

УДК 524.1; 52-1/-8:530.12; 524.8

В.Д. Джунушалиев*, А.А. Махмудов

Казахский национальный университет имени аль-Фараби,
 НИИ экспериментальной и теоретической физики, Казахстан, г. Алматы
 *E-mail: v.dzhunushaliev@gmail.com

Регулярные самосогласованные решения заряженного спинорного поля и скалярного поля с логарифмическим потенциалом

Показано, что при взаимодействии скалярного поля (имеющего LOG-потенциал) с электрическим и спинорным полями возникает регулярная полевая конфигурация, имеющая конечную энергию. Это означает, что наблюдатель на бесконечности видит кулоновский «точечный» заряд, регуляризованный в центре этого объекта и имеющий спин. Использование Log-потенциала в нашей модели обосновано тем, что оно является простейшим нелинейным обобщением квантовой механики и для него уже было показано, что соответствующее классическое уравнение для нелинейного спинорного поля имеет регулярные решения. Для описания данной модели использовались уравнения Максвелла, Дирака и нелинейные уравнения для нелинейного скалярного поля с Log-потенциалом, решение которых было получено численным способом в программе Wolfram Mathematica как нелинейная задача на собственные значения с собственными значениями соответствующих параметров. Кроме того, при решении вышеупомянутых нелинейных дифференциальных уравнений было исследовано поведение соответствующих функций на бесконечности и поведение их около нуля. Показано, что спинорное и скалярное поля на бесконечности убывают по экспоненциальному закону, в то время как электрическое поле падает по кулоновскому закону.

Ключевые слова: самосогласованные решения, заряженное спинорное поле, скалярное поле с логарифмическим потенциалом.

В.Д. Джунушалиев, А.А. Махмудов

Зарядталған спинорлық өріс және логарифмдық потенциалды скалярлық өрістердің өз-өзіне сәйкес регулярлық шешімдері

Скалярлық өрістің (LOG-потенциалды) электрлік және спинорлық өрістермен әрекеттесуі нәтижесінде регулярлық шектік энергиясы бар өрістік конфигурация пайда болатыны көрсетілген. Бұл байқаушының шексіздікте кулондық «нүктелік» зарядты көретінін білдіреді. Бұл заряд объектінің ортасында регуляриланған және оның спины бар. Log-потенциалдың біздің модельде қолдануының негізгі себебі ол кванттық механиканың ең қарапайым сызықсыз жалпылауы болып табылады және оған сәйкес келетін спинорлық өрістік классикалық теңдеулердің регулярлық шешімдерінің бар екендігі көрсетілген. Бұл модельдің сипаттамасы үшін Максвеллдың, Дирактың және сызықсыз скалярлық Log-потенциалды өріс үшін сызықсыз теңдеулер қолданылған, бұл теңдеулердің шешімі Wolfram Mathematica бағдарламасы арқылы өздік мән сызықсыз есебі ретінде шешілген. Бұдан басқа, жоғарыда аталған сызықсыз дифференциалдық теңдеулердің шешу жолында тиісті функциялардың нөлмен шексіздіктегі түрі анықталды. Спинорлық және скалярлық өрістер шексіздікте экспоненциал заңы бойынша кемісе, электр өрісі Кулон заңы бойынша төмендейді.

Түйін сөздер: өз-өзіне сәйкес шешімдер, зарядталған спинорлық өріс, логарифмдық потенциалды скалярлық өріс.

V.D. Dzhunushaliev, A.A. Makhmudov

Regular self-congruent solutions of charged spinor field and scalar field with logarithmic potential

It was shown that interaction of scalar field(which has Log-potential) with electric and spinor fields gives rise to regular field configuration with finite energy. This means that an observer at infinity sees Coulomb "point" charge, regularized at the center of the object. Using of Log-potential in our model is justified by the fact that this kind of potential is found to be the simplest generalization of quantum mechanics and it was shown that corresponding classical equation for nonlinear spinor field has regular solutions. Description of the model was made using equations of

Maxwell, Dirac and nonlinear equations for nonlinear scalar field with Log-potential. Solution of this equations was obtained in Wolfram Mathematica CAS from nonlinear eigenvalue problem. Besides, there was examined behavior of corresponding functions at infinity and near zero and it was illustrated that spinor and scalar fields decrease exponentially, while electrical field decrease according to Coulomb law.

Key words: self-consistent solutions, charged spinor field, the scalar field with a logarithmic potential.

Введение

В классической теории поля большой интерес представляют любые регулярные решения соответствующих полевых уравнений, например монополи [1], [2], инстантоны [3] и т.д. Известны также точные самосогласованные плоскосимметричные решения уравнений взаимодействующих спинорного и скалярного полей [4]. В статье [5] было найдено регулярное самосогласованное решение взаимодействующих электрического и скалярного полей, где скалярное поле имеет так называемый LOG-потенциал. Известно, что скалярное поле с таким LOG-потенциалом является простейшим нелинейным обобщением квантовой механики [6], [7]. В 50-х годах прошлого столетия Гей-

зенберг проводил исследования в области непертурбативного квантования нелинейного спинорного поля, и в этом направлении было показано, что соответствующее классическое уравнение для нелинейного спинорного поля имеет регулярные решения [8].

В этой статье мы показываем, что взаимодействие электрического и спинорного полей со скалярным полем, имеющим LOG-потенциал, приводит к регулярной полевой конфигурации, состоящей из электрического и спинорного полей и имеющей конечную энергию.

Математическое описание модели

Для описания поставленной выше задачи, мы используем следующий Лагранжиан:

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \chi^\dagger\gamma^\mu D_\mu\chi + \frac{1}{2}|D_\mu\Psi|^2 - V(|\Psi|^2), \quad (1)$$

где

$$D_\mu\Psi = (\partial_\mu - igA_\mu)\Psi; \quad D_\mu\chi = (i\partial_\mu - eA_\mu)\chi; \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu; \quad A^\mu = (\phi, \vec{A})$$

является 4-х потенциалом электромагнитного поля; ϕ, \vec{A} – скалярный и векторные потенциалы соответственно; χ – классическое спинорное поле, e и g – константы взаимодействия между электромагнитным, спинорным и скалярным

полями соответственно; использованы естественные единицы $c = \hbar = \epsilon_0 = 1$, метрика имеет сигнатуру $(+, -, -, -)$. Поле Ψ описывает физический (непертурбативный) вакуум с потенциалом

$$V(|\Psi|^2) = -\frac{1}{\beta}\left\{|\Psi|^2 [\ln(a^3|\Psi|^2) - 1] + \frac{1}{a^3}\right\} \quad (2)$$

матрицы Дирака выбираются в стандартном представлении

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где $i = 1, 2, 3$ и σ_i матрицы Паули равны:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Плотность энергии для Лагранжиана (1)

$$H = \frac{1}{2}(E^2 + H^2) + \chi^\dagger[\alpha^i(\hat{p}_i - eA_i) + \beta m + e\phi]\chi + \frac{1}{2}[(\partial_t\Psi)^2 + (\nabla\Psi)^2] + V(|\Psi|^2), \quad (5)$$

где $\overline{E}, \overline{H}$ – электрическое и магнитное поля. Матрицы α, β – это

$$\alpha = \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & -\sigma_i \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Полевые уравнения

Полевые уравнения, следующие из Лагранжиана (1), имеют следующий вид:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \quad (7)$$

$$D_\mu D^\mu \Psi + \frac{\partial V}{\partial \Psi^*} = \left[D_\mu D^\mu + \frac{1}{\beta} \ln(a^3 |\Psi|^2) \right] \Psi = 0, \quad (8)$$

$$\gamma^\mu (i\partial_\mu - eA_\mu) \chi - m\chi = 0, \quad (9)$$

где

$$j^\mu = \frac{ig}{2} [(D^\mu \Psi)^* \Psi - \Psi^* (D^\mu \Psi)] + e\chi^\dagger \gamma^\mu \chi \quad (10)$$

является электрическим током,

$l' = 2j - 1$, ϵ – энергия, Ω_{jlm} – 3D сферический спинор.

Мы ищем сферически симметричное решение уравнений (7)–(9) в следующей форме:

$$\chi = e^{-i\epsilon t} \begin{pmatrix} f(r)\Omega_{jlm} \\ (-1)^{\frac{1+l-l'}{2}} h(r)\Omega_{jl'm} \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$A_\mu = (\phi(r), 0, 0, 0) \quad (12)$$

$$\Psi(t, r) = e^{iEt} \psi(r) \quad (13)$$

$$\Omega_{l+\frac{1}{2}, l, m} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{j+m}{2j}} Y_{l, m-\frac{1}{2}} \\ \sqrt{\frac{j-m}{2j}} Y_{l, m+\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \quad l = j \pm \frac{1}{2}, \quad (14)$$

l, m – азимутальное и магнитное квантовое числа, соответственно. $Y_{l,m}$ – сферическая гармоническая функция, нормированная специальным образом:

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} i^l \left[\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!} \right]^{\frac{1}{2}} P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\varphi}. \quad (15)$$

Используя этот анзац, первоначальные полевые уравнения сводятся к набору дифференциальных уравнений:

$$\psi'' + \frac{2}{r} \psi' = -(E - gf)^2 \psi - \frac{1}{\beta} \psi \log(a^3 \psi^2). \quad (16)$$

$$\phi'' + \frac{2}{r} \phi' = -2g(E - g\phi)\psi^2 + e(f^2 + g^2). \quad (17)$$

$$f' + \frac{1 + \kappa}{r} f - (\epsilon + m - e\phi)h = 0, \quad (18)$$

$$h' + \frac{1 - \kappa}{r} h + (\epsilon - m - e\phi)f = 0, \quad (19)$$

где k – ненулевое целое число,

$$\kappa = \begin{cases} -\left(j + \frac{1}{2}\right) = -(l + 1), & j = l + \frac{1}{2} \\ \left(j + \frac{1}{2}\right) = l, & j = l - \frac{1}{2} \end{cases} \quad (20)$$

и j – суммарный угловой момент заряженной частицы, l – орбитальный момент. В уравнениях (16)-(18) перейдем к следующим безразмерным переменным:

$$x = \frac{r}{\sqrt{\beta}}, \tilde{f}(r) = a^2 f(r), \tilde{h}(r) = a^2 h(r), \tilde{\epsilon} = \epsilon\sqrt{\beta}, \quad (21)$$

$$\tilde{m} = m\sqrt{\beta}, \tilde{\psi} = a^{3/2}\psi, \tilde{\phi} = -g\sqrt{\beta}\phi, \tilde{E} = E\sqrt{\beta}, \tilde{g} = g\sqrt{\frac{\beta}{a^3}}, \tilde{e} = \frac{e}{g}. \quad (22)$$

Полевые уравнения в безразмерном виде принимают следующий вид:

$$\tilde{\psi}'' + \frac{2}{x}\tilde{\psi}' = -(\tilde{E} + \tilde{\phi})^2\tilde{\psi} - \tilde{\psi}\log(\tilde{\psi}^2). \quad (23)$$

$$\tilde{\phi}'' + \frac{2}{x}\tilde{\phi}' = -2\tilde{g}^2(\tilde{E} + \tilde{\phi})^2\tilde{\psi}^2 - \tilde{e}^2(\tilde{f}^2 + \tilde{h}^2). \quad (24)$$

$$\tilde{f}' + \frac{1 + \kappa}{x}\tilde{f} - (\tilde{\epsilon} + \tilde{m} - \tilde{e}\tilde{\phi})\tilde{h} = 0. \quad (25)$$

$$\tilde{h}' + \frac{1 - \kappa}{x}\tilde{h} + (\tilde{\epsilon} - \tilde{m} - \tilde{e}\tilde{\phi})\tilde{f} = 0. \quad (26)$$

Регулярное решение и его свойства

Численное решение

Аналитическое решение системы уравнений (23)–(26), по всей видимости, отсутствует, поэтому

эта система была решена с использованием численных методов, как нелинейная задача на собственные значения с собственными значениями \tilde{E} , \tilde{e} . Профиль решения показан на рисунках 1–3.

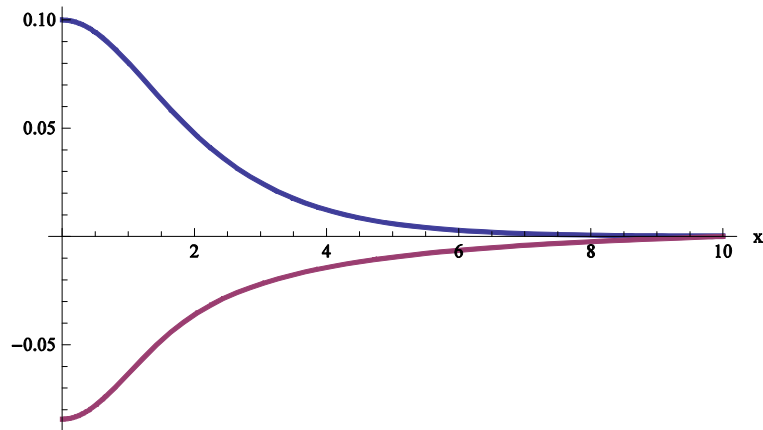


Рисунок 1 – Функции $\phi(x)$ и $\tilde{f}(x)$, нижняя и верхняя кривая, соответственно

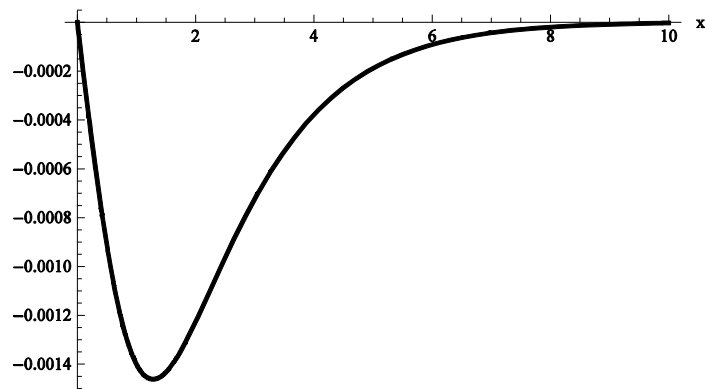


Рисунок 2 – Функция $\tilde{h}(x)$

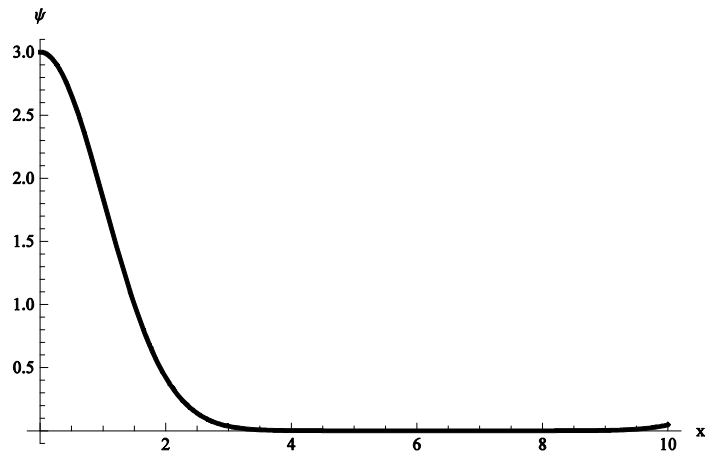


Рисунок 3 – Функция $\psi(x)$

Решение уравнений (23)–(26) в начале координат может быть получено путем разложения этих функций в ряд Тейлора

$$\tilde{f}(x) = \tilde{f}_0 + \tilde{f}_1 x, \tilde{h}(x) = \tilde{h}_1 x + \tilde{h}_2 \frac{x^2}{2}. \quad (29)$$

$$\tilde{\psi}(x) = \tilde{\psi}_0 + \tilde{\psi}_2 \frac{x^2}{2}, \tilde{\psi}'(x) = \tilde{\psi}_2 x, \quad (30)$$

$$\tilde{\phi}(x) = \tilde{\phi}_0 + \tilde{\phi}_2 \frac{x^2}{2}, \tilde{\phi}'(x) = \tilde{\phi}_2 x, \quad (31)$$

из этих уравнений мы получаем граничные условия для численного решения уравнений (23)–(26):

$$\tilde{\psi}(\delta) = \tilde{\psi}_0 + \tilde{\psi}_2 \frac{\delta^2}{2}, \tilde{\psi}'(\delta) = \tilde{\psi}_2 \delta, \tilde{\phi}(\delta) = \tilde{\phi}_0 + \tilde{\phi}_2 \frac{\delta^2}{2}, \tilde{\phi}'(\delta) = \tilde{\phi}_2 \delta \quad (32)$$

$$\tilde{f}(\delta) = \tilde{f}_0, \tilde{h}(\delta) = \tilde{h}_1 \delta. \quad (33)$$

Для численного решения мы использовали следующие значения безразмерных параметров:

$$\kappa = -1, \tilde{g} = 0.1, \tilde{m} = 0.02, \tilde{\epsilon} = -0.01, \quad (34)$$

$$\psi_0 = 3, \phi_0 = -7, \tilde{f}_0 = 0.01. \quad (35)$$

Отметим, что скалярный потенциал $\tilde{\phi}(x)$ определен с точностью до константы $\tilde{\phi}_\infty$. Численное решение приводит к константе

отличной от нуля. В уравнениях (23) и (24) мы всегда можем переопределить $\tilde{\phi}$ следующим образом:

$$(\tilde{E} + \tilde{\phi}_\infty) + (\tilde{\phi} - \tilde{\phi}_\infty).$$

Асимптотическое поведение

На бесконечности компоненты спинорного поля \tilde{f} и \tilde{h} , скалярное поле $\tilde{\psi}$ и скалярный потенциал $\tilde{\phi}$ ведут себя следующим образом:

$$\tilde{f}(x) \approx -A \sqrt{\frac{\tilde{m} + \tilde{\epsilon}}{\tilde{m} - \tilde{\epsilon}}} e^{-\sqrt{\tilde{m}^2 - \tilde{\epsilon}^2} x}, \tilde{h}(x) \approx A e^{-\sqrt{\tilde{m}^2 - \tilde{\epsilon}^2} x} \quad (36)$$

$$\tilde{\psi}(x) \approx \psi_0 e^{-\frac{x^2}{2}}, \tilde{\phi}(x) \approx -\frac{q}{x}, \quad (37)$$

где A и q – некоторые константы.

Заключение

Таким образом, в данной статье мы предложили приближенную модель физического (непертурбативного) вакуума. Было показано, что при взаимодействии электрического и классического спинорного полей с физическим вакуумом возникает регулярный объект, имеющий: (а) конечную энергию и размеры (так как все поля, за исключением электриче-

ского поля, асимптотически экспоненциально быстро стремятся к нулю), (б) ненулевой спин, (в) электрическое поле на бесконечности имеет кулоновское поведение. Все это приводит к тому, что наблюдатель на бесконечности видит точечный кулоновский заряд, имеющий заряд и спин.

Данная работа выполнена в рамках гранта КН МОН РК 1626/ГФЗ.

References

- 1 't Hooft, G. Magnetic monopoles in unified gauge theories // Nuclear Physics B. – 1974. – Vol. 79. – P. 276-284.
- 2 Polyakov, A.M. Spektr chastits v kvantovoi teorii polya // Pis'ma v ZhETF. – 1974. – Vol. 20. - № 6. – P. 430-433.

-
- 3 Vaynshteyn, A.I., Zakharov, V.I., Novikov, V.A., Shiffmann, M.A. Instantonnaya azbuka// UFN. – 1982. – Vol. 136 – № 4. – P. 553-591.
 - 4 Adomu, A., Shikin, G.N. Tochnye samosoglasovannye ploskosimmetrichnye resheniya uravneniy vzaimodeystvuyushih spinornogo i skalyarnogo poley//Izvestiya VUZov, fizika. – 1998. – N7. – P. 69-75.
 - 5 Dzhunushaliev, V., Zloshchastiev, K. G. Singularity-free model of electric charge in physical vacuum: Non-zero spatial extent and mass generation // Cent. Eur. J. Phys. – 2013 – № 11 – P. 325-335.
 - 6 Bialynicki-Birula, I., Mycielski, J. Nonlinear Wave Mechanics//Annals Phys. – 1976. –N100. – P.62 -93.
 - 7 Bialynicki-Birula, I., Mycielski, J. Uncertainty relations for information entropy in wave mechanics//Commun. Math. Phys. – 1975. – N44. – P.129-132.
 - 8 Ivanenko, D.D. Nelineynaya kvantovaya teoriya polya//ser. Problemy fiziki. – 1959.