 K_2^3 + 3K_3^2 K_2^2 + 3\sigma^2 l_3 l_2 - 2K_3 \omega_2 - 2K_2 \omega_3}. \\
\omega_1 &= \frac{K_1^4 + 3\sigma^2 l_1^2}{4K_1}, \omega_2 = \frac{K_2^4 + 3\sigma^2 l_2^2}{4K_2}, \omega_3 = \frac{K_3^4 + 3\sigma^2 l_3^2}{4K_3}, B_{123} = A_{12} A_{13} A_{23}.
\end{aligned}$$

Графики трехсолитонного решения представлены на рисунках 4 и 5.

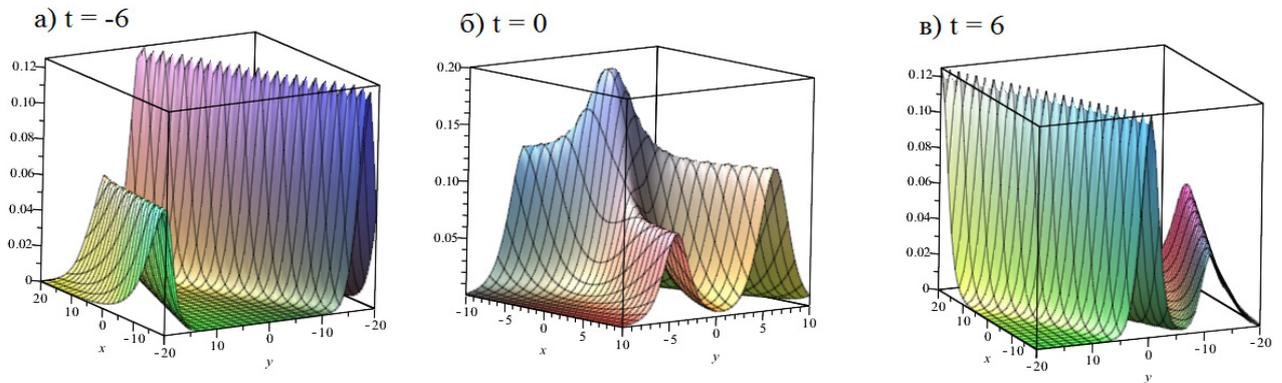


Рисунок 4 – Трехсолитонное решение уравнения Кадомцева-Петвиашвили при $K_1=0.2$, $K_2=0.3$, $K_3=0.5$, $l_1=0.8$, $l_2=1$, $l_3=-1$, $\delta_1=1$, $\delta_2=1$, $\delta_3=1$, $\sigma^2=1$

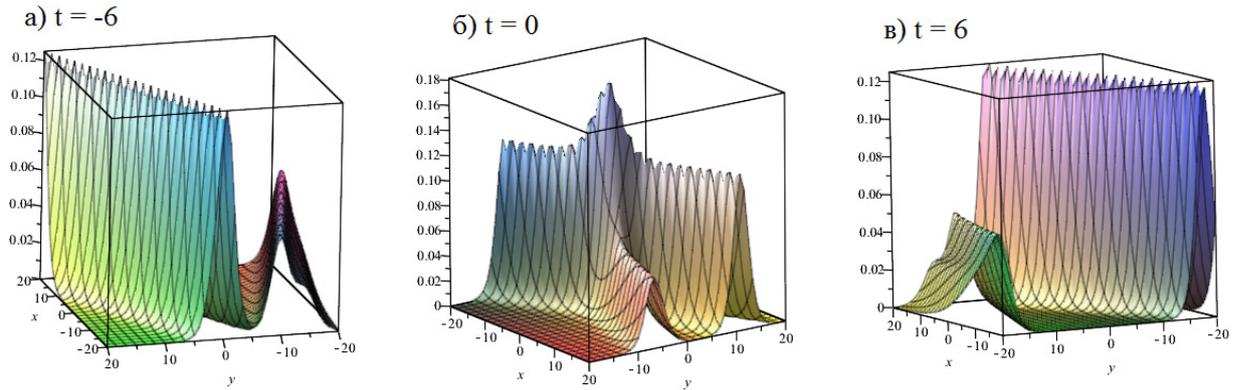


Рисунок 5 – Трехсолитонное решение уравнения Кадомцева-Петвиашвили при $K_1=0.2, K_2=0.3, K_3=0.5, l_1=0.8, l_2=1, l_3=-1, \delta_1=1, \delta_2=1, \delta_3=1, \sigma^2=-1$

Четырехсолитонное решение

Для нахождения трехсолитонного решения (1) возьмем случай, когда $N=3$ в (18). Тогда

$$\begin{aligned}
 f &= 1 + f^{(1)} + f^{(2)} + f^{(3)} + f^{(4)}, \text{ где } f^{(1)} = e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + e^{\theta_3} + e^{\theta_4}, \\
 f^{(2)} &= A_{12}e^{\theta_1+\theta_2} + A_{13}e^{\theta_1+\theta_3} + A_{23}e^{\theta_2+\theta_3} + A_{14}e^{\theta_1+\theta_4} + A_{24}e^{\theta_2+\theta_4} + A_{34}e^{\theta_3+\theta_4}, \\
 f^{(4)} &= B_{123}e^{\theta_1+\theta_2+\theta_3} + B_{124}e^{\theta_1+\theta_2+\theta_4} + B_{134}e^{\theta_1+\theta_3+\theta_4} + B_{234}e^{\theta_2+\theta_3+\theta_4}, \quad f^{(5)} = C_{1234}e^{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4}.
 \end{aligned}$$

Четырехсолитонное решение уравнения КП имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{2(K_1^2 e^{\theta_1} + K_2^2 e^{\theta_2} + K_3^2 e^{\theta_3} + K_4^2 e^{\theta_4} + A_{12}(K_1 + K_2)^2 e^{\theta_1+\theta_2} + A_{13}(K_1 + K_3)^2 e^{\theta_1+\theta_3})}{1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + e^{\theta_3} + e^{\theta_4} + N + T} + \\
 &+ \frac{2(A_{14}(K_1 + K_4)^2 e^{\theta_1+\theta_4} + A_{23}(K_2 + K_3)^2 e^{\theta_2+\theta_3} + A_{24}(K_2 + K_4)^2 e^{\theta_2+\theta_4} + A_{34}(K_3 + K_4)^2 e^{\theta_3+\theta_4})}{1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + e^{\theta_3} + e^{\theta_4} + N + T} + \\
 &+ \frac{2(B_{123}(K_1 + K_2 + K_3)^2 e^{\theta_1+\theta_2+\theta_3} + B_{124}(K_1 + K_2 + K_4)^2 e^{\theta_1+\theta_2+\theta_4} + B_{134}(K_1 + K_3 + K_4)^2 e^{\theta_1+\theta_3+\theta_4})}{1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + e^{\theta_3} + e^{\theta_4} + N + T} + \\
 &+ \frac{2(B_{234}(K_2 + K_3 + K_4)^2 e^{\theta_2+\theta_3+\theta_4} + C_{1234}(K_1 + K_2 + K_3 + K_4)^2 e^{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4})}{1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + e^{\theta_3} + e^{\theta_4} + N + T} - \\
 &- \left(\frac{2(K_1 e^{\theta_1} + K_2 e^{\theta_2} + K_3 e^{\theta_3} + K_4 e^{\theta_4} + A_{12}(K_1 + K_2)e^{\theta_1+\theta_2} + A_{13}(K_1 + K_3)e^{\theta_1+\theta_3})}{(1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + e^{\theta_3} + e^{\theta_4} + N + T)^2} + \right. \\
 &+ \frac{A_{14}(K_1 + K_4)e^{\theta_1+\theta_4} + A_{23}(K_2 + K_3)e^{\theta_2+\theta_3} + A_{24}(K_2 + K_4)e^{\theta_2+\theta_4} + A_{34}(K_3 + K_4)e^{\theta_3+\theta_4}}{(1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + e^{\theta_3} + e^{\theta_4} + N + T)^2} + \\
 &+ \frac{B_{123}(K_1 + K_2 + K_3)e^{\theta_1+\theta_2+\theta_3} + B_{124}(K_1 + K_2 + K_4)e^{\theta_1+\theta_2+\theta_4} + B_{134}(K_1 + K_3 + K_4)e^{\theta_1+\theta_3+\theta_4}}{(1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + e^{\theta_3} + e^{\theta_4} + N + T)^2} + \\
 &+ \left. \frac{B_{234}(K_2 + K_3 + K_4)e^{\theta_2+\theta_3+\theta_4} + C_{1234}(K_1 + K_2 + K_3 + K_4)e^{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4}}{(1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + e^{\theta_3} + e^{\theta_4} + N + T)^2} \right),
 \end{aligned}$$

здесь

$$\begin{aligned}
A_{12} &= \frac{2K_1^3K_2 + 2K_1K_2^3 - 3K_1^2K_2^2 + 3\sigma^2l_1l_2 - 2K_1\omega_2 - 2K_2\omega_1}{2K_1^3K_2 + 2K_1K_2^3 + 3K_1^2K_2^2 + 3\sigma^2l_1l_2 - 2K_1\omega_2 - 2K_2\omega_1}, \\
A_{13} &= \frac{2K_1^3K_3 + 2K_1K_3^3 - 3K_1^2K_3^2 + 3\sigma^2l_1l_3 - 2K_1\omega_3 - 2K_3\omega_1}{2K_1^3K_3 + 2K_1K_3^3 + 3K_1^2K_3^2 + 3\sigma^2l_1l_3 - 2K_1\omega_3 - 2K_3\omega_1}, \\
A_{14} &= \frac{2K_1^3K_4 + 2K_1K_4^3 - 3K_1^2K_4^2 + 3\sigma^2l_1l_4 - 2K_1\omega_4 - 2K_4\omega_1}{2K_1^3K_4 + 2K_1K_4^3 + 3K_1^2K_4^2 + 3\sigma^2l_1l_4 - 2K_1\omega_4 - 2K_4\omega_1}, \\
A_{23} &= \frac{2K_3^3K_2 + 2K_3K_2^3 - 3K_3^2K_2^2 + 3\sigma^2l_3l_2 - 2K_3\omega_2 - 2K_2\omega_3}{2K_3^3K_2 + 2K_3K_2^3 + 3K_3^2K_2^2 + 3\sigma^2l_3l_2 - 2K_3\omega_2 - 2K_2\omega_3}, \\
A_{24} &= \frac{2K_4^3K_2 + 2K_4K_2^3 - 3K_4^2K_2^2 + 3\sigma^2l_4l_2 - 2K_4\omega_2 - 2K_2\omega_4}{2K_4^3K_2 + 2K_4K_2^3 + 3K_4^2K_2^2 + 3\sigma^2l_4l_2 - 2K_4\omega_2 - 2K_2\omega_4}, \\
A_{34} &= \frac{2K_4^3K_3 + 2K_4K_3^3 - 3K_4^2K_3^2 + 3\sigma^2l_4l_3 - 2K_4\omega_3 - 2K_3\omega_4}{2K_4^3K_3 + 2K_4K_3^3 + 3K_4^2K_3^2 + 3\sigma^2l_4l_3 - 2K_4\omega_3 - 2K_3\omega_4}. \\
\omega_1 &= \frac{K_1^4 + 3\sigma^2l_1^2}{4K_1}, \omega_2 = \frac{K_2^4 + 3\sigma^2l_2^2}{4K_2}, \omega_3 = \frac{K_3^4 + 3\sigma^2l_3^2}{4K_3}, \omega_4 = \frac{K_4^4 + 3\sigma^2l_4^2}{4K_4}, \\
B_{123} &= A_{12}A_{13}A_{23}, B_{124} = A_{12}A_{14}A_{24}, B_{134} = A_{14}A_{13}A_{34}, B_{234} = A_{23}A_{24}A_{34}, \\
C_{1234} &= A_{12}A_{13}A_{14}A_{23}A_{24}A_{34}. \\
N &= A_{12}e^{\theta_1+\theta_2} + A_{13}e^{\theta_1+\theta_3} + A_{14}e^{\theta_1+\theta_4} + A_{23}e^{\theta_2+\theta_3} + A_{24}e^{\theta_2+\theta_4} + A_{34}e^{\theta_3+\theta_4}, \\
T &= B_{123}e^{\theta_1+\theta_2+\theta_3} + B_{124}e^{\theta_1+\theta_2+\theta_4} + B_{134}e^{\theta_1+\theta_3+\theta_4} + B_{234}e^{\theta_2+\theta_3+\theta_4} + C_{1234}e^{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4}.
\end{aligned}$$

Графики четырехсолитонного решения уравнения КП представлены на рисунках 6 и 7.

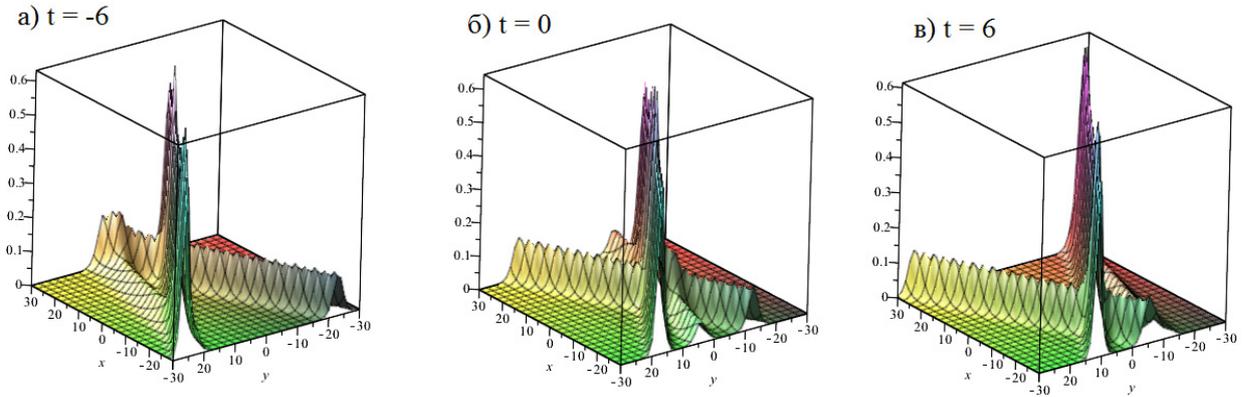


Рисунок 6 – Четырехсолитонное решение уравнения Кадомцева-Петвиашвили при $K_1=0.2$, $K_2=0.3$, $K_3=0.5$, $K_4=1$, $l_1=0.8$, $l_2=1$, $l_3=-1$, $l_4=1.5$, $\delta_1=\delta_2=\delta_3=\delta_4=1$, $\sigma^2=1$

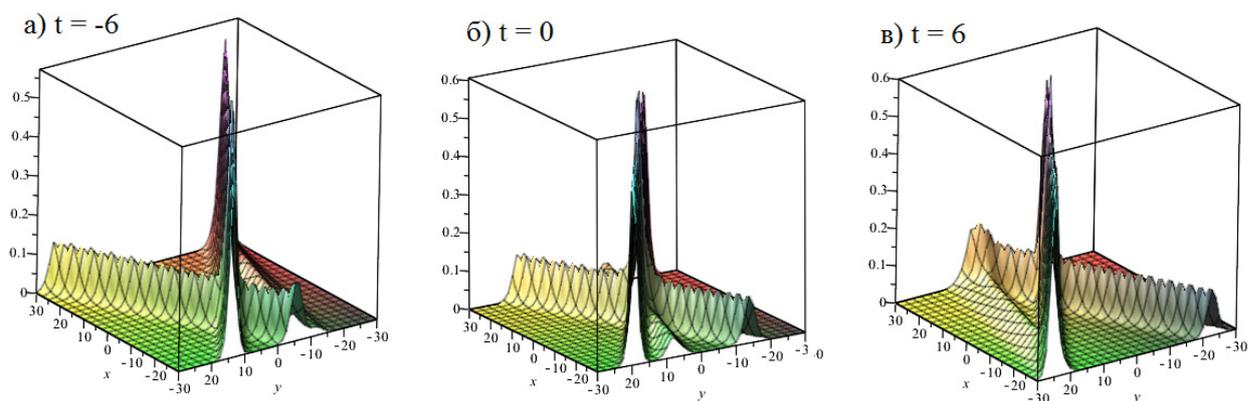


Рисунок 7 – Четырехсолитонные решения уравнения Кадомцева-Петвиашвили при $K_1=0.2$, $K_2=0.3$, $K_3=0.5$, $K_4=1$, $l_1=0.8$, $l_2=1$, $l_3=-1$, $l_4=1.5$, $\delta_1=\delta_2=\delta_3=\delta_4=1$, $\sigma^2=-1$

Заклучение

В данной статье было рассмотрено уравнение Кадомцева-Петвиашвили. Используя метод Хиро-

та, получены солитонные решения данного уравнения. Показаны эволюции построения графиков при положительной и отрицательной дисперсии.

References

- 1 Ablovic M., Sigur X. Solitons and the method of the inverse problem. – М.: Mir, 1987.
- 2 Dodd R. D.Gibson, H.Morris. Solitons and nonlinear wave equations. / Ed. by and A.B.Shabata. – М.: Mir, 1988. – P.653-655.
- 3 Kamis I. Kadomtsev - Petviashvili (KP) nonlinear waves identification. - 2005. <http://eprints.utm.my/2799/1/75023.pdf>
- 4 Zarmi Ya. Quantized representation for Kadomtsev - Petviashvili equation on the soliton sector.-Jacob Blaustein Institutes for Desert Research Ben-Gurion University of the Negev Midreshet Ben-Gurion, 84990 Israel.
- 5 Sato M. and Sato Y. Soliton equations as dynamical systems on an infinite dimensional Grassmannian manifold, Lecture Notes in Num. Appl. Anal., vol. 5, pp. 259–271 (Kinokuniya, Tokyo, 1982).
- 6 Jingsong He, Yi Cheng, Rudolf A. Solving Bi-directional soliton equations in the KP hierarchy by Gauge transformation. 2005. http://wrap.warwick.ac.uk/353/1/WRAP_Roemer_Solving-bi-directional.pdf
- 7 Pekcan A. Solutions of Non-Integrable Equations by the Hirota Direct Method. -Department of Mathematics, Faculty of Sciences.Bilkent University, 06800 Ankara, Turkey 2008.
- 8 Ghosh S., Sarma D. Bilinearization of suoersymmetric KP hierarchies associated with non-trivial flows.- Department of Physics, Indian Institute of Technology, North Guwahati, Guwahati 781039, INDIA, 2001.
- 9 Kakei S. Dressing Method and the Coupled KP Hierarchy.- Department of Mathematical Sciences, School of Science and Engineering, Waseda University, 3-4-1 Ohkubo, Shinjuku-ku, Tokyo 169-8555, Japan, 1999.